A0112 1

V894

UNIVERSITÉ DE SAINT-ÉTIENNE
FACULTÉ DE SCIENCES ET TECHNIQUES
Département de Mathématiques

adresse postale
G. GREKOS
Mathématiques. Faculté.
23, rue du Docteur Paul Michelon
F - 42023 SAINT-ETIENNE CEDEX 2
Tél. : 77.42.15.00

Equipe de Théorie des Nombres

Envoi de : Georges GREKOS

Tél. : 77 42 15 32
77 42 15 43 (secrétariat Mathématiques)
77 42 15 00 (standard Faculté)

Télécopieur (Fax) : 77 25 18 17

Adresse électronique (e-mail): grekos@univ-st-etienne.fr

le 31.10.1994

to N.J.A. Sloane
Bell Laboratories

Best regards and greetings

[signature]

Partially ordering relations up to isomorphism.

There is, in the Encyclopedia, the sequence "number of partially ordered sets with n elements" (see photocopy).

Related to this sequence is the sequence:

$n \mapsto$ distinct, up to isomorphism, partially ordered sets with n elements.

Some terms are given in the book:

Eric Lehman. Mathématiques, tome 1, Algèbre et Géométrie. Collection DIA. Belin, Paris, 1984, page 220

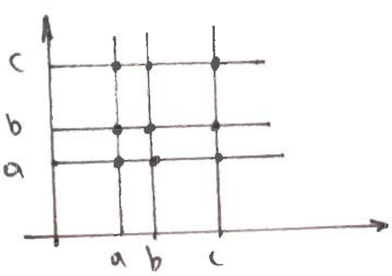
Unfortunately, I don't know further references.

I guess, one can write to

Eric Lehman
Professeur Université de CAEN.
Mathématiques
14032 CAEN cedex, France.

For instance, for $n=3$, let $E=\{a,b,c\}$.

A partially ordering relation $R \subset E^2$ must contain $D := \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ and satisfy



$(x,y) \in R$ and $(y,x) \in R \Rightarrow x=y$

$(x,y) \in R$ and $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

[that is, $(x,y) \in R$ and $x \neq y \Rightarrow (y,x) \notin R$]

The five, distinct up to isomorphism, relations should be:

$R = D$

$R = D \cup \{(a,b)\}$

$R = D \cup \{(a,b), (a,c)\}$

$R = D \cup \{(b,a), (c,a)\}$

and $R = D \cup \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$

G. GREKOS
31.10.1994

From: MX%"sequences-reply@research.att.com" 28-OCT-1994 10:25:44.85
To: MX%"grekos@univ-st-etienne.fr"
CC:
Subj:

Return-Path: <sequences-reply@research.att.com>
Received: from research.att.com by stroph.univ-st-etienne.fr (MX V4.0-1 VAX)
with SMTP; Fri, 28 Oct 1994 10:25:41 +0100
From: sequences-reply@research.att.com
Date: Fri, 28 Oct 94 05:25 EDT
To: grekos@univ-st-etienne.fr

Matches (at most 7) found for 1 2 5 16 63 316 :

Matches (at most 7) found for 1 3 19 219 4231 130023 6129859 :

%I A1035 M3068 N1244
%S A1035 1,1,3,19,219,4231,130023,6129859,431723379,44511042511,6611065248783,
%T A1035 1396281677105899,414864951055853499,171850728381587059351
%N A1035 Labeled partially ordered sets with n elements.
%R A1035 C1 60. CN 8 180 73. DM 53 148 85. ErSt89.
%O A1035 0,3
%C A1035 njas
%K A1035

References (if any):

[C1] = L. Comtet, { Advanced Combinatorics}, Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.
[CN] = { Congressus Numerantium}.
[DM] = { Discrete Mathematics}.
[ErSt89] = M. Ern\'{e} and K. Stege, ''The number of partially ordered sets,'' p
reprint, 1989.
Note: if the sequence you submitted was not in the table,
and it is well-defined, interesting and infinite, please
send as many terms as you know together with a short description,
and we will add it to the table. In this way you stake out
a claim to the sequence, and help others who may come across
the same problem. We will use your email address as a reference.

Announcement: Academic Press will publish "The Encyclopedia
of Integer Sequences" by N.J.A. Sloane and S. Plouffe in late
1994 or early 1995. A floppy disk containing just the sequences
will also be available from them. Further info will be posted here.

[NOTE: there is now a second sequence server that tries very hard
to find an explanation for a sequence: send one lookup line
to superseeker@research.att.com . Only 1 request per person
per hour please. It works hard!]

Sequentially yours,

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
N. J. A. Sloane
AT&T Bell Labs, Murray Hill, New Jersey

with the assistance of Simon Plouffe
Universite' du Que'bec a' Montre'al

Notation:
%I = identification line: Annnn = absolute catalogue number of sequence,
Nnnnn = number (if any) in "Handbook of Integer Sequences" (1973)
%S, %T, %U = beginning of sequence [%V,W,X = signed version if appropriate]
- the signed versions are slowly being added -
%N = name, %R = references, %Y = cross-references, %A = authority,
%F = formula (if not included in %N line), %K = keywords,
%O = offset = [a,b]: a is subscript of first entry, b gives the
position of the first entry >= 2.

mathématiques

pour l'étudiant de 1re année

1. algèbre et géométrie

DEUXIÈME ÉDITION
REVUE ET CORRIGÉE

Eric Lehman

ofesseur à l'Université de Caen

ures : C. Foucrier

Collections DIA
dirigées par Daniel et Martin Andler

G. GREKOS
Γ. ΓΚΡΑΙΚΟΣ

BELIN 8, rue Férou
75278 PARIS CEDEX 06

DIA UNIVERSITÉ

LT050 94,80F

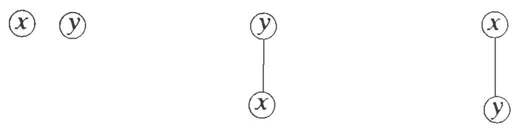
5

$=$	x	y
x	**V**	**F**
y	**F**	**V**

$\leqslant_1$	x	y
x	**V**	**V**
y	**F**	**V**

$\leqslant_2$	x	y
x	**V**	**F**
y	**V**	**V**

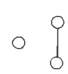
que nous pouvons symboliser :

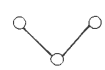


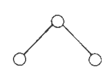
(E, $\leqslant_1$) et (E, $\leqslant_2$) sont isomorphes. Tout ensemble ordonné de cardinal 2 est isomorphe à $(\{x, y\}, =)$ ou $(\{x, y\}, \leqslant_1)$. Remarquons que $id_E : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto x$ et $y \longmapsto y$ de (E, $=$) sur (E, $\leqslant_1$) répond à l'exercice 1.

Card E = 3. $E = \{x, y, z\}$ où $x \neq y$, $y \neq z$ et $x \neq z$. Il y a 19 relations d'ordre possibles :

1 peut être symbolisée par : 

6 peuvent être symbolisées par : 

3 peuvent être symbolisées par : 

3 peuvent être symbolisées par : 

6 peuvent être symbolisées par : 

Il y a 5 ensembles ordonnés (à un isomorphisme près) de cardinal 3.

Exercice 2. Représenter symboliquement les 16 ensembles ordonnés de cardinal 4.

Card E	Nombre de relations d'ordre sur E	Nombre d'ordres à un isomorphisme près
1	1	1
2	3	2
3	19	$\boxed{5}$
4	219	16
5	4 231	63
6	130 023	316
7	6 129 859	?
8	?	?
	A1035	A112

1. Nombre de relations d'ordre sur des ensembles finis.

Exercice 3. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation entre éléments de E. On suppose que $\mathcal{R}$ est à la fois une relation d'équivalence et une relation d'ordre. Déterminer $\mathcal{R}$.

1.2. Exemples

1. (E, $=$). Soit E un ensemble. L'égalité d'éléments de E est une relation d'ordre dans E, d'après la définition. C'est un cas extrême sans grand intérêt pratique.

2. (N, $\leqslant$), (Z, $\leqslant$), (Q, $\leqslant$), (R, $\leqslant$). Les relations d'ordre sont ici la relation « inférieur ou égal » usuelle. Nous verrons que ces quatre structures d'ordre se distinguent les unes des autres par certaines propriétés; ces différences sont décisives en analyse.

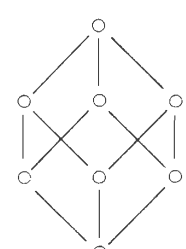
3. ($\mathbb{N}^*$, $|$) où $n \mid m$ signifie « n divise m », soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall m \in \mathbb{N}^* \ (n \mid m \iff \exists q \in \mathbb{N}^* \ nq = m).$$

($\mathbb{N}^*$, $|$) est un ensemble ordonné car on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ n \mid n$. En effet $n \cdot 1 = n$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall m \in \mathbb{N}^* \ [(n \mid m \text{ et } m \mid n) \Longrightarrow n = m]$. En effet $nq = m$ et $mq' = n$ entraînent $nqq' = n$ ou $qq' = 1$, d'où $q = 1$ et $n = m$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall m \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathbb{N}^* \ [(n \mid m \text{ et } m \mid p) \Longrightarrow n \mid p]$. En effet si $nq = m$ et $mq' = p$ alors $n(qq') = p$, soit $n \mid p$.

4. ($\mathcal{P}(E)$, $\subset$) où E est un ensemble. L'inclusion est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ puisque :
$\forall A \subset E \ \ A \subset A$
$\forall A \subset E \ \ \forall B \subset E \ [(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Longrightarrow A = B]$
$\forall A \subset E \ \ \forall B \subset E \ \forall C \subset E$
$[(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Longrightarrow A \subset C]$.

Exercice 4. 1. Montrer que les ensembles ordonnés $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subset)$ et $(\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}, |)$ sont isomorphes. 2. Vérifier qu'ils peuvent être symbolisés par :



1.3. Dualité

• Soit (E, $\leqslant$) un ensemble ordonné. On appelle *relation duale* ou *relation inverse* de $\leqslant$ et on note $\geqslant$ la relation binaire définie sur $E \times E$ par :

$$\forall x \in E \ \ \forall y \in E \quad (x \geqslant y \iff y \leqslant x).$$

Proposition et définition. La relation $\geqslant$ définie ci-dessus est une relation d'ordre; (E, $\geqslant$) s'appelle l'*ensemble ordonné dual* de l'ensemble ordonné (E, $\leqslant$).