/f Cat

√NS

Sloan → 662 and 1374 – – 1377 → 666

Technische Hochschule Hannover

Lehrstuhl C für Mathematik Hannover, im März 1967

Strukturzahlen in endlichen Relationssystemen

von Walter Oberschelp*

§1. Einleitung

Über einer endlichen, nichtleeren Punktmenge, die o.B.d.A. als $N=\{1,\ldots,n\}$ gewählt werden kann, werden wie in [13] Relationssysteme $\mathcal{R}=\langle N, R_1^{(1)},\ldots,R_{\mu_1}^{(1)},\ldots,\ldots,R_1^{(m)},\ldots,R_{\mu_m}^{(m)}$ betrachtet. Dabei habe die Relation $R_j^{(i)}$ die Stellenzahl i, während j als Unterscheidungsindex dient. $\tau=[\mu_1,\ldots,\mu_m]$ sei der Typ von $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ mit gleichem Individuenbereich N und gleichem Typ τ heißen isomorph, wenn eine Permutation $\pi\in\mathcal{S}_n$ existiert, welche jedes $R_j^{(i)}$ in das entsprechende $R_j^{(i)}$, überführt. Gesucht sind asymptotisch auswertbare Formeln für die Anzahl $S(n,\tau)$ der nicht-isomorphen Relationssysteme über n-elementigem Bereich N mit dem Typ τ. Dieses Strukturzahlproblem ist bereits von CARNAP 1950 aufgeworfen worden[1], aber nur für den Fall m=1 behandelt worden. Es soll hier gelöst werden für sog. reine Relationssysteme, d.h. für Systeme mit Relationen nur einer Stellenzahl σ. Ein solcher Typ soll ab-

*) Vortrag, gehalten am 12. August 1966 beim Internationalen Kolloquium über Logik und Grundlagen der Mathematik der DVMLG in Hannover. Erscheint demnächst in den Proceedings des Hannover-Kolloquiums.

1) In [4], S. 124.

kürzend mit $\tau = \langle \sigma, \mu_\sigma \rangle$ bezeichnet werden. Die Carnapsche Problemstellung ist von R.L.Davis 1953 aufgegriffen worden[2] mit dem Resultat einer (asymptotisch nicht direkt auswertbaren) Strukturzahlformel für $S(n, \langle \sigma, 1 \rangle)$. HARARY erkannte 1955[3], daß dieses Resultat als Spezialfall der allgemeinen Abzählungstheorie von POLYA (1937)[4] zu deuten ist, einer Theorie, die in letzter Zeit von de BRUIJN[5] fortentwickelt worden ist. HARARY gab 1958 ohne Beweis[6] die asymptotische Beziehung

$$S(n, \langle 2, 1 \rangle) \sim \frac{1}{n!} \cdot 2^{n^2}.$$

Methoden zur genaueren Abschätzung finden sich bei W.OBERSCHELP 1966[7]. Als Ergebnis sei z.B. genannt

$$S(n, \langle 2, 1 \rangle) = \frac{1}{n!} \cdot 2^{n^2} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}}(2n^2 - 2n) + \frac{1}{2^{4n}}\left(32n^4 - 170\tfrac{2}{3}n^3 + 288n^2 - 149\tfrac{1}{3}n\right) + O\left(\frac{n^5}{2^{5n}}\right)\right).$$

In dieser Arbeit sollen unter Benutzung der Theorie von Polya asymptotische Anzahlformeln für $S(n, \langle \sigma, \mu_\sigma \rangle)$ bei beliebigem σ und μ_σ gegeben werden. Dabei werden die Ergebnisse interpretiert als Aussagen über die mittlere Größe der <u>Automorphismengruppe</u> reiner Relationssysteme $\mathfrak{R}$. Für Stellenzahlen $\sigma > 1$ erweisen sich fast alle solche Relationssysteme als <u>starr</u>, d.h. sie besitzen nur die triviale (einelementige) Automorphismengruppe.

Sei $Z(n, \tau)$ die Zahl der Relationssysteme über N vom Typ τ <u>ohne</u> Identifikation isomorpher Systeme. $Z(n, \tau)$ ist gleich der

---

2) Vgl. [5].
3) Vgl. [8].
4) Vgl. [11].
5) Vgl. [1] und [2].
6) Vgl. [9].
7) Vgl. [10], § 4.

Zahl der Zustandsbeschreibungen (state descriptions) von CARNAP[8]. Trivialerweise gilt die Formel

$$Z(n,\tau) = 2^{\sum_{\sigma=1}^{m} \mu_\sigma n^\sigma}, \text{ wenn } \tau = [\mu_1,\ldots,\mu_m].$$

Für die durchschnittliche Zahl $s(n,\tau)$ zueinander isomorpher Relationssysteme gilt ferner

$$s(n,\tau) = \frac{Z(n,\tau)}{S(n,\tau)}.$$

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$, eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ mit der Ordnung g, zerlegt die $\mathfrak{S}_n$ in $\frac{n!}{g}$ Nebenklassen. Alle zueinander isomorphen verschiedenen Relationssysteme entstehen aus einem durch Ausübung je einer Permutation aus genau einer Nebenklasse auf dieses eine Relationssystem. Mithin gilt für die "mittlere Ordnung" $g(n,\tau)$ von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}}$ die Formel

$$g(n,\tau) = \frac{n!}{s(n,\tau)}.$$ Da $1 \leq g(n,\tau) \leq n!$ ist, so gilt

$$\frac{1}{n!} Z(n,\tau) \leq S(n,\tau) \leq Z(n,\tau).$$

Die oben erwähnte Starrheit fast aller Relationssysteme im Fall $\sigma > 1$ zeigt man, indem man nachweist, daß hier für $n \to \infty$ die asymptotische Beziehung $g(n,\tau) \sim 1$, also $S(n,\tau) \sim \frac{1}{n!} Z(n,\tau)$ gilt.

Es sei noch erwähnt, daß unsere Überlegungen aufgefaßt werden können als eine quantitativ-finite Variante von Bestrebungen der modernen Meta-Mathematik, welche sich das Auffinden von Modellen mit großer Automorphismengruppe zum Ziel gesetzt haben[9].

---

8) Z.B. in [4], §18A.

9) Man vergleiche z.B. [6].

§2. Anwendungen des Polyaschen Satzes auf das Anzahlproblem

Man kann ein reines Relationssystem $\mathcal{R}$ vom Typ $\tau=\langle\sigma,\mu\rangle$ über N vollständig beschreiben durch ein Diagramm in Form einer μ-zeiligen und n^{σ}-spaltigen Inzidenzmatrix in den Zahlen 0 und 1. Die Zeilen entsprechen den σ-stelligen Relationen $R_1,\ldots,R_\mu$ aus $\mathcal{R}$, die Spalten den σ-Tupeln $\tau_1,\ldots,\tau_{n^\sigma}$ von Zahlen aus N in irgendeiner festen lexikographischen Anordnung. $a_{ik}=1$ bedeute, daß die Relation R_i auf das k-te σ-Tupel zutrifft; entsprechend bedeute $a_{ik}=0$ das Nicht-Zutreffen. Bei dieser Darstellung erscheint ein reines Relationssystem als eine Folge von sog. Elementarkonfigurationen, in diesem Falle von Spalten. Unter der Stärke einer Spalte sei die Komponentensumme verstanden, unter der Stärke eines Relationssystemes die Summe der Stärken aller Spalten:

$$\begin{array}{c|c|}
 & \tau_1 \quad \ldots \quad \tau_{n^\sigma} \\
\hline
\begin{array}{c} R_1 \\ \vdots \\ R_\mu \end{array} & \alpha \\
\hline
\end{array}$$

Das Elementarpolynom ist eine (formal bis Unendlich erstreckbare) Potenzreihe

$$E(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu z^\nu,$$ deren Koeffizienten e_ν die Anzahl der Möglichkeiten angeben, eine Elementarkonfiguration (Spalte) der Stärke ν herzustellen. Da dies offenbar auf $\binom{\mu}{\nu}$ Weisen geht, gilt

$$E(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} z^\nu = (1+z)^\mu .$$

Da sich jedes reine Relationssystem aus n^σ solcher Spalten bestimmt, würde sich ohne Rücksicht auf Isomorphie-Identifikationen ein Polynom

$$A_{n,\tau}(z) = E(z)^{n^\sigma} = (1+z)^{\mu n^\sigma} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \text{ mit } a_\nu := \binom{\mu n^\sigma}{\nu} \text{ ergeben,}$$

wobei a_ν die Zahl der verschiedenen Relationssysteme der Stärke ν angibt. Wir interessieren uns hier jedoch für die Zahl der Isomorphie-Klassen der Stärke ν, d.h. für das Polynom

$$B_{n,\tau}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(n,\tau) z^\nu,$$ sobei $S_\nu(n,\tau)$ die Zahl der nicht-isomorphen Relationssysteme über N vom Typ τ mit der Stärke ν angibt. Allerdings soll hier das asymptotische Verhalten dieser Zahlen selbst nicht untersucht werden[10], sondern nur die Gesamtzahlen

$$S(n,\tau) = B_{n,\tau}(1) = \sum_{\nu=0}^{\mu n^\sigma} S_\nu(n,\tau)$$

sind Gegenstand dieser Untersuchung.

Durch Übergang zu einem isomorphen Relationssystem vermöge einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ erfolgt ein Austausch gewisser Spalten von $\mathfrak{A}$, also eine Permutation Π über einer Menge von n^σ Elementen. Diese Permutationen bilden die sog. σ-Tupelgruppe $\mathfrak{S}_n^\sigma$, offenbar wie die $\mathfrak{S}_n$ eine Permutationsgruppe der Ordnung n!. Zur Anwendung der Polyaschen Theorie hat man den sog. Zykelindex der $\mathfrak{S}_n^\sigma$ zu betrachten. Unter dem Zykelindex $Z(\mathfrak{G})$ einer Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g über n Elementen versteht man ein formales Polynom in n Variablen $f_1,\ldots,f_n$

$$Z(\mathfrak{G}) := \frac{1}{g} \sum_{\pi\in\mathfrak{G}} f_1^{p_1}\cdots f_n^{p_n} .$$

---

10) Vgl. hierzu im Falle $\tau = \langle 2,1\rangle$ noch [10], §5.

Dabei ist p_i die Zahl der Zykeln von π mit der Länge i. Für die der Permutation π zugeordnete Partition der Zahl n, geschrieben als $\gamma(\pi) := (p_1, \ldots, p_n)$, gilt also $\sum_{i=1}^{n} ip_i = n$. Für das gesuchte Polynom $B_{n,\tau}(z)$ liefert nun die Polyasche Theorie im Fall reiner Relationssysteme den

Satz 1: $$B_{n,\langle\sigma,\mu\rangle}(z) = Z(\gamma_n^\sigma)\left[f_r/E(z^r)\right].$$

Die in eckigen Klammern angedeutete sog. Polyasche Einsetzung ist dabei so zu verstehen, daß für jedes Vorkommen von f_r im Zykelindex $Z(\gamma_n^\sigma)$ der σ-Tupel-Gruppe das Polynom $E(z^r)$ einzusetzen ist. Damit steht auf der rechten Seite tatsächlich ein Polynom in z. Da E(z) durch die angedeutete triviale Elementar-Kombinatorik soeben explizit angegeben worden ist, steht und fällt die Auswertung der in Satz 1 gegebenen Formel mit der numerischen Berechnung von $Z(\gamma_n^\sigma)$.

Beim Beweis von HARARY[11] für Satz 1 wird die Polyasche Kombinatorik für solche Problemkreise wie den vorliegenden aufgeschlossen. Für die Gesamtzahl der Strukturen (ohne Rücksicht auf Stärke) gilt das

Korollar: $$S(n,\langle\sigma,\mu\rangle) = Z(\gamma_n^\sigma)\left[f_r/2^\mu\right] = \frac{1}{n!}\sum_{\Pi\in\gamma_n^\sigma} 2^{\mu(P_1+\ldots+P_{n^\sigma})}.$$

Es ist nämlich $S(n,\langle\sigma,\mu\rangle) = B_{n,\langle\sigma,\mu\rangle}(1)$, und $E(1^r)=2^\mu$.

Die Partition $\wp(\Pi) := (P_1, \ldots, P_{n^\sigma})$ zu $\Pi\in\gamma_n^\sigma$, also das Schema der Exponenten im Zykelindex $Z(\gamma_n^\sigma)$ entsteht aus $\gamma(\pi) = (p_1, \ldots, p_n)$ in leicht übersehbarer Weise, die in [10][12] beschrieben wurde.

11) Vgl. [7].
12) Im §2.

§3. Auswertung der Polya-Formel für reine Relationssysteme mit $\sigma > 1$

Es soll jetzt das asymptotische Verhalten von $S(n,\tau)$ für $n \to \infty$ untersucht werden. Dabei führen die Fälle $\sigma = 1$ und $\sigma > 1$ zu wesentlich verschiedenen Ergebnissen. Zunächst soll der weniger triviale Fall $\sigma > 1$ behandelt werden.

Die größtmögliche Ordnung $\Gamma(n,\tau)$ einer Automorphismengruppe von $\mathcal{R}$ ist natürlich $n!$, unabhängig vom Typ τ von $\mathcal{R}$. Z.B. hat ein Relationssystem, welches nur aus Allrelationen besteht, die volle $\mathfrak{S}_n$ der Ordnung $n!$ als Automorphismengruppe. Andererseits gibt es stets Relationssysteme mit der trivialen Automorphismengruppe (sog. starre Systeme), für die also die kleinstmögliche Ordnung $\gamma(n,\tau)=1$ ist. Beispiele hierfür liefern z.B. Relationen vom Typ einer Ordnung im Sinne von $<$ über N. Für die mittlere Ordnung der Automorphismengruppe kann man also zunächst nur $1 \leq g(n,\tau) \leq n!$ aussagen.

Zur genaueren Berechnung von $g(n,\tau)$ wird das Korollar von Satz 1 verwendet: Der Anteil, der auf die einzelnen $\Pi \in \mathfrak{S}_n^\sigma$ entfällt, ist sehr unterschiedlich. Den Löwenanteil in dieser Summe stellt die identische Permutation ε, den nächst-größeren stellen diejenigen Π, welche durch Vertauschungen τ nur zweier Elemente der $\mathfrak{S}_n$ induziert werden (sog. Transpositionen).

a) Die identische Permutation $\varepsilon \in \mathfrak{S}_n$ mit $\gamma(\varepsilon)=(n,0,\dots,0)$ induziert die identische Permutation $\Pi(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_n^\sigma$ mit $\mathcal{P}(\Pi)=(n^\sigma,0,\dots,0)$. Der Beitrag zur Summe im Korollar von Satz 1 ist also $\frac{2^{An^\sigma}}{n!}$.

b) Die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen τ der $\mathfrak{S}_n$ mit $\gamma(\tau)=(n-2,1,0,\ldots,0)$ induzieren $\Pi(\tau)\in\mathfrak{S}_n^\sigma$ mit $\gamma(\Pi)=((n-2)^\sigma, \frac{1}{2}(n^\sigma-(n-2)^\sigma),0,\ldots,0)$. Denn diejenigen σ-Tupel, welche nur die $n-2$ nicht permutierten Elemente aus N enthalten, bleiben bei Π unverändert. Dies sind gerade $(n-2)^\sigma$ Stück. Alle anderen σ-Tupel liegen in Zykeln von Π der Länge 2. Der Beitrag aller σ-Tupel ist also

$$(n-2)^\sigma + \frac{1}{2}(n^\sigma-(n-2)^\sigma) = \frac{1}{2}(n^\sigma+ (n-2)^\sigma)$$

$$= \frac{1}{2}(n^\sigma + n^\sigma - 2\sigma n^{\sigma-1} + 4\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} n^{\sigma-2} - 8\binom{\sigma}{3}n^{\sigma-3} \pm \ldots)$$

$$= n^\sigma - \sigma n^{\sigma-1} + \sigma(\sigma-1)n^{\sigma-2}(1 + (\sigma-2)O(\tfrac{1}{n})).$$

Insgesamt ist also der Anteil der Transpositionen

$$\frac{2^{\mu n^\sigma}}{n!}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2^{\mu\sigma(\sigma-1)n^{\sigma-2}(1+(\sigma-2)O(\frac{1}{n}))}}{2^{\mu\sigma n^{\sigma-1}}}$$

. Hierbei hat $O(\frac{1}{n})$ die folgende Form:

$$\frac{1}{2\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)n^{\sigma-2}}\left(-\binom{\sigma}{3}2^3 n^{\sigma-3}+\binom{\sigma}{4}2^4 n^{\sigma-4}-\binom{\sigma}{5}2^5 n^{\sigma-5}+\ldots\right)$$

$$= -\frac{2}{3n} + \frac{\sigma-3}{3n^2} - \frac{2(\sigma-3)(\sigma-4)}{15n^3} + \frac{(\sigma-3)(\sigma-4)(\sigma-5)}{6!}\, O(\frac{1}{n^4}).$$

c) Sei $\sum_{\varkappa,n}$ derjenige Teil der Summe im Korollar, der zu allen Π gehört, welche von irgendwelchen $\pi\in\mathfrak{S}_n$ mit $p_1(\pi)=n-\varkappa$ induziert werden $(0\leq\varkappa\leq n)$. Es ist also $\sum_{0,n}$ der unter a) behandelte Term; ferner ist $\sum_{1,n}=0$, und $\sum_{2,n}$ ist der unter b) behandelte Term. Wir untersuchen jetzt für $\varkappa\geq 3$ den Term

$$\sum\nolimits_{\varkappa,n} := \frac{1}{n!}\sum_{\substack{\Pi(\pi)\in\mathfrak{S}_n^\sigma \\ \gamma(\pi)=(n-\varkappa,\ldots)}} 2^{\mu(P_1+\ldots+P_{n^\sigma})}$$

1) Die Anzahl der π mit $\gamma(\pi)=(n-\varkappa, p_2, \dots, p_n)$ ist bekanntlich[13]

$$\frac{n!}{(n-\varkappa)!\,2^{p_2}p_2!\cdots n^{p_n}p_n!} \le \frac{n!}{(n-\varkappa)!}\,.$$

2) Die Anzahl der Partitionen der Zahl n in der Form $\gamma=(n-\varkappa, p_2, \dots, p_n)$ ist kleiner oder gleich $2^{\varkappa}$. Denn alle diese Partitionen müssen einer Partition $\gamma=(0, p_2, \dots, p_n)$ von $\varkappa$ entsprechen, und davon gibt es bekanntlich weniger als $2^{\varkappa}$.

3) Für die Summe der Exponenten gilt

$$\sum_1^{n^\sigma} P_i \le P_1 + \tfrac{1}{2}(2P_2+3P_3+\dots+n^\sigma P_{n^\sigma}) = P_1 + \tfrac{1}{2}(n^\sigma-P_1) = \tfrac{1}{2}(n^\sigma+P_1)\,.$$

Nun ist aber $P_1=(n-\varkappa)^\sigma$, denn wie in b) sind diejenigen σ-Tupel, welche bei Π unverändert bleiben, genau diejenigen $(n-\varkappa)^\sigma$ Stück, welche nur die $n-\varkappa$ bei π nicht permutierten Elemente aus N enthalten. Also ist

$$\sum_1^{n^\sigma} P_i \le \tfrac{1}{2}(n^\sigma+(n-\varkappa)^\sigma) = n^\sigma - \frac{\varkappa\sigma}{2}n^{\sigma-1} + \frac{\varkappa^2\sigma(\sigma-1)}{4}\,n^{\sigma-2} \mp \dots)$$

Aus 1), 2) und 3) folgt

$$\sum\nolimits_{\varkappa,n} \le \frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-\varkappa)!}\cdot 2^{\varkappa}\cdot 2^{\mu(n^\sigma - \frac{\sigma\varkappa}{2}n^{\sigma-1} + \frac{\varkappa^2\sigma(\sigma-1)}{4}n^{\sigma-2}\mp\dots)}$$

$$= \frac{2^{\mu n^\sigma}}{n!}\cdot\frac{n}{2^{\frac{\mu\sigma}{2}n^{\sigma-1}}}\cdot\frac{n-1}{2^{\frac{\mu\sigma}{2}n^{\sigma-1}}}\cdots\frac{n-\varkappa+1}{2^{\frac{\mu\sigma}{2}n^{\sigma-1}}}\cdot 2^{\varkappa}\cdot 2^{\mu\varkappa^2\cdot\frac{\sigma(\sigma-1)}{4}n^{\sigma-2}\mp\dots}$$

Demnach ist $\sum_{\varkappa,n}$

$$\le \frac{2^{\mu n^\sigma}}{n!}\left(\frac{2n}{2^{\frac{\mu\sigma}{2}n^{\sigma-1}-\frac{1}{4}\mu\varkappa\sigma(\sigma-1)n^{\sigma-2}\pm\dots}}\right)^{\varkappa} = \frac{2^{\mu n^\sigma}}{n!}\cdot\frac{(2n)^{\varkappa}}{2^{\varkappa\frac{\mu\sigma}{2}n^{\sigma-1}(1+o(1))}}\,,$$

wobei die o-Konstante noch u.a. von $\varkappa$ abhängen kann.

---

13) Vgl. [12], S. 67 (1).

Wir benötigen aber noch eine gleichmäßige Abschätzung in $\varkappa$. Der Exponent im Nenner lautet anders geschrieben

$$\frac{\mu\sigma}{2}\, n^{\sigma-1}\left(1 - \frac{\varkappa}{n}\,\frac{\sigma-1}{2} + \frac{\varkappa^2}{n^2}\cdot\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{3!} \mp \ldots\right).$$

Die Klammer, deren Wert mit K bezeichnet werde, hat die Form

$-\frac{n}{\varkappa\sigma}\left(1 - \frac{\varkappa}{n}\right)^{\sigma} + \frac{n}{\varkappa\sigma} = \frac{n}{\varkappa\sigma}\left(1 - \left(1 - \frac{\varkappa}{n}\right)^{\sigma}\right)$. Es soll gezeigt werden, daß K größer ist als eine von $\varkappa$ und n unabhängige Konstante, nämlich $\frac{1}{2\sigma}$.

α) Ist $0<\varkappa\leq \frac{n}{\sigma}$, so wird $K \geq 1 - \frac{1}{\sigma}\,\frac{\sigma-1}{2} - \frac{1}{\sigma^2}\,\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2.3}$
$- \frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)(\sigma-3)}{2\cdot 3\cdot 4} - \ldots > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots = \frac{1}{2\sigma} > 0.$

β) Sei $\varkappa \geq \frac{n}{\sigma}$. Zunächst ist wegen $\frac{n}{\varkappa} \geq 1$: $K \geq \frac{1}{\sigma}\left(1 - \left(1 - \frac{\varkappa}{n}\right)^{\sigma}\right)$.

Nach der Formel $\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{y} \leq e^{-x}$ für $y \geq x \geq 0$ gilt wegen $n \geq \varkappa > 0$ $\left(1 - \frac{\varkappa}{n}\right)^{n} \leq e^{-\varkappa}$, also $\left(1 - \frac{\varkappa}{n}\right)^{n\cdot\frac{\sigma}{n}} \leq e^{-\sigma\frac{\varkappa}{n}}$. Also ist $K \geq \frac{1}{\sigma}\left(1 - e^{-\sigma\frac{\varkappa}{n}}\right)$.

Da $\frac{\varkappa}{n} \geq \frac{1}{\sigma}$, so ist $e^{-\sigma\frac{\varkappa}{n}} \leq e^{-1}$, also $1 - e^{-\sigma\frac{\varkappa}{n}} \geq 1 - e^{-1}$.

Damit können wir die obige Ungleichungskette fortsetzen:

$K \geq \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-1}) > \frac{1}{2\sigma}$, denn es gilt $e^{-1} < \frac{1}{2}$. Damit ist $K > \frac{1}{2\sigma}$ allgemein bewiesen.

Insgesamt gilt, daß der Exponent im Nenner der Abschätzung für $\sum_{\varkappa,n}$ nicht kleiner als $\frac{\mu}{4}n^{\sigma-1}$ ist für alle $\varkappa$ mit $0<\varkappa\leq n$.

Also ist $\sum_{\varkappa,n} \leq \frac{2^{\mu n^{\sigma}}}{n!}\left(\frac{2n}{2^{\frac{\mu}{4}n^{\sigma-1}}}\right)^{\varkappa}$. Damit steht die Abhängigkeit der Abschätzung von $\varkappa$ "ganz außen".

Um nun die Restsumme aller $\sum_{\varkappa,n}$ für $\varkappa\geq 3$ abzuschätzen, teilen wir sie (unter der Annahme, daß bereits $n>4\sigma$ ist) in zwei Teile:

$$\sum_{\varkappa=3}^{n} \sum_{\varkappa,n} = \sum_{\varkappa=3}^{4\sigma} \sum_{\varkappa,n} + \sum_{\varkappa=4\sigma+1}^{n} \sum_{\varkappa,n} .$$

Für $n\geq N_0(\sigma,\mu)$ ist wegen $\sigma>1$ dann $\dfrac{2n}{2^{\frac{\mu}{4}n^{\sigma-1}}}<\frac{1}{2}$, so daß der hintere Teil gleichmäßig in $\varkappa$ durch die geometrische Reihe abgeschätzt werden kann:

$$\sum_{\varkappa=4\sigma+1}^{n} \sum_{\varkappa,n} \leq \frac{2^{\mu n^{\sigma}}}{n!}\left(\frac{2n}{2^{\frac{\mu}{4}n^{\sigma-1}}}\right)^{4\sigma+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^{\mu n^{\sigma}}}{n!}\cdot\frac{2\cdot 2^{4\sigma+1}n^{4\sigma+1}}{2^{\mu\sigma n^{\sigma-1}}\cdot 2^{\frac{\mu}{4}n^{\sigma-1}}}$$

$= \dfrac{2^{\mu n^{\sigma}}}{n!}\cdot\dfrac{1}{2^{\mu\sigma n^{\sigma-1}}}\cdot o(1)$. Dieser hintere Teil ist also von kleinerer Größenordnung als der Term nach b).

Die endlich vielen Glieder der vorderen Summe sind einzeln ebenfalls von geringerer Größenordnung als der Term nach b). Denn nach der Anfangsabschätzung für $\sum_{\varkappa,n}$ ist

$\sum_{\varkappa,n} \leq \dfrac{2^{\mu n^{\sigma}}}{n!}\cdot\dfrac{(2n)^{\varkappa}}{2^{\varkappa\frac{\mu\sigma}{2}n^{\sigma-1}}(1+O(\frac{1}{n}))}$, wobei die O-Konstante von $\varkappa$ (und σ) abhängt. Da $\varkappa\geq 3$, so ist dies von kleinerer Größenordnung als der Term

$$\frac{2^{\mu n^{\sigma}}}{n!}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2^{\mu\sigma(\sigma-1)n^{\sigma-2}(1+(\sigma-2)O(\frac{1}{n}))}}{2^{\mu\sigma n^{\sigma-1}}}$$ nach b).

Insgesamt gilt also

<u>Satz 2:</u>

$$S(n,\langle\sigma,\mu\rangle) = \frac{2^{\mu n^{\sigma}}}{n!}\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2^{\mu\sigma(\sigma-1)n^{\sigma-2}(1+(\sigma-2)O(\frac{1}{n}))}}{2^{\mu\sigma n^{\sigma-1}}}\right)\cdot(1+o(1))$$

mit $O(\frac{1}{n}) = -\frac{2}{3n} + \frac{\sigma-3}{3n^2} + (\sigma-4)O(\frac{1}{n^3})$.

Im Sonderfall $\sigma=2$ ergibt sich damit

<u>Satz 3</u>: $S(n,\langle 2,\mu\rangle) = \frac{2^{\mu n^2}}{n!}\left(1 + \frac{n(n-1)\cdot 2^{2\mu}}{2\cdot 2^{2\mu n}}(1+o(1))\right).$

Natürlich ist es leicht möglich, diese Abschätzungen weiter zu verschärfen, indem man z.B. $\sum_{3,n}$ noch explizit berücksichtigt, und die Restabschätzung erst bei $\varkappa=4$ beginnen läßt. Aber auch die hier entwickelte Approximation ist schon enorm genau.

<u>Zahlenbeispiele</u>: Die exakten Zahlen sind mit Hilfe der Zykelindices $Z(\mathcal{T}_n^{\sigma})$ errechnet worden, welche schon früher[14] angegeben worden sind. Die relativen Fehler sind schon bei kleinen Argumenten gering. Im Fall $\sigma=3, \mu=2, n=4$ z.B. unterscheidet sich schon die erste Approximation erst in der 17. Stelle vom wahren Wert.

n	$S(n,\langle 2,1\rangle)$	$\sum_{0,n}$	$\sum_{0,n}+\sum_{1,n}$	$\frac{1}{S}\sum_{0,n}$	$\frac{1}{S}(\sum_{0,n}+\sum_{1,n})$
1	2	2	2	1	1
2	10	8	10	0,8000	1
3	104	$8{,}5333\cdot 10^{1}$	$1{,}0133\cdot 10^{2}$	0,8205	0,9743
4	3 044	$2{,}7307\cdot 10^{3}$	$2{,}9867\cdot 10^{3}$	0,8970	0,9812
5	291 968	$2{,}7962\cdot 10^{5}$	$2{,}9054\cdot 10^{5}$	0,9577	0,9951
6	96 928 992	$9{,}5450\cdot 10^{7}$	$9{,}6848\cdot 10^{7}$	0,9847	0,99916
7	112 282 908 928	$1{,}1170\cdot 10^{11}$	$1{,}1227\cdot 10^{11}$	0,9948	0,99991
8	458 297 100 061 728	$4{,}5751\cdot 10^{14}$	$4{,}5829\cdot 10^{14}$	0,9983	0,99998
9	$6{,}6666\cdot 10^{18}$	$6{,}6630\cdot 10^{18}$	$6{,}6666\cdot 10^{18}$	0,99946	1,00000
10	$3{,}4939\cdot 10^{23}$	$3{,}4933\cdot 10^{23}$	$3{,}4939\cdot 10^{23}$	0,99983	1,00000
11	$6{,}6603\cdot 10^{28}$	$6{,}6600\cdot 10^{28}$	$6{,}6603\cdot 10^{28}$	0,99995	1,00000
12	$4{,}6557\cdot 10^{34}$	$4{,}6557\cdot 10^{34}$	$4{,}6557\cdot 10^{34}$	1,00000	1,00000

n	$S(n,\langle 2,2\rangle)$ 1374	$\sum_{0,n}$	$\sum_{0,n}+\sum_{1,n}$	$\frac{1}{S}\sum_{0,n}$	$\frac{1}{S}(\sum_{0,n}+\sum_{1,n})$
1	4	4	4	1	1
2	136	128	136	0,9412	1
3	44 224	$4{,}3691\cdot 10^{4}$	$4{,}42027\cdot 10^{4}$	0,9879	0,9995
4	179 228 736	$1{,}7896\cdot 10^{8}$	$1{,}79219\cdot 10^{8}$	0,9985	0,9999
5	9 383 939 974 144	$9{,}3825\cdot 10^{12}$	$9{,}383931\cdot 10^{12}$	0,9998	1,0000

14) Vgl. [10], §3.

n	S(n,<2,3>) 1375	$\Sigma_{0,n}$	$\Sigma_{0,n} + \Sigma_{2,n}$
1	8	8	8
2	2 080	2 048	2 080
3	22 386 176	$2{,}23696 . 10^{7}$	$2{,}238601 . 10^{7}$
4	11 728 394 650 624	$1{,}172812 . 10^{13}$	$1{,}17283924 . 10^{13}$
5	314 824 619 911 446 167 552	$3{,}1482443 . 10^{20}$	$3{,}1482461984 . 10^{20}$

n	S(n,<3,1>) 662 ~~1376~~	$\Sigma_{0,n}$	$\Sigma_{0,n} + \Sigma_{2,n}$
1	2	2	2
2	136	128	136
3	22 377 984	$2{,}23696 . 10^{7}$	$2{,}237781 . 10^{7}$
4	768 614 354 122 719 232	$7{,}686143354 . 10^{17}$	$7{,}6861435358 . 10^{17}$
5	354 460 798 875 983 863 749 270 670 915 141 632	$3{,}54460798759775 . 10^{35}$	$3{,}5446079887598386$[illegible]$6 . 10^{35}$

n	S(n,<3,2>) 1376	$\Sigma_{0,n}$
1	4	4
2	32 896	32 768
3	3 002 399 885 885 440	$3{,}002399751 . 10^{15}$
4	14 178 431 955 039 103 827 204 744 901 417 762 816	$1{,}417843195503910 2644 . 10^{37}$

n	S(n,<4,1>) 1377	$\Sigma_{0,n}$
1	2	2
2	32 896	32 768
3	402 975 273 205 975 947 935 744	$4{,}02975273204876 . 10^{23}$

Die Aussage, welche die Sätze 2 und 3 für die mittlere Größe der Automorphismengruppe machen, ist klar: Die triviale Abschätzung $1 \leq g(n,\tau) \leq n!$ läßt sich jetzt wesentlich verschärfen. Mit $g(n,\tau) = \frac{n!\,S(n,\tau)}{Z(n,\tau)}$ ergibt sich wegen $Z(n,\tau)=2^{\mu n^{\sigma}}$ gerade g als der Wert der Klammer in den Sätzen 3 und 4; und dieser Wert ist asymptotisch gleich 1 und nähert sich numerisch sehr schnell diesem Wert.

§4. Auswertung der Polya-Formel für reine Relationssystmme mit $\tau = 1$

Das asymptotische Verhalten von $S(n,\tau)$ für $n\to\infty$ ist im Falle einstelliger Systeme (sog. Carnap-Systeme) von CARNAP[15] bereits elementar behandelt worden. CARNAP erhielt

Satz 4: $S(n,\langle 1,\mu\rangle) = \binom{n+2^{\mu}-1}{2^{\mu}-1}$.

Demnach gilt die asymptotische Gleichheit $S(n,\langle 1,\mu\rangle) \sim \frac{n^{2^{\mu}-1}}{(2^{\mu}-1)!}$.

Satz 4 ergibt sich auch in der hier entwickelten Theorie, da $\mathcal{T}_n^1 = \mathcal{T}_n$ ist und da bekanntlich[16] $Z(\mathcal{T}_n)\left[f_r/t\right] = \frac{1}{n!}(t(t+1)\ldots(t+n-1))$ ist. Für $t=2^{\mu}$ erhält man das Carnapsche Ergebnis.

Für die mittlere Größe der Ordnung der Automorphismengruppe gilt also

$$g(n,\tau) = \frac{n!\binom{n+2^{\mu}-1}{2^{\mu}-1}}{2^{\mu n}}.$$

Die größtmögliche Ordnung ist nach wie vor $\Gamma(n,\tau)=n!$, und diese wird z.B. angenommen für diejenigen Carnap-Systeme, welche aus lauter All-Prädikaten bestehen. Hingegen gibt es für hinreichend große n keine Carnap-Systeme mit der trivialen Automorphismengruppe. Vielmehr kann man für die kleinstmögliche Gruppenordnung $\gamma(n,\tau)$ die folgende asymptotische Abschätzung geben:

Satz 5: $\gamma(n,\tau) \sim \left(\frac{n}{2^{\mu}}\right)^{n+2^{\mu}-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2^{\mu}-1}}{e^{n}}$.

Beweis: Die Automorphismengruppen von Carnap-Systemen sind direkte Produkte von symmetrischen Gruppen, die über den sog. Q-Prädikaten $P_1,\ldots,P_{2^{\mu}}$ operieren, welche durch die Prädikate $R_1,\ldots,R_{\mu}$ induziert werden: Ein Q-Prädikat ist dabei definiert

15) Vgl. [4], S.138, T35-1d
16) Vgl. [12], S.71, (8)

durch eine Konjunktion $P_j := (\neg)R_1 \wedge \ldots \wedge (\neg)R_\mu$, wobei die 2^μ Möglichkeiten, die durch Klammern angedeuteten Negationen zu setzen oder nicht zu setzen, gerade zu den 2^μ Q-Prädikaten führen. Jede Zahl aus N liegt in genau einem Q-Prädikat. Haben die Q-Prädikate die Kardinalzahlen $q_1, \ldots, q_{2^\mu}$, so hat die Automorphismengruppe $\mathcal{G}$ die Ordnung $g = q_1! \ldots q_{2^\mu}!$, und diese Zahl fällt minimal aus, wenn alle q_j möglichst gleich groß sind. g ist ein sog. <u>Ordnungsmaß</u> (degree of order) im Sinne Carnaps[17]. Ist $n = r \cdot 2^\mu + s$ mit $0 \leq s < 2^\mu$, so gilt für die kleinste Gruppenordnung der

<u>Hilfssatz</u>: $\gamma(n,\tau) = (r!)^{2^\mu - s}((r+1)!)^s = (r!)^{2^\mu}(r+1)^s$.

Die "gleichmäßigste" Verteilung der n Individuen auf die 2^μ Basismengen besteht nämlich darin, $2^\mu - s$ Basismengen jeweils r Individuen, den restlichen s Basismengen aber r+1 Individuen zuzuteilen.

Nach der Stirlingschen Formel ergibt sich aber bei festem μ für $n \to \infty$ (und damit auch für $r \to \infty$) aus dem obigen Hilfssatz

$$\gamma(n,\tau) \sim \frac{r^{r \cdot 2^\mu}(2\pi r)^{\frac{1}{2} \cdot 2^\mu}}{e^{r \cdot 2^\mu}} \cdot r^s \sim \frac{r^n}{e^n}(2\pi r)^{2^{\mu-1}} e^s = \left(\frac{n-s}{2^\mu}\right)^{n+2^{\mu-1}} e^s \cdot \frac{(2\pi)^{2^{\mu-1}}}{e^n}$$

$$= \left(\frac{n}{2^\mu}\right)^{n+2^{\mu-1}} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n+2^{\mu-1}} e^s \cdot \frac{(2\pi)^{2^{\mu-1}}}{e^n} \sim \left(\frac{n}{2^\mu}\right)^{n+2^{\mu-1}} \cdot \frac{(2\pi)^{2^{\mu-1}}}{e^n}$$

Denn $(1 - \frac{s}{n})^n$ strebt gegen e^{-s}, und $(1 - \frac{s}{n})^{2^{\mu-1}}$ strebt, da s beschränkt ist, gegen 1.

---

17) Vgl. [3], S. 1-2.

Hiermit ergibt sich nun, daß bei der Abschätzung

$$\gamma(n,\tau) \leq g(n,\tau) \leq \Gamma(n,\tau) = n!$$

die Zahl $g(n,\tau)$ stets echt zwischen den beiden Randschranken liegt. Genauer, die Quotienten $\frac{g}{\gamma}$ und $\frac{\Gamma}{g}$ gehen gegen Unendlich, allerdings der erste wesentlich langsamer als der zweite. Man rechnet leicht aus, daß

$$\frac{g}{\gamma} \sim \frac{2^{\frac{\mu-1}{2}\cdot 2^{\mu}+\frac{1}{2}}}{(2^{\mu}-1)\,\pi^{2^{\mu-1}-\frac{1}{2}}} \cdot n^{\frac{1}{2}(2^{\mu}-1)} = \alpha_{\mu} \cdot n^{\frac{1}{2}(2^{\mu}-1)} =: \alpha_{\mu} f(n,\mu).$$

$$\frac{\Gamma}{g} \sim (2^{\mu}-1)!\,\frac{2^{\mu n}}{n^{2^{\mu}-1}} = \beta_{\mu} \cdot \frac{2^{\mu n}}{n^{2^{\mu}-1}} =: \beta_{\mu} \cdot F(n,\mu).$$

Durch Logarithmierung ergibt sich

$$\log \frac{g}{\gamma} = \log \alpha_{\mu} + \tfrac{1}{2}(2^{\mu}-1)\log n + o(1) = O(\log n), \text{ dagegen}$$

$$\log \frac{\Gamma}{g} = \log \beta_{\mu} + \mu(\log 2) \cdot n - (2^{\mu}-1)\log n + o(1) = O(n).$$

Natürlich ist ebenfalls $\log \frac{\Gamma}{\gamma} = O(n)$. Demnach liegt g tatsächlich wesentlich näher bei γ, als Γ bei γ liegt. Diese Tatsache kann man als einen schwachen Ersatz für das starke Ergebnis im Falle $\sigma > 1$ ansehen, nach dem dann g exakt in der Nähe von γ liegt.

<u>Zahlenbeispiele</u>: Die Zahlen $g(n,\tau) = \frac{n!\binom{n+2^{\mu}-1}{2^{\mu}-1}}{2^{\mu n}}$ und $\gamma(n,\tau) = (r!)^{2^{\mu}}(r+1)^{s}$ sowie $\Gamma(n,\tau) = n!$ und die Vergleichsfunktion $\alpha_{\mu} \cdot f(n,\mu)$ sind für einige Zahlenwerte bis zu $\mu = 5$ und $n = 1000$ berechnet worden. Der relative Fehler der asymptotischen Abschätzung geht wesentlich langsamer gegen 0 als bei den Zahlenbeispielen $\sigma > 1$, so schon Werte um $n = 10$ sehr genau waren.

Hiermit ergibt sich nun, daß bei der Abschätzung

$$\gamma(n,\tau)\leq g(n,\tau)\leq\Gamma(n,\tau)=n!$$

die Zahl $g(n,\tau)$ stets echt zwischen den beiden Randschranken liegt. Genauer, die Quotienten $\frac{g}{\gamma}$ und $\frac{\Gamma}{g}$ gehen gegen Unendlich, allerdings der erste wesentlich langsamer als der zweite. Man rechnet leicht aus, daß

$$\frac{g}{\gamma}\sim\frac{2^{\frac{\mu-1}{2}\cdot 2^{\mu}+\frac{1}{2}}}{(2^{\mu}-1)!\,\pi^{2^{\mu-1}-\frac{1}{2}}}\cdot n^{\frac{1}{2}(2^{\mu}-1)}=\alpha_{\mu}\cdot n^{\frac{1}{2}(2^{\mu}-1)}=:\alpha_{\mu}f(n,\mu).$$

$$\frac{\Gamma}{g}\sim(2^{\mu}-1)!\frac{2^{\mu n}}{n^{2^{\mu}-1}}=\beta_{\mu}\cdot\frac{2^{\mu n}}{n^{2^{\mu}-1}}=:\beta_{\mu}\cdot F(n,\mu).$$

Durch Logarithmierung ergibt sich

$\log\frac{g}{\gamma}=\log\alpha_{\mu}+\frac{1}{2}(2^{\mu}-1)\log n+o(1)=O(\log n)$, dagegen

$\log\frac{\Gamma}{g}=\log\beta_{\mu}+\mu(\log 2)\cdot n-(2^{\mu}-1)\log n+o(1)=O(n)$.

Natürlich ist ebenfalls $\log\frac{\Gamma}{\gamma}=O(n)$. Demnach liegt g tatsächlich wesentlich näher bei γ, als Γ bei γ liegt. Diese Tatsache kann man als einen schwachen Ersatz für das starke Ergebnis im Falle $\sigma>1$ ansehen, nach dem dann g exakt in der Nähe von γ liegt.

<u>Zahlenbeispiele</u>: Die Zahlen $g(n,\tau)=\frac{n!\binom{n+2^{\mu}-1}{2^{\mu}-1}}{2^{\mu n}}$ und $\gamma(n,\tau)=(r!)^{2^{\mu}}(r+1)^{s}$ sowie $\Gamma(n,\tau)=n!$ und die Vergleichsfunktion $\alpha_{\mu}\cdot f(n,\mu)$ sind für einige Zahlenwerte bis zu $\mu=5$ und $n=1000$ berechnet worden. Der relative Fehler der asymptotischen Abschätzung geht wesentlich langsamer gegen 0 als bei den Zahlenbeispielen $\sigma>1$, so schon Werte um $n=10$ sehr genau waren.

$(\mu;n)$	$\gamma(n,\tau)$	$g(n,\tau)$	$T'(n,\tau)$	$\frac{g}{\gamma}$	$\alpha_\mu \cdot f(n,\mu)$	Verhältnis
(1;5)	12	22,5	120	1,88	1,78	95,1
(1;10)	$1{,}44 . 10^{4}$	$3{,}90 . 10^{4}$	$3{,}63 . 10^{6}$	2,71	2,52	92,8
(1;20)	$1{,}32 . 10^{13}$	$4{,}87 . 10^{13}$	$2{,}43 . 10^{18}$	3,70	3,57	96,5
(1;50)	$2{,}41 . 10^{50}$	$1{,}38 . 10^{51}$	$3{,}04 . 10^{64}$	5,73	5,64	98,5
(1;100)	$9{,}25 . 10^{128}$	$7{,}44 . 10^{129}$	$9{,}33 . 10^{157}$	8,04	7,98	99,3
(1;200)	$8{,}71 . 10^{315}$	$9{,}87 . 10^{316}$	$7{,}89 . 10^{374}$	11,3	11,3	99,6
(1;500)	$1{,}05 . 10^{985}$	$1{,}87 . 10^{986}$	$1{,}22 . 10^{1134}$	17,9	17,8	99,8
(1;1000)	$1{,}49 . 10^{2268}$	$3{,}76 . 10^{2269}$	$4{,}02 . 10^{2567}$	25,3	25,2	99,9
(2;5)	2	6,56	120	3,28	1,89	57,7
(2;10)	144	990	$3{,}63 . 10^{6}$	6,87	5,35	77,9
(2;20)	$2{,}07 . 10^{8}$	$3{,}92 . 10^{9}$	$2{,}43 . 10^{18}$	18,9	15,2	80,2
(2;50)	$8{,}89 . 10^{36}$	5,62.1038	$3{,}04 . 10^{64}$	63,2	59,9	94,7
(2;100)	$5{,}79 . 10^{100}$	$1{,}03 . 10^{103}$	$9{,}33 . 10^{157}$	$1{,}77 . 10^{2}$	$1{,}69 . 10^{2}$	95,5
(2;200)	$8{,}56 . 10^{257}$	$4{,}20 . 10^{260}$	$7{,}89 . 10^{374}$	$4{,}90 . 10^{2}$	$4{,}79 . 10^{2}$	97,7
(2;500)	$1{,}26 . 10^{837}$	$2{,}40 . 10^{840}$	$1{,}22 . 10^{1134}$	$1{,}91 . 10^{3}$	$1{,}89 . 10^{3}$	99,1
(2;1000)	$1{,}09 . 10^{1970}$	$5{,}88 . 10^{1973}$	$4{,}02 . 10^{2567}$	$5{,}38 . 10^{3}$	$5{,}35 . 10^{3}$	99,5
(3;5)	1	2,90	120	2,90	0,365	12,6
(3;10)	4	65,9	$3{,}63 . 10^{6}$	16,5	4,13	25,1
(3;20)	$2{,}07 . 10^{4}$	$1{,}87 . 10^{6}$	$2{,}43 . 10^{18}$	90,4	46,8	51,8
(3;50)	$3{,}54 . 10^{24}$	$5{,}63 . 10^{27}$	$3{,}04 . 10^{64}$	$1{,}59 . 10^{3}$	$1{,}16 . 10^{3}$	72,6

Fortsetzung b.w.

$(\mu;n)$	$\gamma(n,\tau)$	$g(n,\tau)$	$\Gamma(n,\tau)$	$\frac{g}{\gamma}$	$\alpha_{\mu}\, f(n,\mu)$	Verhältnis
(3;100)	$7{,}91.10^{73}$	$1{,}19.10^{78}$	$9{,}33.10^{157}$	$1{,}51.10^{4}$	$1{,}31.10^{4}$	86,6
(3;200)	$3{,}35.10^{201}$	$5{,}54.10^{206}$	$7{,}89.10^{374}$	$1{,}66.10^{5}$	$1{,}48.10^{5}$	89,4
(3;500)	$1{,}52.10^{691}$	$5{,}70.10^{697}$	$1{,}22.10^{1134}$	$3{,}76.10^{6}$	$3{,}65.10^{6}$	97,1
(3;1000)	$1{,}58.10^{1674}$	$6{,}67.10^{1681}$	$4{,}02.10^{2567}$	$4{,}23.10^{7}$	$4{,}13.10^{7}$	97,8
(4;5)	1	1,77	120	1,77	$5{,}92.10^{-4}$	0,0
(4;10)	1	10,8	$3{,}63.10^{6}$	10,8	$1{,}07.10^{-1}$	1,0
(4;20)	16	$6{,}55.10^{3}$	$2{,}43.10^{18}$	$4{,}09.10^{2}$	$1{,}94.10^{1}$	4,7
(4;50)	$4{,}51.10^{13}$	$3{,}93.10^{18}$	$3{,}04.10^{64}$	$8{,}70.10^{4}$	$1{,}87.10^{4}$	21,5
(4;100)	$1{,}25.10^{49}$	$8{,}66.10^{55}$	$9{,}33.10^{157}$	$6{,}92.10^{6}$	$3{,}39.10^{6}$	49,0
(4;200)	$6{,}26.10^{147}$	$5{,}32.10^{156}$	$7{,}89.10^{374}$	$8{,}49.10^{8}$	$6{,}14.10^{8}$	72,2
(4;500)	$4{,}58.10^{548}$	$3{,}15.10^{560}$	$1{,}22.10^{1134}$	$6{,}87.10^{11}$	$5{,}92.10^{11}$	86,2
(4;1000)	$2{,}30.10^{1382}$	$2{,}63.10^{1396}$	$4{,}02.10^{2567}$	$1{,}15.10^{14}$	$1{,}07.10^{14}$	93,6
(5;5)	1	1,35	120	1,35	$4{,}26.10^{-14}$	0,0.
(5;10)	1	3,61	$3{,}63.10^{6}$	3,61	$1{,}98.10^{-9}$	0,0.
(5;20)	1	149	$2{,}43.10^{18}$	$1{,}49.10^{2}$	$9{,}15.10^{-5}$	0,0.
(5;50)	$2{,}62.10^{5}$	$5{,}35.10^{11}$	$3{,}04.10^{64}$	$2{,}04.10^{6}$	$1{,}35.10^{4}$	0,7
(5;100)	$2{,}04.10^{27}$	$3{,}15.10^{37}$	$9{,}33.10^{157}$	$1{,}55.10^{10}$	$6{,}25.10^{8}$	4,0
(5;200)	$1{,}57.10^{98}$	$2{,}03.10^{112}$	$7{,}89.10^{374}$	$1{,}30.10^{14}$	$2{,}90.10^{13}$	22,3
(5;500)	$6{,}46.10^{411}$	$4{,}86.10^{431}$	$1{,}22.10^{1134}$	$7{,}52.10^{19}$	$4{,}26.10^{19}$	56,7
(5;1000)	$2{,}10.10^{1097}$	$5{,}66.10^{1121}$	$4{,}02.10^{2567}$	$2{,}70.10^{24}$	$1{,}98.10^{24}$	73,2

Literatur

[1] de Bruijn, N.G., Generalization of Polya's fundamental theorem in enumerative combinatorial analysis. Indag. Math. 21(1959), 59-69.

[2] de Bruijn, N.G., Polya's theory of counting. In: Beckenbach (ed.), Applied combinatorial mathematics. New York-London-Sidney (Wiley) 1964, S. 144-184.

[3] Carnap, R., The concept of degree of order, 1952, vervielfältigtes Manuskript.

[4] Carnap, R,. Logical foundations of probability, Chicago (Univ.Chicago Press) 1950.

[5] Davis, R.L., The number of structures of finite relations. Proc.Am.Math.Soc. 4(1953), 486-495.

[6] Ehrenfeucht, A. und Mostowski, A., Models of axiomatic theories admitting automorphisms. Fund.Math. 43(1956), 50-68.

[7] Harary, F., The number of linear, directed, rooted and connected graphs. Trans.Am.Math.Soc. 78(1955), 445-463.

[8] Harary,F.,Note on an enumeration theorem of Davis and Slepian. Mich.J.Math. 3,149-153.

[9] Harary, F., Note on Carnap's relational asymptotic relative frequencies. Journ.Symb.Logic 23(1958), 257-260.

[10] Oberschelp, W., Kombinatorische Anzahlbestimmungen in Relationen. Erscheint in den Math.Annalen 1967.

[11] Polya, G. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math. 68(1937), 145-254.

[12] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis. New York (Wiley) 1958.

[13] Tarski, A., Contributions to the theory of models I, Indag.Math. 16(1954), 572-581.