4

Genocchi nos

1469

→ 144

JRAM 94 (1883) 203-232

Studien über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen.

(Von Herrn *J. Worpitzky.*)

Diejenigen Notizen über die Vorgeschichte des hier zu behandelnden Gegenstandes, welche ich voranschicke, beanspruchen keineswegs das Prädicat der Vollständigkeit. Sie dürften jedoch manchem Leser aus dem Grunde erwünscht sein, weil es bei der Zerstreutheit der einschlägigen Arbeiten viel Zeit und Mühe erfordert, das Material zusammenzutragen, ohne einige Sicherheit, Wesentliches nicht übersehen zu haben.

Es war *Jacob Bernoulli* in seiner „Ars conjectandi, Basileae. 1713" bei der Summation gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen auf gewisse Zahlen aufmerksam geworden, für welche zuerst *Moivre* in seinen „Miscellanea analytica. 1730" eine Form des Recursionsgesetzes fand, und deren allgemeinere Bedeutsamkeit *Euler* in seinen „Institutiones calculi differentialis. 1755" dadurch ins Licht stellte, dass er einfache Beziehungen zu ihnen in anderen analytischen Gebilden klarlegte, z. B. in den Ausdrücken für $\underset{z=0}{D^{2r-1}} \operatorname{tng} z$. — Die Werthe des letztgenannten Differentialquotienten für die verschiedenen r hat man sich in neuerer Zeit gewöhnt „*Euler*sche Zahlen" zu nennen, während man nach dem Vorgange von *Euler* die Benennung „*Bernoulli*sche Zahlen" für die von *J. Bernoulli* entdeckten beibehält. Ich werde mir erlauben, im Anschluss an die Bezeichnung in meinem Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, ausser den $\underset{z=0}{D^{2r-1}} \operatorname{tng} z = u_{2r}$ auch die $\underset{z=0}{D^{2r}} \sec z = u_{2r+1}$ als *Euler*sche Zahlen zu benennen, weil sie einerseits ebenfalls bei *Euler* vorkommen und andererseits mit jenen in enger Beziehung stehen, so wie sehr ähnlichen Relationen genügen, wie jene.

Die Werthe der 31 ersten *Bernoulli*schen Zahlen hat *Ohm* im 20. Bande dieses Journals, S. 11, aus den Rechnungen *Eulers* und *Rothes* zusammengestellt, diejenigen der 62 ersten *Bernoulli*schen Zahlen theilt *Adams* Bd. 85, p. 269 ff. mit. Die Anzahl der Recursionsformeln zu deren Berechnung ist allmählich stark angewachsen, da die meisten Relationen, in denen *Bernoulli*sche Zahlen auftreten, Anlass zur Vermehrung derselben bieten; neuerdings noch liegen Publicationen dieser Art von *Seidel*, *Radicke* und *Lucas* vor. — Meine Absicht ist nicht auf dasselbe Ziel gerichtet, sondern auf die Ableitung von independenten Ausdrücken für die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen, indem ich darunter solche Ausdrücke verstehe, welche jene Zahlen vermittelst der Operationen der gemeinen Rechnungsarten völlig darstellen, ohne hinterher noch die Auflösung von Gleichungen oder Determinanten zu verlangen. Es werden sich dabei nebenher auch Recursionsformeln ergeben; sollten neue unter ihnen vorkommen, so lege ich darauf kein Gewicht, sondern nur auf ihren Zusammenhang mit anderen Relationen, aus denen sie gerade entspringen. Wo mir ihr erster Entdecker bekannt ist, werde ich ihn angeben.

Die erste in obigem Sinne independente Formel scheint von *Laplace* gefunden zu sein (vergl. *Lacroix*: Traité des différences, Paris, 1800, p. 106), nämlich die Formel (75.) dieser Abhandlung. *Lacroix* leitet sie aus der Theorie der Differenzen ab; *Grunert* (Mathematische Abhandlungen, Altona, 1822, S. 69—93) reproducirt sie mit veränderter Ableitung, desgleichen der vierte Band des *Klügel*schen Wörterbuchs (S. 608), wo aber der Beweis vermittelst divergenter Reihen geführt wird. Dann bringt *Scherk* sie wieder in Erinnerung in seiner Abhandlung „Über einen allgemeinen, die *Bernoulli*schen Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck" vom Jahre 1829 (dieses Journal, Bd. 4, S. 299—304) und leitet die hier unter (88.) und (83.) für u_{2r} und u_{2r+1} aufgeführten Formeln ab, nachdem er bereits vier Jahre früher (Mathematische Abhandlungen, Berlin, 1825) die Secantencoefficienten u_{2r+1} independent dargestellt hatte. Einen anderen Beweis für die *Scherk*schen Formeln giebt 1846 *Schlömilch*, dieses Journ., Bd. 32, S. 360. Ferner sind mir noch bekannt geworden einige sehr complicirte independente Formeln für die *Bernoulli*schen Zahlen, welche *Eisenlohr* auf dem Wege der Induction gefunden hat (dieses Journ., 1844, Bd. 28, S. 193—212: Entwickelung der Functionsweise der *Bernoulli*schen Zahlen.) Sie gehören zur Gattung derjenigen Ausdrücke, welche sich aus den nachfolgenden beiden Formen (15.) und (16.) der *Bernoulli*schen Functionen in unbeschränkter Anzahl bilden lassen.

Von dieser Zeit an tritt ein neuer Gesichtspunkt für die Behandlung unseres Gegenstandes auf, indem *Raabe* diejenige einfachste algebraische Function, welche bei den ganzzahligen Werthen der Variabeln in die *Bernoulli*sche Summenformel übergeht, einer eingehenden Untersuchung unterwirft (Die *Jacob-Bernoulli*sche Function. Zürich. 1848.) und die gewonnenen Resultate in einer zweiten Abhandlung (Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die *Jacob-Bernoulli*sche Function. 1851. Dieses Journal. Bd. 42, S. 348—376.) wesentlich ergänzt. Hierauf stellte *Schlömilch* (im 1. Bande der Zeitschrift für Math. und Physik. 1856. S. 193) die *Bernoulli*schen Functionen als Specialwerthe von Differentialquotienten dar — bei uns die Formeln (27.) und (28.) — und leitete die wichtigsten Resultate der Untersuchungen *Raabes* mit höchster Eleganz aus diesen Ausdrücken ab. Auf die Ausdrücke für u_{2r} und u_{2r+1} von *Laplace* und *Scherk* kommt er aber dabei nicht zurück.

Seitdem hat die Literatur über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen, abgesehen von neuen Recursionsformeln und von Beziehungen zahlentheoretischen Charakters, meines Wissens keine wesentliche Bereicherung erfahren.

Wenn ich nun einen so vielfach behandelten Stoff wieder in die Hand nehme, so brauche ich mich wohl nicht zu entschuldigen, dass ich manches nicht Neue von neuem vorführe, dagegen anderes unerwähnt lasse, was nicht übergangen werden dürfte, wenn es sich um eine Generalbearbeitung unseres Gegenstandes handelte. Das Erstere wird jeder Leser, dem das Thema von vorneherein weniger nahe liegt, verlangen, um im Zusammenhange erhalten zu bleiben; auch ist es häufig grade der Zusammenhang zwischen den Einzelresultaten, auf den ich das Gewicht lege. Auf manches hier Uebergangene gedenke ich a. a. O. zurückzukommen.

1. Der Gedanke, von welchem sich *Raabe* bei der Creirung der *Bernoulli*schen Functionen leiten liess, ist — wie gesagt — dieser: die einfachste algebraische Function zu discutiren, welche für die ganzen positiven Argumente in eine Summe gleich hoher Potenzen der ganzen Zahlen nach ihrer natürlichen Folge übergeht.

Als Vorarbeit hierfür fand er vor die Erweiterung der *Bernoulli*schen Summationsformel auf die Summe der m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe mit der beliebigen Differenz h, welche auf Seite 70 des Traité des différences von *Lacroix* — unter Kürzung der Schreibweise — so lautet:

$$\Sigma x^m =$$

$$\frac{1}{(m+1)h}\left\{x^{m+1}-\tfrac{1}{2}(m+1)h.x^m+\binom{m+1}{2}\cdot B_1.h^2.x^{m-1}-\binom{m+1}{4}\cdot B_2.h^4.x^{m-3}+\cdots\right\}+\text{const.}$$

Es lag ihm somit ob, diese Formel unter der Substitution von $h=1$ so zu behandeln, wie man vom unbestimmten Integral zum bestimmten übergeht, und dabei die untere Grenze zweckmässig auszuwählen.

Er that dies so, dass die Function*)

$$(1.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = x^n-\tfrac{1}{2}n.x^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot B_1.x^{n-2}-\binom{n}{4}\cdot B_2.x^{n-4}+\binom{n}{6}\cdot B_3.x^{n-6}-\cdots$$

für $x=0$ verschwindet, indem er die Bestimmung traf, dass das letzte Glied dieses Ausdrucks dasjenige sein soll, welches entweder x^1 oder x^2 enthält.

Die *Bernoulli*schen Zahlen B_1, B_2, B_3, ... bezeichnet *Raabe* ebenso, wie es in (1.) geschehen ist, schreibt aber $B'(x)$ oder $B''(x)$ für unser $\mathfrak{B}(x, n):n$, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat**). *Schlömilch* schreibt***) $\varphi(x,n)$ für unser $\mathfrak{B}(x,n)$, worin ich hier nicht folge, um φ als allgemeines Functionszeichen frei zu behalten, und zugleich um durch das Zeichen $\mathfrak{B}$ an die Bedeutung der Function zu erinnern.

Die Form (1.) der Function $\mathfrak{B}(x,n)$ soll die *Raabesche Form* der *Bernoulli*schen Functionen heissen, trotz der aus praktischen Gründen (zuerst von *Schlömilch*) vorgenommenen Abänderung.

Sie setzt voraus, dass man ausserdem ein Mittel kenne, die *Bernoulli*schen Zahlen B_r zu berechnen, etwa die Recursionsformel:

$$(2.)\qquad \binom{2r+1}{1}\cdot B_r-\binom{2r+1}{3}\cdot B_{r-1}+\binom{2r+1}{5}\cdot B_{r-2}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+1}{2r-1}\cdot B_1+(-1)^r\cdot\frac{2r-1}{2} = 0,$$

durch welche das Bildungsgesetz der B_r von *Moivre*†) zuerst fixirt worden ist.

*) Zwei Jahre früher (1846) hat *Arndt* (Bd. 31 dieses Journals, S. 249: Entwickelung der Summe der n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen nach den Potenzen des Index vermittelst des *Taylor*schen Satzes.) diese Function ebenfalls dargestellt aber nicht discutirt.

**) Vergl.: *Raabe*, „Die *Jacob-Bernoulli*sche Function. Zürich. 1848“. und die Abhandlung vom Jahre 1851, dieses Journal Bd. 42, S. 348—367.

***) Zeitschrift für Math. und Phys. 1856. Bd. I, S. 193, und in seinem Compendium der höheren Analysis.

†) *Moivre.* Miscellanea analytica. 1730.

Die oben citirte *Lacroix*sche Formel für Σx^n lässt sich nun als eine bestimmte Summenformel so schreiben:

$$(3.)\qquad \sum_{z=x}^{z=x+r-1} z^{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\{\mathfrak{B}(x+r,n)-\mathfrak{B}(x,n)\}$$

und ergiebt für $x=0$:

$$(4.)\qquad 0^{n-1}+1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(r-1)^{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\mathfrak{B}(r,n)$$

in Uebereinstimmung mit der *Bernoulli*schen Summationsformel*).

Den ursprünglichen Weg der Ableitung obiger Formeln vermittelst der Summation von Differenzenreihen wollen wir hier nicht nachgehen, da er wenig Anlass zu neuen Bemerkungen bietet.

Die mit jenen Hülfsmitteln gewonnenen Resultate werden im Folgenden nirgendwo als Grundlage der Deduction dienen. Die Aufzählung der Formeln (1.) bis (4.) konnte aber nicht umgangen werden, um den Gegenstand der folgenden Untersuchungen und ihrer Resultate mit den früheren gehörig zu identificiren.

2. Die *Raabe*sche Form der *Bernoulli*schen Functionen $\mathfrak{B}(x,n)$ verdankt ihre Entstehung im Grunde der Entwickelung von Σx^m in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes.

Man kann auf einem ebenfalls ganz elementaren Wege noch andere Formen dadurch gewinnen, dass man x^n durch solche algebraische Functionen ausdrückt, welche sich leicht summiren lassen, sobald x die Reihe $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ \ldots$ durchläuft; z. B. durch Tieffunctionen, welche im oberen Index den Summanden x haben.

Wir wollen einige Ausdrücke dieser Art näher betrachten.

Zunächst is es klar, dass die n Constanten $\overset{n}{\alpha}_1,\ \overset{n}{\alpha}_2,\ \overset{n}{\alpha}_3,\ \ldots\ \overset{n}{\alpha}_n$ in geeigneter Weise bestimmt werden können, damit die Gleichung

$$(5.)\qquad x^n = \overset{n}{\alpha}_1\cdot\binom{x}{n}+\overset{n}{\alpha}_2\cdot\binom{x+1}{n}+\overset{n}{\alpha}_3\cdot\binom{x+2}{n}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n\cdot\binom{x+n-1}{n}$$

für jedes x gelte. Denn da beide Seiten dieser Gleichung durch x ohne Rest dividirt werden können, so enthält die Gleichung (5.), nach Potenzen von x geordnet, n Coefficienten, welche sämmtlich $=0$ sein müssen. Diese Bedingung ergiebt für die Bestimmung der n Zahlen $\overset{n}{\alpha}_r$ genau eben so viele simultane, einander nicht widersprechende und von einander unabhängige Gleichungen.

*) *Jacob Bernoulli.* Ars conjectandi. Basileae. 1713.

$$
(91.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x, n) = x^n - \binom{n}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^1}\right)\cdot B_1 . x^{n-2} + \binom{n}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot B_2 . x^{n-4} \\ \qquad - \binom{n}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\cdot B_3 . x^{n-6} + \binom{n}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{2^7}\right)\cdot B_4 . x^{n-8} - \dots \end{cases}
$$

wo aber, wenn $n = 2r$ eine *grade* Zahl ist, das letzte Glied dem hier angegebenen Bildungsgesetz nicht folgt, weil in (1.) das Glied $(-1)^{r-1} B_r . x^0$ fehlt; so dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}+x, 2r)$ mit dem Gliede

$$(-1)^r \cdot \binom{2r}{2r} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{2r-1}}\right) \cdot B_r$$

schliesst, wie es ja auch die Formel (45.) verlangt.

Für $x = -\frac{1}{4}$ ergeben sich hieraus in Verbindung mit (55.) und (52.) Relationen für u_{2r} oder B_r und für u_{2r+1}, welche aber kein grosses Interesse in Anspruch nehmen dürften, weil sie sich auch aus früher schon entwickelten Relationen leicht ableiten lassen und im Vergleich mit jenen weniger einfach sind.

13. Wir wollen uns noch mit den Zahlen $\overset{n}{\mathfrak{a}}_r$ etwas näher beschäftigen, um aus den Formeln des 9. Abschnitts ein nicht unwichtiges Resultat abzuleiten.

Es ist bereits in (72.) constatirt worden, dass $\overset{n}{a}_n = n!$ sei, weshalb nach (18.)

$$(92.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_n = 1$$

sein muss. Daher folgt aus (19.):

$$\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-1} = (n-1) . \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-1} + \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2} = (n-1) + \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2};$$

und durch Summation des Gleichungssystems, welches hieraus entsteht, wenn man n der Reihe nach durch $1, 2, 3, \dots, n$ ersetzt:

$$(93.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-1} = \binom{n}{2}.$$

Verfährt man in analoger Weise mit der aus (19.) folgenden Gleichung:

$$\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = (n-2) . \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2} + \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-3},$$

so ergiebt sich:

$$(94.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = 3\cdot\binom{n}{4} + \binom{n}{3}.$$

In ähnlicher Weise folgert man:

$$(95.)\quad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-3} = 15\cdot\binom{n}{6} + 10\cdot\binom{n}{5} + \binom{n}{4}.$$

$$(96.)\quad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-4} = 105\cdot\binom{n}{8} + 105\cdot\binom{n}{7} + 25\cdot\binom{n}{6} + \binom{n}{5}.$$

u. s. w.

oder bei einer etwas veränderten Zusammenfassung:

$$(97.)\quad \begin{cases} \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = 2\cdot\binom{n}{4} + \binom{n+1}{4}, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-3} = 6\cdot\binom{n}{6} + 8\cdot\binom{n+1}{6} + \binom{n+2}{6}, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-4} = 24\cdot\binom{n}{8} + 58\cdot\binom{n+1}{8} + 22\cdot\binom{n+2}{8} + \binom{n+3}{8}. \end{cases}$$

u. s. w.

Die Aufstellung des allgemeinen Gesetzes für die Bildungsweise von $\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-k}$ in dieser Form ist leicht. Wir sehen hier von ihr ab, weil sie uns keinen Nutzen bietet.

Betrachtet man nun den ersten Ausdruck (63.) für v_r, so erkennt man ohne weiteres, dass — nachdem mit r ausmultiplicirt ist — alle Summanden ganze Zahlen werden, so lange $r \leqq 8$ ist, weil sich dann der Nenner jedes Coefficienten der $\mathfrak{a}$ gegen einen Factor des Zählers hebt.

Macht man $r = 9$, so gilt dasselbe von allen einzelnen Summanden ausser dem drittletzten

$$\frac{9.2^3.1.3.5\ldots29}{16}\cdot\overset{17}{\mathfrak{a}}_{15},$$

welcher nur dann eine ganze Zahl ist, wenn 2 in

$$\overset{17}{\mathfrak{a}}_{15} = 3\cdot\binom{17}{4} + \binom{17}{3} = 4.17.15.7 + 8.17.5$$

aufgeht. Da dies zutrifft, so ist auch v_9 eine ganze Zahl.

Dass v_{10} bis v_{16} incl. ganze Zahlen sind, erhellt aus (63.) wieder unmittelbar, weil die Nenner der Coefficienten der $\mathfrak{a}$ sich gegen einen Factor des Zählers heben.

Damit v_{17} eine ganze Zahl sei, muss 2^{3} in $\overset{33}{\mathfrak{a}}_{31}$ aufgehen; was der Fall ist, weil aus (94.) folgt:

$$\overset{33}{\mathfrak{a}}_{31} = 3\cdot\binom{33}{4} + \binom{33}{3} = 8.33.31.15 + 16.11.31.$$

Für v_{18} bis v_{32} incl. bleibt dann wieder kein Bedenken.

Man erkennt, wenn man auf dem eingeschlagenen Wege weitergeht, dass es überhaupt nur darauf ankommt, ob $\overset{2r+1}{\mathfrak{a}}_{2r-1}$ für $r = 2^\nu$ durch $2^{\nu+1}$ theilbar ist.

Nun ist aber nach (94.)

$$\overset{2r+1}{\mathfrak{a}}_{2r-1} = \tfrac{1}{6}\cdot r(4r^2-1)(3r-1),$$

was für $r = 2^n$ in

$$2^{n-1}.\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\cdot(3.2^n-1)$$

übergeht; und die Division mit 2^{n-3} ergiebt eine ganze Zahl mit dem Theiler $2^2 = 4$.

Alle Summanden des Ausdrucks (63.), nachdem völlig ausmultiplicirt ist, werden ersichtlich grade Zahlen, mit Ausnahme des letzten, welcher eben so offenkundig ungrade ist. Daher ist v_r selbst ungrade.

Nimmt man noch hinzu, dass u_{2r} als eine ganze Zahl erkannt ist (Abschnitt 10.), so erhält man demnach den folgenden Lehrsatz:

Die Zahl

$$v_r = 2.(2^{2r}-1).B_r = \frac{r.u_{2r}}{2^{2r-2}}$$

ist ganz, ungrade und durch jeden ungraden Theiler von r theilbar. Die Zahl u_{2r} ist durch die $(2r-2-n)^{te}$ Potenz von 2, aber durch keine höhere theilbar, wenn 2^n die höchste Potenz von 2 bedeutet, welche in r aufgeht.

Die neun ersten Werthe von v_r sind:

~ 1469

$v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 3$, $v_4 = 17$, $v_5 = 5.31$, $v_6 = 3.691$, $v_7 = 7.127.43$,
= 155 = 2073
$v_8 = 257.3617$, $v_9 = 9.73.43867$.

Uebrigens lassen sich für die Zahlen v_r aus den bei uns angemerkten Recursionsformeln für B_r auch leicht Recursionsformeln aufstellen. Z. B. folgt, wenn man zu (40.) die Gleichung (38.) addirt, nachdem man in der letzteren r um 1 erniedrigt hat:

$$(98.)\quad v_r - \tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{2}\cdot v_{r-1} + \tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{4}\cdot v_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}.\tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{2r-2}\cdot v_1 + (-1)^r.r = 0;$$

und aus (41.) in Verbindung mit (39.) ergiebt sich:

$$(99.)\quad v_r - \tfrac{1}{3}\cdot\binom{2r}{2}\cdot v_{r-1} + \tfrac{1}{5}\cdot\binom{2r}{4}\cdot v_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}.\frac{1}{2r-1}\binom{2r}{2r-2}v_1 + (-1)^r = 0.$$

Die Zahlen u_{2r+1} sind sämmtlich ungrade, wie nun die Formel (89.) ohne weiteres zeigt, weil man sämmtliche Glieder dieser Formel mit Ausnahme des letzten durch 2 theilen kann.

Berlin, October 1882.