to be extended RLM 11 (1957) p 31 2491

ON A SEQUENCE GENERATED BY A SIEVING PROCESS (Summary)

Yosef David

In the sieve of Eratosthenes the multiples of the prime numbers are crossed out of the sequence of all positive integers. This process may also be described in the following way: Beginning from 2 every second number will be crossed out, then from 3 every third number, from 5 every fifth number and so on. In this process intermedian sequences will be built. The first sequence will be the sequence of all positive integers, the second one 2 and all odd integers, the third one 2, 3 and all integers prime to 2 and 3 and so on. I tried to investigate the order of crossing out by proceeding from such a sequence to the following sequence. I found that in the first sequence every second term will be crossed out, in the next one every third term, but afterwards every seventh and third term alternately, on the (arithmetical) average every fifth term. Concerning the fifth sequence there will be a period of 8 numbers in the order of crossing out, but again every seventh term on the average will be crossed out. It may be shown that in the n-th sequence every p_n-th term will be crossed out on the average from the preceding sequence (p_n is the n-th prime number), but the period will be $\prod_{\nu=1}^{n-1}(p_\nu-1)$, e. g. for 11 the period will be 2.4.6=48.

Dr. Jabotinsky of the Haifa Technion proposed to apply the the sieving process more regularly by crossing out in the intermedian sequences exactly every second, third, fifth term and so on without taking in account whether the remaining numbers will be prime or not. This year he published together with Prof. Erdös a paper in which they investigated two sequences: a) the sequence that will be got from the intermedian sequences by crossing out in the k-th sequence every k-th term; b) the sequence formed by crossing out every p_k-th term in the k-th sequence.

Regarding the first sequence they proved for the general term $a_n=n^2/\pi+O(n^{4/3})$.

I attacked the sequence in an entirely other, more elementary and more direct way, by investigating the function e(n), the number of terms smaller than n in this sequence.

p.27 2491

ונסמן ב $e(n)$. התחלת הסדרה המתקבלת על-ידי השיטה המתוארת למעלה היא:

1	2	~~3~~	4	~~5~~	6	~~7~~	8	~~9~~	10	~~11~~	12	~~13~~	14	~~15~~	16	~~17~~	18	~~19~~	20	~~21~~	22	~~23~~	24	~~25~~	26
	2		4		6		~~8~~		10		12		~~14~~		16		18		~~20~~		22		24		~~26~~
			4		6				10		12				~~16~~		18				22		24		
					6				10		12						18				22		~~24~~		

כלומר האברים הראשונים של הסדרה יהיו:

1, 2, 4, 6, 10, 12, 18, 22, 30,...

הנוסחה ל $e(n)$ תהיה לפי השיטה המתוארת:

$$e(n)=[\ldots[\tfrac{n}{2}]\tfrac{2}{3}]\tfrac{3}{4}]\ldots]\frac{\lceil e(n)/2\rceil}{\lceil e(n)/2\rceil+1}]+[\frac{e(n)}{2}] \qquad (1)$$

וזה הסבר הנוסחה: אחרי מחיקת כל מספר שני נשארים $[\frac{n}{2}]$ מספרים, אחרי מחיקת כל מספר שלישי מן הסדרה השניה נשארים $[[\frac{n}{2}]\frac{2}{3}]$ מספרים וכו'. יש להתקדם רק עד הסדרה ה $[\frac{e(n)}{2}+1]$, הואיל ובחלק השני עד n לא יהיה כבר מספר למחוק. הבטוי $[\frac{e(n)}{2}]$ באגף הימני של (1) בא במקום האברים הראשונים של כל סדרה שאין למחוק, אבל נכללו במחיקות בחשוב של $[[\ldots][\ldots]]$.

לו היינו מותרים על הסוגריים המרובעים בנוסחה (1) ובמקום זה היינו מחסרים מ n את השאריות הממוצעות (ממוצע חשבוני) המתקבלות בחלוק ב 2, 3, 4, 5,..., היינו מקבלים:

$$e(n)/2=n/\frac{e(n)}{2}-\frac{0,5+1+1,5+\ldots+e(n)/4}{e(n)/2}$$

$$(e(n))^2/4=n-(0,5+e(n)/4)e(n)/4$$

$$e(n)=4\sqrt{n}/\sqrt{5}+0(1)\approx 1,788\ldots\sqrt{n}+0(1)$$

לעומת הערך הנכון: $e(n)=\sqrt{\pi\cdot n}\approx 1,77\ldots\sqrt{n}$

מובן שאין הצדקה לקחת את השאריות הממוצעות. חקרתי את השאריות, בכדי למצוא חוקיות, אבל לשוא. אחרי שרשמתי לי דוגמאות מספריות מצאתי את החוקיות במקום אחר.

לפני שארשום דוגמא מספרית, נחזור לנוסחא (1):

$$\lceil\frac{e(n)}{2}\rceil=[\ldots[\tfrac{n}{2}]\tfrac{2}{3}]\ldots]\frac{\lceil e(n)/2\rceil}{\lceil e(n)/2\rceil+1}]$$

פרוש הסימן $\lceil a\rceil$: המספר השלם הקטן ביותר שהוא שוה או גדול מ a, למשל: $\lceil 2,8\rceil=3$. בחשוב פתיחת הסוגריים המרובעים נקבל את סדרת המספרים הבאה:

$$[n_{\lceil e(n)/2\rceil}/\lceil\frac{e(n)}{2}\rceil]\lceil\frac{e(n)}{2}\rceil=n_{\lceil e(n)/2\rceil}=x;\ldots;[\frac{n_3}{4}]4=n_4\ ;[\frac{n_2}{3}]3=n_3\ ;[\frac{n}{2}]2=n_2$$

כדי לחשב את x נבדיל בין שני מקרים:

א) $e(n)$ זוגי: $x=\frac{e(n)}{2}(\frac{e(n)}{2}+1)$

ב) $e(n)$ אי-זוגי: $x=(\frac{e(n)}{2}+\frac{1}{2})(\frac{e(n)}{2}+\frac{1}{2})$.

כלומר עלינו להפסיק בפעולת החשוב לפי הוראת הנוסחא (1), אם המספר בו