→ 2703

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 1, 1965

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ СРАВНЕНИЙ

АЛЕКСАНДЕР РОСА (ALEXANDER ROSA), ШТЕФАН ЗНАМ (ŠTEFAN ZNÁM),
Братислава

Профессору Йозефу Кауцкому к 70-летию со дня рождения

С задачами, решаемыми в этой работе, мы встретились на семинаре по теории графов при решении проблематики т. наз. циклических разложений полных графов с $m = 2n + 1$ вершинами на окружности с n ребрами.

Пусть задано натуральное число n. Обозначим $m = 2n + 1$.

Будем говорить, что множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $N \leq n$, является множеством типа (*), если выполняется

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \equiv 0 \pmod{m}, \tag{1}$$

$$x_i + x_j \not\equiv 0 \pmod{m} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Пустое множество будем считать множеством типа (*).

I. Обозначим $i' = m - i$. Очевидно, имеют место следующие утверждения:

(а) Если $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ — множество типа (*), то и $X' = \{x'_1, \ldots, x'_N\}$ — множество типа (*);

(б) Если X, Y — множества типа (*), $X \subset Y$, то и $Y - X$ является множеством типа (*);

(в) Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество типа (*), то в X содержится одно и только одно из чисел i, i' $(1 \leq i \leq 2n)$.

Лемма. *Если* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — *множества типа* (*), *то и* $C = A \cap B$ — *множество типа* (*)

Доказательство. Если $C = \emptyset$ (очевидно, тогда $B = A'$), то утверждение леммы выполнено. Пусть теперь $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$, $p \leq n$.

Обозначим $A - C = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.
Согласно (в) имеем $B - C = \{a'_{i_1}, a'_{i_2}, \ldots, a'_{i_k}\}$.
Так как по условию леммы A, B — множества типа (*), то получим

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{p} c_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{i_\nu} \equiv 0 \pmod m,$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{p} c_i + \sum_{\nu=1}^{k} a'_{i_\nu} \equiv 0 \pmod m.$$

После сложения (3) и (4) получим

$$2\sum_{i=1}^{p} c_i + \sum_{\nu=1}^{k} (a_{i_\nu} + a'_{i_\nu}) \equiv 0 \pmod m,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \equiv 0 \pmod m,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество типа (*). Обозначим через p $p_4^{(A)}, \ldots, p_{n-3}^{(A)}$ число всех отличных друг от друга подмножеств типа множества A соответственно с тремя, четырьмя, ..., $(n-3)$-мя элем тами.

Образуем сумму

$$\sum_{i=3}^{n-3} p_i^{(A)} = p_3^{(A)} + p_4^{(A)} + \ldots + p_{n-4}^{(A)} + p_{n-3}^{(A)} = k(A)\ .$$

Из (а) следует, что $k(A) = k(A')$.

Теорема. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — *множест типа* (*). *Тогда имеет место*: $k(A) = k(B)$.

Доказательство. Обозначим $C = A \cap B$. Если $C = \emptyset$, то $B = A$ и утверждение теоремы выполнено. Пусть $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ $p < n$. Обозначим

$$A - C = D = \{d_1, \ldots, d_r\},$$

и согласно (в) будет

$$B - C = D' = \{d'_1, \ldots, d'_r\}.$$

В новом обозначении будем иметь

$$A = \{c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_r\},$$
$$B = \{c_1, \ldots, c_p, d'_1, \ldots, d'_r\}.$$

Покажем теперь, что каждому подмножеству типа (*) множества A соответствует (хотя бы) одно подмножество типа (*) множества B, приче двум разным таким подмножествам множества A соответствуют две разны такие подмножества множества B. Так как множества A, B можно по менять местами, то тем самым наша теорема будет доказана.

Подмножества типа (*) множества A могут быть одного из четырех следующих видов:

$$\begin{aligned}
&\text{I. } X_A = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}\},\ 1 \leqq s \leqq p;\quad \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subset \{1,2,\dots,p\};\\
&\text{II. } X_A = \{d_{i_1}, \dots, d_{i_t}\},\ 1 \leqq t \leqq r;\quad \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subset \{1,2,\dots,r\};\\
&\text{III. } X_A = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}, d_1, \dots, d_r\},\ 1 \leqq s < p;\quad \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1,2,\dots,p\};\\
&\text{IV. } X_A = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}, d_{j_1}, \dots, d_{j_t}\},\ 1 \leqq s \leqq p,\ 1 \leqq t < r;\\
&\qquad\qquad \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subset \{1,2,\dots,p\},\\
&\qquad\qquad \{j_1, j_2, \dots, j_t\} \subset \{1,2,\dots,r\}.
\end{aligned}$$

Соответствующие подмножества множества B будут иметь в отдельных случаях следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\text{I. } X_B = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}\};\\
&\text{II. } X_B = \{d'_{i_1}, \dots, d'_{i_t}\};\\
&\text{III. } X_B = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}, d'_1, \dots, d'_r\};\\
&\text{IV. } X_B = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}, d'_{j_{t+1}}, \dots, d'_{j_r}\},
\end{aligned}$$

$$\{j_{t+1}, \dots, j_r\} = \{1,2,\dots,r\} - \{j_1, j_2, \dots, j_t\},$$

т.е. двум разным подмножествам типа (*) множества A в самом деле соответствуют два разных подмножества множества B. Из (а) вытекает, что в случаях I., II., III. множество X_B — типа (*). Покажем, что и в случае IV. множество X_B — типа (*).

Очевидно, имеет место (ввиду (б) и ввиду леммы):

$$\sum_{i=1}^{r} d'_i \equiv 0 \pmod m. \tag{5}$$

Поскольку $X_A = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}, d_{j_1}, \dots, d_{j_t}\}$ — типа (*), то

$$\sum_{\nu=1}^{s} c_{i_\nu} + \sum_{\nu=1}^{t} d_{j_\nu} \equiv 0 \pmod m. \tag{6}$$

После сложения (5) и (6) получим

$$\sum_{\nu=1}^{s} c_{i_\nu} + \sum_{\nu=1}^{t} (d_{j_\nu} + d'_{j_\nu}) + \sum_{\nu=t+1}^{r} d'_{j_\nu} \equiv 0 \pmod m, \tag{7}$$

где

$$\{j_{t+1}, \dots, j_r\} = \{1,2,\dots,r\} - \{j_1, j_2, \dots, j_t\}.$$

Из (7) следует

$$\sum_{\nu=1}^{s} c_{i_\nu} + \sum_{\nu=t+1}^{r} d'_{j_\nu} \equiv 0 \pmod m,$$

т.е. $X_B = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}, d'_{j_{t+1}}, \dots, d'_{j_r}\}$ — типа (*), ч. и т.д.

Доказанная теорема показывает, что сумма $\sum_{i=3}^{n-3} p_i^{(A)} = k(n)$ зависит только от n и не зависит от выбранного множества A.

Примечание 1. Если отказаться от условия (2), т.е. если не требовать, чтобы выполнялось

$$x_i + x_j \not\equiv 0 \pmod m,$$

то ни лемма, ни утверждение, аналогичное теореме, не будут справедливыми.

Выведем теперь двумя путями формулы для определения числа $Q($ разных множеств типа (*) с n элементами.

II. Обозначим через $p_r(s)$ количество разбиений числа r на отличные друг от друга числа, не превосходящие s. Каждое из этих разбиений отнесем к одному из двух классов. В первый класс включим разбиения, не содержащие число s; их количество равно, очевидно, $p_r(s-1)$. Во второй класс включим разбиения, содержащие число s; их количество равно количеству разбиений числа $r - s$ на отличные друг от друга числа, не превосходящие $s - 1$. Следовательно, для $p_r(s)$ получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$p_r(s) = p_r(s-1) + p_{r-s}(s-1),$$

$$\text{где } p_0(s) \underset{\text{def}}{=} 1, \qquad p_r(s) \underset{\text{def}}{=} 0 \qquad \text{для } r < 0.$$

Легко выводятся формулы, облегчающие вычисление $p_r(s)$:

$$p_r(s) = p_r(r) \quad \text{для} \quad s > r,$$

$$p_{\frac{1}{2}s(s+1)-r}(s) = p_r(s). \tag{8}$$

С помощью этих соотношений построена таблица 1.

Производящая функция для $p_r(s)$ (см. [1]) будет

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^s) = \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}s(s+1)} p_r(s)x^r.$$

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — типа (*). Сумму всех a_i, не превосходящих n, обозначим через a. Для $a_i > n$ мы можем писать $a_i = m - b_i$, где $b_i \leq$ Сумму всех b_i обозначим через b. Так как A — типа (*), то получаем соотношения:

$$a \equiv b \pmod m,$$

$$a + b = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Значит,

$$2a \equiv \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1) \pmod{m}. \tag{9}$$

При этом a должно удовлетворять условию

$$0 < a \leqq \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1). \tag{10}$$

Таблица 1

$p_r(s)$ r \ s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3		1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4			1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5			1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6			1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
7				2	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
8				1	3	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6
9				1	3	5	6	7	8	8	8	8	8	8	8
10				1	3	5	7	8	9	10	10	10	10	10	10
11					2	5	7	9	10	11	12	12	12	12	12
12					2	5	8	10	12	13	14	15	15	15	15
13					1	4	8	11	13	15	16	17	18	18	18
14					1	4	8	12	15	17	19	20	21	22	22
15					1	4	8	13	17	20	22	24	25	26	27
16						3	8	13	18	22	25	27	29	30	31
17						2	7	13	19	24	28	31	33	35	36
18						2	7	14	21	27	32	36	39	41	43
19						1	6	13	21	29	35	40	44	47	49
20						1	5	13	22	31	39	45	50	54	57
21						1	5	13	23	33	43	51	57	62	66
22							4	12	23	35	46	56	64	70	75
23							3	11	23	36	49	61	71	79	85
24							2	10	23	38	53	67	79	89	96
25							2	9	22	39	56	72	87	99	109
26							1	8	21	39	59	78	95	110	122
27							1	7	21	40	62	84	104	122	137
28							1	6	19	40	64	89	113	134	152
29								5	18	39	66	94	121	146	168
30								4	17	39	68	100	131	160	188
31								3	15	38	69	104	140	173	203
32								2	13	36	69	108	148	187	222
33								2	12	35	70	113	158	202	243
34								1	10	33	69	115	166	216	263
35								1	9	31	69	118	174	231	285

Легко доказать и обратное: a_i удовлетворяют (2), (9), (10), то они удовлетворяют и (1).

Пусть a удовлетворяет (9), (10). Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = a, k \leq n$, — некоторое разбиение a на отличные друг от друга числа, не превосходящие n. Каждому такому разбиению соответствует одно множество типа (*) с n элементами, причем разбиениям отличных друг от друга чисел a или же разным разбиениям одного и того же a соответствуют отличные друг от друга множества.

Следовательно, для $Q(n)$ получаем формулу

$$(11) \qquad Q(n) = \sum p_a(n),$$

где a пробегает все решения сравнения (9), удовлетворяющие неравенству (10).

Примечание 2. Соотношение (8) может быть использовано для упрощения вычислений $Q(n)$, а именно, в (11) следует $p_a(n)$ для $a > \frac{1}{4}n(n+1)$ заменить на $p_{\frac{1}{2}n(n+1)-a}(n)$.

III. Обозначим через $P_r(s)$ количество разных разбиений числа r на отличные друг от друга нечетные числа, не превосходящие s (s — нечетное). Покажем, что для $P_r(s)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$P_r(s) = P_r(s-2) + P_{r-s}(s-2)$$

(при этом $P_0(s) \underset{\text{def}}{=} 1$).

Каждое из разбиений числа r на отличные друг от друга нечетные числа, не превосходящие s, отнесем к одному из двух классов. В первый класс включим разбиения, в которых не фигурирует число s; таких разбиений $P_r(s-2)$. Во второй класс включим разбиения, в которых содержится число s; таких разбиений имеется ровно столько, сколько имеется разбиений числа $r-s$ на нечетные числа, не превосходящие $s-2$, т.е. $P_{r-s}(s-2)$.

Для составления таблицы чисел $P_r(s)$ используем еще следующие соотношения, справедливость которых легко проверяется:

$$P_r(s) = 0 \quad \text{для} \quad r > \left(\frac{s+1}{2}\right)^2,$$

$$P_r(s) = P_r(r) \quad \text{для} \quad s > r, r \text{ — нечетное},$$

$$P_r(s) = P_r(r-1) \quad \text{для} \quad s > r, r \text{ — четное},$$

$$(12) \qquad P_r(s) = P_{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 - r}(s).$$

В таблице 2 приведены первые значения $P_r(s)$.

Производящая функция для $P_r(s)$ будет

$$(1+x)(1+x^3)\dots(1+x^s)=\sum_{r=0}^{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2} P_r(s)x^r \quad (s \text{ — нечетное}).$$

Таблица 2

$P_r(s)$ $r \backslash s$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7			0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8			1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9			1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10				1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
11				1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12				1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
13				1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
14				0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
15				1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
16				1	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
17					2	3	4	4	5	5	5	5	5	5	5
18					1	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5
19					1	3	4	5	5	6	6	6	6	6	6
20					1	3	4	5	6	7	7	7	7	7	7
21					1	3	5	6	7	7	8	8	8	8	8
22					1	2	4	5	6	7	8	8	8	8	8
23					0	2	4	6	7	8	8	9	9	9	9
24					1	3	5	7	8	9	10	11	11	11	11
25					1	2	5	7	9	10	11	11	12	12	12
26						2	4	6	8	9	10	11	12	12	12
27						2	4	7	9	11	12	13	13	14	14
28						2	5	8	10	12	13	14	15	16	16
29						1	4	7	10	12	14	15	16	16	17
30						1	4	7	10	12	14	15	16	17	18
31						1	3	7	10	13	15	17	18	19	19
32						1	4	8	12	15	17	19	20	21	22
33						1	4	7	12	15	18	20	22	23	24
34						0	3	7	11	15	18	20	22	23	24
35						1	3	7	11	16	19	22	24	26	27

Вычислим теперь $Q(n)$ с помощью чисел $P_r(s)$.

Для множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ типа (*) имеет место:

$$\binom{n+1}{2} \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i \leqq \tfrac{1}{3}\binom{3n+1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = k \cdot m\,,$$

где

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{m} \leqq k \leqq \frac{\binom{3n+1}{2}}{3m}.$$

Если рассматривать теперь все отличные друг от друга множества типа (*) с n элементами, то k будет принимать значения от $q_0 = [\frac{1}{4}n] + 1$ до $q_1 = [\frac{1}{4}(3n-1)]$:

$$k_1 = q_0; \quad k_2 = q_0 + 1; \ldots; \quad k_q = q_1; \quad q = q_1 - q_0 + 1.$$

Легко проверяется, что при этом

$$k_i + k_{q-i+1} = n. \tag{13}$$

Образуем таблицу, в первой строке которой будут находиться числа от 1 до n, во второй — числа от $n+1$ до $2n$, записанные в обратном порядке, а в третьей — разности между числом во второй строке и лежащим над ним числом в первой строке:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n-2, & n-1, & n \\ 2n, & 2n-1, & 2n-2, & \ldots, & n+3, & n+2, & n+1 \\ 2n-1, & 2n-3, & 2n-5, & \ldots, & 5, & 3, & 1 \end{array}$$

Сумма чисел в первой строке равна $\binom{n+1}{2}$.

Обозначим $v_i = m \cdot k_i - \binom{n+1}{2}$, где $i = 1, \ldots, q$.

Если теперь заменить некоторые числа первой строки соответствующими (т.е. лежащими под ними) числами второй строки так, чтобы сумма чисел в первой строке увеличилась на v_i, то элементы первой строки будут образовать множество типа (*). Если это сделать всевозможными способами (и для всех $i = 1, \ldots, q$), то получим все отличные друг от друга множества типа (*) с n элементами. Поскольку в третьей строке фигурирует только нечетные числа, не превосходящие $2n-1$, то таких способов будет ровно столько, сколько имеется разных разбиений чисел v_i ($i = 1, \ldots, q$) на отличные друг от друга нечетные числа, не превосходящие $2n - 1$:

$$Q(n) = \sum_{i=1}^{q} P_{v_i}(2n - 1). \tag{14}$$

Примечание 3. С помощью соотношений (12), (13) вычисления по формуле (14) могут быть упрощены так, что числа $P_{v_i}(2n - 1)$ для $i > \frac{1}{2} q$ заменятся числами $P_{v_{q-i+1}}(2n - 1)$

IV. Приведем еще один способ нахождения числа $Q(n)$.

В части I. было доказано, что значение $k(n)$ зависит только от n и не зависит от выбранного множества A.

Выберем произвольное множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ типа (*). Из этого множества мы можем образовать $k(n)$ новых множеств типа (*) с n элементами следующим образом: Пусть $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ — одно из $k(n)$ подмножеств типа (*) множества A. Если в исходном множестве A заменить элементы этого подмножества элементами подмножества $\{a'_{i_1}, \ldots, a'_{i_k}\}$, где $a'_i = m - a_i$, и остальные элементы оставить неизменными, то получим новое множество A^+, которое будет (согласно I.) также множеством типа (*). Если этот прием проделать для всех $k(n)$ подмножеств типа (*) множества A, то получим систему $k(n)$ новых множеств типа (*) с n элементами. Присоединим еще к этой системе исходное множество A и множество $A' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$. Мы получим систему $\mathfrak{N}$ всех отличных друг от друга множеств типа (*) с n элементами.

Докажем последнее утверждение. Очевидно, все множества системы $\mathfrak{N}$ отличны друг от друга. Предположим, что существует множество $\overline{A}$ типа (*) с n элементами, не принадлежащее системе $\mathfrak{N}$. Образуем пересечение $A \cap \overline{A}$. Если $A \cap \overline{A} = \varnothing$, то $\overline{A} = A'$, что противоречит предположению о том, что $\overline{A}$ не принадлежит $\mathfrak{N}$. Если же $A \cap \overline{A} = A_1 = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, то A_1 является одним из $k(n)$ подмножеств типа (*) множества A. Но это означает, что мы получили множество $\overline{A}$ описанным выше образом из подмножества $A - A_1$, которое является (согласно части I.) также одним из $k(n)$ подмножеств типа (*) множества A. Мы получили противоречие, так как предполагали, что $\overline{A}$ не принадлежит $\mathfrak{N}$. Утверждение доказано.

Тем самым мы вывели соотношение

$$Q(n) = k(n) + 2,$$

исходя из которого мы можем записать формулу для вычисления $k(n)$:

$$k(n) = \sum p_a(n) - 2 \tag{15}$$

или

(16)
$$k(n) = \sum_{i=1}^{q} P_{v_i}(2n-1) - 2.$$

Please enter

В таблице 3 приведено несколько первых значений $Q(n)$ и $k(n)$.

Таблица 3

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Q(n)$	2	2	2	4	8	16	26	48	90	164	302	564	1058
$k(n)$	0	0	0	2	6	14	24	46	88	162	300	562	1056

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H., Wright E. M., *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1938.

2703

Поступило 26. 2. 1964.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied,
Bratislava

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Chemickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

A COMBINATORIAL PROBLEM OF THE THEORY OF CONGRUENCES

Alexander Rosa, Štefan Znám

Summary

Let n be a natural number, $m = 2n + 1$. The set $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \{1, \ldots, 2n\}$ $N \leqq n$ is said to be of the type (*), if (1) holds and if (2) holds for all $i, j = 1, \ldots, N$.

If $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ is of the type (*), then $p_i^{(A)}$ denotes the number of subsets of the type (*) with i elements, of the set A.

In part I the following theorem is proved:

The sum $\sum_{i=3}^{n-8} p_i^{(A)}$ does not depend on the choice of the set A, but only on the number of its elements (this sum is denoted by $k(n)$).

In part II $Q(n)$, the number of different sets of the type (*) with n elements is determined, with the help of the numbers $p\ (s)$, where $p\ (s)$ denotes the number of partitions of the number r into mutually different numbers not exceeding s (formula (11)).

In part III $Q(n)$ is determined with the help of the numbers $P_r(s)$, where $P_r(s)$ denotes the number of partitions of r into mutually different odd numbers not exceeding s (formula (14)).

In part IV the relation

$$Q(n) = k(n) + 2$$

is derived.

This problem has arisen from the problem of cyclic decompositions of the complete graph with $m = 2n + 1$ vertices into circuits with n edges each.