[SE2]

Please enter

seq	on page
2720	78
2736	93
2737	93
2739	
2740	97

2720
mention 1563
1809
254
2538
984

2457
2544
2736
1700
2737
2739-2740
1790
2793

LES CALCULS FORMELS

DES

SÉRIES DE FACTORIELLES

PAR

J. SER

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1933

CHAPITRE VII.

LES FONCTIONS EULÉRIENNES ET LE LOGARITHME INTÉGRAL.

1. Partons de la série

$$(1) \qquad \frac{1}{x+y+1} = \xi_1 + Y_1\xi_2 + Y_2\xi_3 + \dots.$$

La somme ordonnée par rapport à y est une fonction de $x+y+1$ puisque les variations de y et de $x+y+1$ sont les mêmes. On peut donc définir une fonction par la relation

$$(2) \qquad \frac{\Gamma'(x+y+1)}{\Gamma(x+y+1)} - \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \dots.$$

a. Intégrons de o à x nous obtenons

$$(3) \qquad \log\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)} = Y_1 L_0 + Y_2 L_1 + Y_3 L_2.$$

les fonctions L étant celles qui ont été définies (Chap. VI). En dérivant par rapport à y et faisant $y=0$ nous trouvons d'abord

$$(4) \qquad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = L_0 + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{3} + \dots$$

et ensuite en tenant compte des relations du Chapitre VI (5), et de la formule (25) du Chapitre IV,

$$(5) \qquad \log\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}} = x\left[1 - \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right] + \frac{1}{2} + \frac{L_0}{2} + \frac{L_1}{3} + \frac{L_2}{4} + \dots.$$

b. Intégrons cette fois de o à 1 par rapport à y.

$$(6) \qquad \log(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} + i_1\xi_1 + i_2\xi_2 + i_3\xi_3 + \dots.$$

En prenant maintenant la somme ordonnée des deux membres et en remplaçant la somme ordonnée de γ_n par l'expression en série de Newton [Chap. VI, (6)] nous obtenons un développement qui ne contient pas d'autre irrationnelle que c et 2π :

$$(7)\qquad \log\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x+1)} = \frac{C-1}{2} - \left(\frac{1}{2} - c\right)X_1 + X_2 + \frac{X_3}{2} + \frac{X_4}{3} + \dots$$
$$- i_2\xi_1 + i_3\xi_2 + i_4\xi_3 + \dots.$$

c. En intégrant de 0 à x l'équation (6) et en tenant compte de la relation (26) du Chapitre IV, on obtient une troisième forme qui met en évidence la partie asymptotique :

$$(8)\qquad \log\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log(x+1) - (x+1) - \varpi(x).$$

Le terme $\varpi(x)$ en effet tend vers zéro lorsque x grandit indéfiniment. En développant ce terme en série de facultes on trouve

$$(9)\qquad \varpi(x) = i_2 L_1 + i_3 L_2 + i_4 L_3 + \dots$$

ou encore, d'après les relations (14) du Chapitre VI,

$$\varpi(x) = \Sigma\, i_n(i_0\xi_n + i_1\xi_{n+1} + i_2\xi_{n+2} + \dots).$$

On peut remarquer que le coefficient de ξ_n est le même que celui de z^{n-1} dans

$$\frac{1}{\log(1-z)}\left[\frac{1}{\log(1-z)} - \frac{i_0}{z} - i_1\right]$$

et l'on obtient finalement

$$(10)\qquad \varpi(x) = \frac{1}{2}\Sigma\,[(2n-2)\,i_{n-1} - (2n-1)\,i_n]\,\xi_n$$
$$= -\frac{\xi_1}{12} - \frac{\xi_2}{720} - \frac{\xi_3}{720} - \frac{10\xi_5}{8064} - \frac{11\xi_6}{10080} - \frac{3499\xi_7}{3628800} - \dots$$

Le calcul des valeurs de Γ au moyen de cette formule n'est pas impraticable. Par exemple pour obtenir $\Gamma(10)$ nous formerons

$$\frac{19\log 10}{2} - 10 = 11,8745\,5848$$

$$\log\sqrt{2\pi} = 0,9189\,3853$$

$$\frac{1}{12}\xi_1 = 0,0083\,3333 \qquad 12,8018\,3024$$

$$\frac{1}{720}\xi_2 = 0,0000\,0210$$

$$\frac{1}{720}\xi_3 = 0,0000\,0049$$

$$\frac{10}{8064}\xi_5 = 0,0000\,0012 \qquad 0,0000\,0271$$

d'où la valeur.......	12,8018 2753
au lieu de...........	12,8018 2748

2. Posons

(11) $$\frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = u_0 + u_1 X_1 + u_2 X_2 + \dots.$$

Les polynomes u sont en relation évidente avec les polynomes de Laguerre. La relation de récurrence est facile à former en écrivant

$$\Delta_x \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = \left(1 - \frac{y}{x+2}\right)\frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = u_1 + u_2 X_1 + u_3 X_2 + \dots$$

et, par suite,

$$u_0 = y, \qquad u_1 = y - \frac{y^2}{2},$$

(12) $$(m+2)\,u_{m+1} + (y - 2m - 1)\,u_m - m\,u_{m-1} = 0.$$

D'autre part,

$$\Delta_x \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} - \int_0^y \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)}\,dy,$$

ce qui donne

(13) $$u_n = u'_n - u'_{n+1} - u'_{n-1} = u'_0 - u'_1 - \dots - u'_n.$$

Enfin on vérifie facilement que

(14) $$e^{\frac{hy}{h-1}} = 1 + u_0 h + u_1 h^2 + u_2 h^3 + \dots.$$

Si nous posons maintenant $\Omega u_n = c_n$ nous aurons

$$\Omega_y\, e^{\frac{hy}{h-1}} = \left(e^{\frac{h}{h-1}} - 1\right)\left(1 - e^{\frac{1}{h-1}}\right)^{-1},$$

ce qui conduit à la formule

$$(y + hc_0 + h^2 c_1 + \dots)\,(u_0(1) + h u_1(1) + h^2 u_2(1) + \dots)$$
$$= u_0 + h u_1 + h^2 u_2 + \dots,$$

et en dérivant par rapport à y et faisant $y = 0$

$$(1-h)(1 + hc'_0 + h^2 c'_1 + \dots) = u_0(1) + h u_1(1) + h^2 u_2(1) + \dots,$$

ce qui permet de déterminer de proche en proche les coefficients c'; d'ailleurs en prenant la somme ordonnée de (11) par rapport à y puis dérivant et faisant $y = 0$ on trouve

(15) $$\frac{\zeta(-x)}{\Gamma(x+1)} = c_0 + c'_1 X_1 + c'_2 X_2 + \dots,$$

la fonction ζ étant la fonction de Riemann.

3. Les différences de Γ s'expriment très simplement par la formule

$$\frac{\Delta_n\Gamma(x)}{\Gamma(x)} = 1 - X_1 x - X_2 x(1+x) - X_3 x(1+x)(2+x) - \dots.$$

Pour exprimer la somme ordonnée, posons

$$\Omega\Gamma(x+1) = \varphi\Gamma(x+1),$$

la fonction arbitraire φ satisfait à l'équation fonctionnelle simple

$$\varphi - (x+1)\varphi(x+1) = 1$$

et les coefficients de son développement en série de Newton sont déterminés par voie de récurrence :

(16) $$-\varphi_{n-1} + 2\varphi_n - \varphi_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1}}{n},$$

ce qui donne

(17) $$-\varphi = X_1 + X_2 + \frac{2}{3}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \frac{2}{15}X_5 + \dots.$$

On obtient une forme plus simple en formant $\varphi(x+2)$ dont les coefficients, d'après la formule (16), décroissent plus rapidement et l'on trouve après une légère modification

$$\frac{1}{x+1} - \frac{\Omega\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+3)} = 1 - \frac{X_1}{3} - \frac{X_2}{12} + \frac{X_3}{30} + \frac{31}{360}X_4 - \dots,$$

ce qui correspond pour h entier à la formule

$$1 + 1! + 2! + \dots + (h-1)! = (h+2)!\left[1 - \frac{H_1}{3} - \frac{H_2}{12} + \frac{H_3}{30} + \dots\right].$$

4. La fonction Θ relative à Γ se forme d'une manière analogue; poussons le calcul un peu loin; en mettant Θ sous la forme $g(x)\Gamma(x+1)$ nous aurons, d'après l'équation caractéristique habituelle de Θ,

(18) $$g(x) + (x+1)g(x+1) = 1$$

et les relations entre les coefficients de g supposée développée en série de Newton s'obtiennent par la récurrence

(19) $$m g_{m-1} - 2(m+1)g_m + (m+1)g_{m+1} = 0.$$

On peut remarquer tout de suite que les coefficients g_m sont de la forme $a_m g_0 - b_m$. Les suites a et b se forment très facilement au moyen du tableau des différences. Les nombres de la troisième colonne étant égaux à ceux de la première multipliés respectivement par $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, il suffit de connaître les trois premiers nombres de cette première colonne pour déterminer les trois premiers de la troisième et prolonger la première, et ce procédé se continue ainsi indéfiniment.

Les coefficients a correspondent d'ailleurs à

$$a(x) + (x+1)\,a(x+1) = 0,$$

équation qui est satisfaite par la suite $(-1)^n \frac{1}{n!}$ et ce sont par conséquent les nombres réciproques de cette suite et leurs premières valeurs s'obtiennent d'ailleurs facilement par le procédé indiqué plus haut ; on a ainsi la série

2720 :

$$1, \quad \frac{2}{1!}, \quad \frac{7}{2!}, \quad \frac{34}{3!}, \quad \frac{209}{4!}, \quad \frac{1546}{5!}, \quad \frac{13327}{6!}, \quad \frac{130922}{7!}, \quad \ldots$$

Les coefficients b correspondent à l'hypothèse $g_0 = 0$ et la fonction qui correspond à cette hypothèse prend les valeurs

$$(20) \qquad b(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m-1)} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m!}.$$

Voici la série des premiers nombres b :

2793 →

$$0, \quad \frac{1}{1!}, \quad \frac{4}{2!}, \quad \frac{20}{3!}, \quad \frac{124}{4!}, \quad \frac{920}{5!}, \quad \frac{7940}{6!}, \quad \frac{78040}{7!}.$$

2793

La suite des rapports $\frac{b}{a}$,

$$0,5\ldots, \quad 0,57\ldots, \quad \ldots \quad 0,5961\ldots$$

tend vers la constante bien connue

$$g_0 = 0,5963\ 4736\ 2323\ 194\ldots$$

5. La formule (5) du Chapitre VI s'étend au cas où m que nous avions considéré comme entier prend une valeur quelconque s. Il

suffit de faire les généralisations

$$n\,! = \Gamma(s+1), \qquad \xi_n = \frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(x+s+2)}.$$

On obtient ainsi

$$(21) \quad \frac{\Gamma(x+s+1)}{(x+1)^{s+1}\,\Gamma(x+1)} = \frac{\alpha_0(s)}{x+s+1} + \frac{(s+1)\,\alpha_1(s)}{(x+s+1)(x+s+2)} + \frac{(s+1)(s+2)\,\alpha_2(s)}{(x+s+1)(x+s+2)(x+s+3)} + \dots$$

et pour $x = 0$

$$(22) \quad \Gamma(s+1) = \frac{\alpha_0(s)}{s+1} + \frac{\alpha_1(s)}{s+2} + \frac{\alpha_2(s)}{s+3} + \dots = \int_0^1 \log\frac{1}{1-z}\,dz.$$

Si nous remplaçons les polynomes $\alpha(s)$ par leurs développements et effectuons les divisions, nous voyons que le deuxième membre de (22) peut se diviser en deux parties, l'une méromorphe F et l'autre entière E; la première a pour expression

$$(23) \qquad F(s+1) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{1\,!\,(s+2)} + \frac{1}{2\,!\,(s+3)} - \dots$$

comme cela résulte de

$$\alpha_n(-n-1) = (-1)^n\,\frac{1}{n\,!}.$$

On vérifie immédiatement d'après cette forme de F que

$$(24) \qquad F(s+2) = (s+1)\,F(s+1) - \frac{1}{e}.$$

On peut aussi écrire en développant les fractions en séries de facultés

$$e\,F(s+1) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \dots$$

ou encore

$$e\,F(s+1) = \Omega\,\frac{1}{\Gamma(s+2)} + e - 1.$$

Quant aux valeurs de F pour n entiers, elles sont de la forme

$$F(n+1) = n\,! - \frac{r_n}{e}.$$

Les nombres r

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 16, \quad 65, \quad \dots$$

sont, pris tous positivement, les réciproques de la suite $(-1)^n n!$ et le nombre e est la limite de $\frac{r_n}{n!}$.

La fonction réciproque de F a pour équation

$$(25)\qquad R = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} - \ldots$$

et l'on voit tout de suite que c'est la fonction

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}\,\Theta\,\frac{1}{\Gamma(s+2)}$$

et l'on en déduit l'équation fonctionnelle de R

$$(26)\qquad R(s+1) = 1 - (s+1)R(s).$$

Un calcul facile montre que l'on a aussi

$$e R = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{1!\,(s+2)} + \frac{1}{2!\,(s+3)} + \ldots = \int_0^1 t^s e^t\,dt.$$

6. Prenons maintenant l'équation de E. Les premiers coefficients calculés au moyen de $\alpha(s)$ sont déjà compliqués et le développement

$$(27)\qquad \frac{1}{2} + \frac{3s-1}{24} + \frac{s^2-s-2}{48} + \frac{15s^4 - 75s^3 + 110s - 48}{5760} + \ldots,$$

quoique convergent, se présente sous une forme difficilement utilisable.

Comme $E + F = \Gamma(s+1)$, on voit que E prend pour n la valeur r_n et par suite grandit rapidement comme il fallait s'y attendre.

L'équation fonctionnelle

$$E(s+2) = (s+1)E(s+1) + \frac{1}{e}$$

donnerait par la méthode des coefficients indéterminés la série de Newton

$$(28)\qquad e E(s+1) = -S_0 + 1!\,S_1 - 2!\,S_2 + 3!\,S_3 - \ldots,$$

qui est évidemment divergente, mais on peut écrire symboliquement

$$(29)\qquad e E(s+1) = \Theta\left[\frac{\Gamma(x-s)}{\Gamma(-s)}\right]$$

et cette notation n'est pas illusoire. Les coefficients u du développement

$$\frac{\Gamma(x-s)}{\Gamma(-s)} = u^0 - u_1 X_1 - u_2 X_2 - \dots$$

sont des polynomes en s constituant la première ligne du tableau fondamental où la première colonne est formée des polynomes $(-1)^{n-1} n!\, S_n$, de sorte qu'en appliquant la formule générale on obtient la série suivante dont nous n'écrivons que les premiers termes :

$$(30) \qquad e E(s) = \frac{1}{2} + \frac{1+s}{2^2} + \frac{1+s+s^2}{2^3} + \frac{1+2s+s^3}{2^4} + \frac{1+5s^2-2s^3+s^4}{2^5} + \frac{1+9s-15s^2+15s^3-5s^4+s^5}{2^6} + \dots$$

Il n'est pas impossible de retrouver dans ce développement les valeurs de E pour s entier. Dans ce cas en effet la première colonne du tableau des différences n'aura que $s+1$ termes; le terme général $u(s)$ sera une fonction linéaire de son indice n de degré s seulement et l'on pourra calculer la somme $\Sigma 2^{-n} u_n$ au moyen de la formule (Chap. IV, 4, *b*).

Par exemple pour $s = 2$ on aura

$$e E(3) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{13}{2^4} + \dots = \sum \frac{1+2X_1-X_2}{2^{n+1}} = 5.$$

Si l'on considère séparément chacun des polynomes u on vérifie ainsi qu'il prend pour la suite des nombres 0, 1, 2, ... des valeurs croissantes; il croît donc lui-même régulièrement (sauf peut-être accidentellement dans l'intervalle de deux nombres entiers). On peut admettre par suite que la série précédente croît régulièrement avec la variable ou tout au moins n'a pas de discontinuité, et comme elle est convergente pour les valeurs entières on peut la considérer comme toujours convergente.

7. D'ailleurs la formule (24) peut s'écrire en remplaçant $s+1$ par $-s$

$$(31) \qquad e E(-s) = \Theta_0 \frac{\Gamma(x-s-1)}{\Gamma(s+1)} = g(s),$$

$g(s)$ étant la fonction définie par la formule (18) à propos de $\Theta\Gamma(x+1)$ de sorte que nous aurons finalement

$$(32)\qquad \begin{aligned}\Gamma(s) = {} & \frac{1}{s} - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s+2} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s+3} + \ldots \\ & + \frac{1}{e}\left[g_0 - \frac{2g_0-1}{1!}\,s + \frac{7g_0-4}{2!}\,\frac{s(s-1)}{2!} \right.\\ & \left. - \frac{34g_0-20}{3!}\,\frac{s(s-1)(s-2)}{3!} + \ldots\right].\end{aligned}$$

La constante g_0 que nous avons définie par $\lim g_h = 0$ peut se calculer en faisant dans la formule qui précède $s=0$ et l'on a ainsi

$$(33)\qquad e^{-1}g_0 = -C + 1 - \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{3.3!} - \frac{1}{4.4!} + \ldots.$$

Voici les premières valeurs des coefficients g :

$g_1 = 0,1926\,4736.$	$g_6 = 0,0104\,4695.$
$g_2 = 0,0872\,1577.$	$g_7 = 0,0069\,4934.$
$g_3 = 0,0459\,6839.$	$g_8 = 0,0047\,4490.$
$g_4 = 0,0265\,2495.$	$g_9 = 0,0033\,1744.$
$g_5 = 0,0162\,7518.$	$g_{10} = 0,0023\,6511.$

On a d'ailleurs les relations évidentes

$$\Sigma g_n = 1, \qquad \sum \frac{g_n}{n+2} = 1 - g_0.$$

8. On peut généraliser ce qui précède et poser

$$(34)\qquad y^{-s}\Gamma(s+1) = \Phi(y, s) + \mathrm{H}(y, s).$$

La fonction Φ prend l'une des formes

$$(35)\qquad \begin{aligned} & \frac{y}{s+1} - \frac{y^2}{1!\,(s+2)} + \frac{y^3}{2!\,(s+3)} - \ldots \\ & = e^{-y}\left[\frac{y}{s+1} + \frac{y^2}{(s+1)(s+2)} + \ldots\right]\end{aligned}$$

et satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(36)\qquad \Phi(y, s+1) = \frac{s+1}{y}\,\Phi(y, s) - e^{-y}.$$

Celle de H est de même

$$(37)\qquad \mathrm{H}(y, s+1) = \frac{s+1}{y}\,\mathrm{H}(y, s) + e^{-y}$$

et correspond à la série divergente

$$(38)\qquad \omega H = -S_0 + 1!\frac{S_1}{x} - 2!\frac{S_2}{x^2} + \dots.$$

On peut la remplacer dans les mêmes conditions que nous l'avons fait pour E par une série convergente. Nous déterminerons d'abord une fonction $g(x, s)$ par l'équation fonctionnelle

$$g(x, s) = \frac{s}{x} g(x, s-1) + 1.$$

La série de Newton correspondante a des coefficients de la forme $a_n g_n + b_n$, les suites des coefficients a_n et b_n étant des polynomes en x qui sont respectivement les réciproques des deux suites

$$(-1)^n \frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n(n-1)} + \frac{x^3}{n(n-1)(n-2)} - \dots.$$

Nous aurons finalement par un calcul identique à celui du paragraphe précédent

$$(39)\quad x^{-s}\Gamma(s) = \frac{1}{s} - \frac{x^2}{1!}\frac{1}{s+1} + \frac{x^3}{2!}\frac{1}{s+2} - \dots$$
$$+ e^{-x}\left[g_0(x) + g_1(x)\frac{s}{1} + g_2(x)\frac{s(s-1)}{2!} + \dots\right].$$

	1.	x.	x^2.	x^3.	x^4.	x^5.	x^6.	x^7.
		1563	1809					
$1!\,a_1$	1	1						
$2!\,a_2$	2	4	1					
$3!\,a_3$	6	18	9	1				
$4!\,a_4$	24	96	72	16	1			
$5!\,a_5$	120	600	600	200	25	1		
$6!\,a_6$	720	4320	5400	2400	450	36	1	
$7!\,a_7$	5040	35280	52920	29400	7350	2646	49	1
$1!\,b_1$	—	1						
$2!\,b_2$		3	1					
$3!\,b_3$	—	11	8	1				
$4!\,b_4$	—	50	58	15	1			
$5!\,b_5$	—	274	444	177	24	1		
$6!\,b_6$	—	1764	3708	2016	416	35	1	
$7!\,b_7$	—	13068	33984	23544	6560	835	48	1

254 2538

Stirling

9. L'expression du coefficient $g_0(y)$ se forme facilement en faisant $s = 0$ dans l'équation précédente, et l'on a ainsi

$$-\frac{e^{-y}}{y} g_0(y) = \log y + C - \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2.2!} - \frac{y^3}{3.3!} + \dots.$$

Le second membre de cette équation définit le logarithme intégral $li(e^{-y})$ pour y positif.

Mais la méthode employée permet de considérer aussi ce logarithme intégral comme défini par la limite du rapport des polynomes b_h et a_h lorsque h croît indéfiniment.

La valeur de a_h est très simple

$$1 + hy + \frac{h(h-1)}{2!}\frac{y^2}{2!} + \frac{h(h-1)(h-2)}{3!}\frac{y^3}{3!} + \dots$$

mais celle de b est beaucoup plus compliquée. On peut remarquer que le coefficient de y a pour valeur limite

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h}\right) = \log h + C.$$

Le tableau ci-joint donne les sept premières valeurs numériques des coefficients de a et de b. Le rapport de b_7 à a_7 donne des valeurs assez approchées lorsque y est voisin de l'unité.

De la relation

$$g_0(y) + g_1(y) + g_2(y) + \dots = 1$$

on peut déduire une autre expression de $g_0(y)$.

Enfin, en formant la somme ordonnée de $y^{-s}\Gamma(s+1)$ et en définissant une fonction Ψ, généralisation de (17) par la relation

$$\Psi(s, y) = \frac{s+1}{y}\Psi(s+1, y) - 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& y^{-s} e^{y} \Gamma(s+1) \Psi(s, y) \\
& \quad = \log y - li(e^{y}) - y\,\frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)} + \frac{y}{1}\,\frac{1}{s+1} \\
& \qquad + \frac{y^2}{2}\,\frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{y^3}{3}\,\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \dots \\
& \qquad - \left[g_0(y)\frac{s}{1} + g_1(y)\frac{s(s+1)}{2!} + g_2(y)\frac{s(s+1)(s+2)}{3!} + \dots \right].
\end{aligned}$$

CHAPITRE VIII.

LES SÉRIES INTERMÉDIAIRES ET L'EXTRAPOLATION.

1. Les séries de facultés se développent immédiatement en séries de Newton. Examinons, au point de vue seulement formel, comment peut s'opérer le calcul inverse, c'est-à-dire la détermination des coefficients a de la série de facultés

$$(1) \qquad f(x) = a_0\xi_1 + a_1\xi_2 + a_2\xi_3 + \ldots$$

en fonction des coefficients f_n ou des valeurs $f(n)$.

En considérant la fonction réciproque de f, nous avons le système de relations en nombre infini

$$(2) \qquad f_n = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n+2} + \frac{a_2}{n+3} + \ldots$$

qui théoriquement peut conduire à un développement formel pour les inconnues a, mais il est plus simple d'introduire le symbole auxiliaire

$$\chi_n = \nabla_n \xi_{n+1}, \qquad \chi_0 = -\xi_1.$$

Nous pouvons poser

$$(3) \qquad \chi_n = \frac{\rho_1}{x+1} + \frac{\rho_2}{x+2} + \ldots + \frac{\rho_{n+1}}{x+n+1},$$

les coefficients ρ ayant pour valeur évidente

$$(4) \qquad \rho_p = \lim_{x=-p} (x+p)\chi_n.$$

Remarquons que ces $n+1$ coefficients de χ_n peuvent être déterminés par le système d'équations linéaires

$$0 = \frac{\mu_1}{1} - \frac{\mu_2}{2} + \ldots + \frac{\mu_{n+1}}{n+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \frac{\mu_1}{n} - \frac{\mu_2}{n-1} + \ldots + \frac{\mu_{n+1}}{2n}.$$

$$(-1)^{n+1}\frac{(n\,!)^2}{(2n+1)\,!} = \frac{\mu_1}{n+1} - \frac{\mu_2}{n+2} + \ldots + \frac{\mu_{n+1}}{2n+1},$$

qui est une simplification du système (2). Or si nous formons avec les combinaisons de ces équations (e_p désignant la $p^{\text{ième}}$)

$$e_1 - e_2,\quad e_1 - 2e_2 + e_3,\quad e_1 - 3e_2 + 3e_3 - e_4,\quad \ldots$$

un nouveau système, nous retombons sur celui que nous aurions obtenu en posant

$$(5)\qquad (-1)^n\chi_n = \mu_1\xi_1 + \mu_2\xi_2 + \ldots + \mu_{n+1}\xi_{n+1},$$

ce qui nous montre que les produits χ_n sont autoréciproques positivement pour n pair et négativement pour n impair. On peut donc les exprimer soit en fonction des inverses de $x+1$, $x+2$, ..., soit en fonction des facultés ξ_1, ξ_2, ..., les coefficients restant les mêmes avec un simple changement de signe pour n impair (Tableau I).

Les formules (3) et (4) donnent après un calcul facile

$$(6)\quad (-1)^n\chi_n = X_0\xi_1 + \frac{1\,!}{(0\,!)^2}(X_1 - X_2)\xi_2 + \frac{3\,!}{(1\,!)^2}(X_2 - 2X_3 + X_4)\xi_3 + \ldots,$$

les coefficients des polynomes en X étant les coefficients binomiaux, ou encore (Chap. II, a)

$$(7)\quad (-1)^n\chi_n = \sum_p \frac{n(1-n)\ldots(p-1-n)(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{(p\,!)^2}\,\xi_{p+1}$$

et inversement les ξ s'expriment en fonction des χ par la relation particulièrement simple (lignes du Tableau II)

$$(8)\qquad \xi_{n+1} = \Sigma_p(-1)^p(2p+1)\chi_p(n)\chi_p(x).$$

2. Sachant que les produits χ sont autoréciproques, on peut écrire immédiatement leur développement en série de Newton.

Par exemple

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{X_1}{2.3} + \frac{2X_2}{3.4} + \frac{3X_3}{4.5} + \dots,\\ -\chi_2 &= \qquad\quad \frac{1.2X_2}{3.4.5} + \frac{2.3X_3}{4.5.6} + \dots\\ \chi_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1.2.3X_3}{4.5.6.7} + \dots \end{aligned}\right.$$

On retrouve les coefficients relatifs à χ_p pris tous positivement et multipliés par $2p+1$ dans la $p^{\text{ième}}$ colonne du Tableau II.

La résolution de ce système, c'est-à-dire l'expression des X en séries linéaires de χ, s'obtient par un simple calcul direct

$$(10)\qquad X_p = \sum_n (-1)^{n+1} \frac{n\dots(p-1-n)(n+1)\dots(n+p)}{(p!)^2}(2n+1)\chi_n.$$

L'examen du groupe d'équations ainsi obtenu montre que les coefficients de χ_n pour un indice n sont à un facteur près ceux que nous avons rencontrés dans le développement de χ_n en ξ.

Les séries en χ qui correspondent aux X se présentent évidemment, pour les valeurs non entières de x, sous formes divergentes et le problème consiste à former des combinaisons linéaires utilisables.

3. Portons les valeurs de X sans nous inquiéter de leur convergence dans l'équation de Newton $f(x)$ et écrivons le résultat sous la forme

$$(11)\qquad f(x) = \varpi_0\chi_0 + 3\varpi_1\chi_1 + \dots + (2p+1)\varpi_p\chi_p + \dots$$

que nous appellerons, pour simplifier, série intermédiaire.

Par réciprocité nous aurons aussi

$$f_x = \varpi_0\chi_0 - 3\varpi_1\chi_1 + \dots + (-1)^p(2p+1)\varpi_p\chi_p + \dots$$

et inversement par analogie avec les formules (7) et (8) les coefficients ϖ s'exprimeront en fonction des coefficients f_n de la même manière que les χ en fonction des ξ (Tableau I).

Les coefficients ϖ jouissent d'ailleurs d'une propriété qui correspond à l'autoréciprocité des χ. Ce sont en effet des invariants de réciprocité au sens défini au Chapitre III. On peut le vérifier de la manière suivante. Formons la réciproque de $f(x)$ en changeant de signe les x d'indice impair, et revenons à la fonction primitive mais cette fois en remplaçant les coefficients f_n par les valeurs $f(n)$. Les nouveaux coefficients x ainsi modifiés seront égaux aux anciens ou de signe contraire suivant la parité de n.

Il est évident par suite qu'une fonction autoréciproque aura seulement des termes en χ d'indice pair ou d'indice impair.

D'autre part, il y a lieu de faire une remarque importante. Les coefficients particuliers relatifs à une faculté ξ_p d'indice p seront nuls à partir du $p^{\text{ième}}$. On pourrait d'ailleurs construire le groupe du Tableau II en partant de cette propriété. Ce tableau donne par ligne les valeurs des $(2n+1)x_n$ relatifs aux facultés.

4. Les calculs effectués sur les séries intermédiaires sont assez compliqués. La différence ordonnée s'effectue au moyen de la formule suivante :

$$(12)\qquad \Delta\chi_n = \frac{n}{2(2n+1)}\chi_{n+1} \; [illegible] \; \frac{1}{2}\chi_n \; [illegible] \; \frac{n-1}{2(2n-1)}\chi_{n-1}.$$

La sommation s'effectue directement sur les expressions des χ en ξ. Pour une valeur h très grande de la variable x, la somme ordonnée prend la valeur

$$(13)\qquad \chi(0) + \chi(1) + \ldots + \chi(h) = [illegible]$$

La dérivation s'obtient aussi en opérant sur les développements de facultés, mais les dérivées à l'origine ont seules une forme relativement simple. Les formules relatives à l'intégration présentent un certain intérêt entre les limites 0 et 1. Si nous posons

$$(14)\qquad \int_0^1 \chi_n\,dx = [illegible],$$

nous aurons immédiatement l'expression de ces valeurs en fonction des nombres l ou des nombres i par intégration de (7) ou de (9) :

$\lambda = -0{,}69315,$	$\lambda = 0{,}11778,$
$\lambda = -0{,}01355,$	$\lambda = 0{,}00984,$
$\lambda = -0{,}00236,$	$\lambda = 0{,}00135.$

La suite des nouveaux nombres ainsi obtenus est alternativement positive et négative et décroît peu rapidement.

On peut remarquer que les équations précédentes donnent pour les expressions de i en λ la même solution formelle que celle des polynomes X en χ. Par exemple

$$(15)\qquad -i_0 = -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 5\lambda_3 - 7\lambda_4 - \dots.$$

5. Comme exemple de série intermédiaire à forme simple, nous avons en particulier

$$(16)\qquad \frac{1}{x-n+1} = \chi_0(n)\chi_0(x) - 3\chi_1(n)\chi_1(x) - 5\chi_2(n)\chi_2(x) - \dots.$$

La réciproque par rapport à x pour les valeurs entières de n n'est autre que ξ_{n+1}, ce qui explique la formule (8).

En dérivant la série par rapport à n, nous obtenons

$$(17)\qquad \frac{1}{(x-1)^2} = -\chi_0 - \left(1+\frac{1}{2}\right)\chi_1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\chi_2 - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\chi_3 - \dots$$

et d'autres formules analogues. Par intégration nous aurons la série

$$(18)\qquad \log\left(1+\frac{1}{1-x}\right) = \lambda_1\chi_0 + 3\lambda_2\chi_1 + 5\lambda_3\chi_2 + \dots.$$

dont les coefficients λ sont ceux des formules (14).

Cherchons encore le développement en série intermédiaire de $(1-a)^x$ en posant

$$(1-a)^x = \varpi_0 - 3\varpi_1\chi_1 + 5\varpi_2\chi_2 - \dots.$$

En prenant la différence des deux membres et en utilisant la formule (12) on obtient par identification la relation de récurrence suivante entre les coefficients ϖ :

$$\frac{n}{2}\varpi_{n-1} - (2n+1)\left(\frac{1}{2}-a\right)\varpi_n + \frac{n+1}{2}\varpi_{n+1} = 0.$$

Elle se simplifie lorsque $a = 0$, 1 ou $\frac{1}{2}$:

$$(19)\qquad \begin{aligned} (1-1)^x &= -\chi_0 - 3\chi_1 - 5\chi_2 \dots \\ 1^x &= -\chi_0 + 3\chi_1 - 5\chi_2 + \dots \end{aligned}$$

$$(20)\qquad 2^{-x} = -\chi_0 - \frac{1}{2}5\chi_2 - \frac{1.3}{2.4}9\chi_4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}13\chi_6 - \dots.$$

Le deuxième membre, malgré sa forme, spéciale est convergent pour toutes les valeurs positives de x.

6. Le passage d'une série de facultés (1) à la série intermédiaire correspondante est immédiat et les formules (8) donnent des expressions à forme convergente pour les coefficients α.

Mais le problème inverse se présente sous un tout autre aspect et nous ne ferons ici que l'effleurer, de même que d'autres questions intéressantes qui se rattachent à l'étude des coefficients α, nous réservant d'y revenir.

La substitution directe dans le développement de $f(x)$ en série intermédiaire des valeurs de χ en ξ qui résultent des formules (6), donne pour les expressions des coefficients à des développements formels presque identiques à ceux des équations (10)

$$(21)\qquad a_p = \frac{1}{(p!)^2}\Sigma_n(-1)^n n(n-1)\ldots \\ \times (p-1-n)(p-1)\ldots(p-n)(2n+1)\alpha_n.$$

Ces formules sont divergentes comme le prouve l'exemple (17)

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 - \ldots,$$

puisque la formule qui précède nous donne par exemple pour la valeur de a_1

$$2\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 12\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \ldots = 3 - 5 + 7\ldots$$

Pour tourner la difficulté on pourra quelquefois faire usage du procédé indiqué au Chapitre IV pour le calcul des valeurs qui remplacent les séries alternées non convergentes tout au moins quand le deuxième membre de (22) se présente sous cette forme. Dans l'exemple cité on aura d'abord

$$a_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n(n+1)}(-1)^{n+1}(2n+1).$$

Or le deuxième membre représente

$$\Theta_0(2n+1) = 1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} - 1$$

et le calcul se continue de la même manière pour les autres coefficients. Le terme sous le signe Θ_n,

$$\frac{N_p - P_1 N_{p+1} + \ldots \pm N_{2p}}{n(n+1)},$$

a sa somme alternée réduite telle que la valeur cherchée pour α se réduit à celle du numérateur pour $n = 0$, c'est-à-dire à $\frac{1}{p}$.

7. On peut transformer les formules (21) en introduisant la nouvelle combinaison

$$(22) \qquad -r_n = \alpha_0 - 3\alpha_1 + \ldots + (-1)^n (2n+1)\alpha_n.$$

Le Tableau III donne les premières valeurs de r exprimées non en α, mais en $f(0)$, $f(1)$, ...

La valeur de α_0 est la limite de r lorsque n devient infini.

Les autres valeurs des α s'expriment aussi assez simplement en fonction des r

$$\frac{\alpha_1}{2} = r_0 - 2r_1 + 3r_2 - 4r_3 + \ldots,$$

$$-\frac{\alpha_2}{6} = \qquad r_1 - 4r_2 + 10r_3 - \ldots,$$

$$(23) \qquad \frac{(p!)^2}{(2p)!}\alpha_p = -\sum_{n=0}^{\infty} (N_{p-1} - P_1 N_p + \ldots - P_p N_{2p-1}) r_n$$

et l'on peut faire la remarque que les coefficients qui figurent dans les seconds membres relatifs à une valeur α d'indice p sont, au signe près, ceux que l'on trouve dans la colonne p du Tableau III multipliés par $\frac{2}{p}$.

Les développements ainsi obtenus pour les α sont toujours (sauf exceptionnellement pour les premiers indices) très rapidement divergents et l'on ne peut les utiliser sans artifice. On peut remarquer toutefois que l'on a

$$(24) \qquad \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} - \ldots = 2\left[r_0 - \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{3} - \ldots\right],$$

ce qui donne une expression de la somme des valeurs $f(0)$, $f(1)$, ... lorsque cette somme est convergente.

TABLEAU I.

$(-1)^n Z_n$ ……	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
Z_n ……	$\frac{1}{x+1}$	$\frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{x+4}$	$\frac{1}{x+5}$	$\frac{1}{x+6}$	$\frac{1}{x+7}$	$\frac{1}{x+8}$
W_n ……	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$
$(-1)^n W_n$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$n=0$ ……	-1							
1 ……	-1	2 4						
2 ……	-1	6 6	-6					
3 ……	-1	12 8	-30	20				
4 ……	-1	20	-90	140	-70			
5 ……	-1	30 10	-210	560	-630	252		
6 ……	-1	42 12	-420	1680	-3150	2772	-924	
7 ……	-1	56	-756	4200	-11550	16632	-12012	3432

2544 2457 984

TABLEAU II.

$-f_n$ ……	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
$-\xi_n$ ……	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7
$n=0$ ……	1							
1 ……	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2 ……	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$					
3 ……	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$				
4 ……	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{70}$			
5 ……	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{25}{84}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{252}$		
6 ……	$\frac{1}{7}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{25}{84}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{154}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{924}$	
7 ……	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{49}{264}$	$\frac{7}{88}$	$\frac{7}{312}$	$\frac{1}{264}$	$\frac{1}{3432}$

TABLEAU III.

r_n.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.
$n=0$...	1							
1...	-2	6						
2...	3	-24	30					
3...	-4	60	-180	140				
4...	5	-120	630	-1120	630			
5...	-6	210	-1680	5040	-6300	2772		
6...	7	-336	3780	-16800	34650	-33264	12012	
7...	-8	504	-7560	46200	-138600	216216	-168168	51480

2457 ✓

2738

Sequence 2736

Please enter these 2

TABLEAU IV.

$\frac{1}{2}S_h$.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.
$h=0$...	1							
1...	0	3						
2...	1	-5	10					
3...	0	10	-35	35				
4...	1	-14	91	-189	126			
5...	0	21	-189	651	-924	462		
6...	1	-27	351	-1749	4026	-4290	1716	
7...	0	36	-594	4026	-13299	22737	-19305	6435

1700

Sequence 2737

2739

Please enter 2

8. Pour un polynome, les différences d'ordre supérieur à son degré sont nulles; nous avons vu qu'il en était de même pour les facultés en ce qui concerne les coefficients α d'indice supérieur

à leur degré. Nous sommes donc amenés, par analogie avec les méthodes employées pour les approximations à l'aide des différences dans le cas des polynomes ou des fonctions assimilées, à utiliser les coefficients ϖ pour les calculs numériques relatifs aux séries de facultés, ou à d'autres séries susceptibles d'y être rattachées. Cette condition limite à l'avance le champ d'application des méthodes qui vont suivre.

Proposons-nous d'abord le problème simple de trouver la valeur approchée du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série dont nous connaissons seulement les n premiers. Si nous pouvons faire l'hypothèse que la série en question a l'allure numérique d'une série de facultés et notamment si les coefficients ϖ déterminés par les termes connus décroissent régulièrement, il est naturel d'appliquer la formule (11) dont le deuxième membre n'aura que $n+1$ termes. Nous aurons par conséquent comme expression de $f(n)$

$$f(n) = -c_0\varpi_0 + c_1\varpi_1 - \ldots + (-1)^{n-1} c_n \varpi_n,$$

les coefficients c étant ceux du Tableau II. On peut vérifier que c_n qui est égal à $(n!)^2 \frac{1}{(2n)!}$ décroît très rapidement avec n. Par conséquent on pourra négliger le produit $c_n\varpi_n$ qui renferme le seul terme inconnu et prendre pour valeur de $f(n)$ celle qui résultera de la suppression de ce terme dans la formule.

Comme exemple numérique prenons la fonction (17) et supposons connus seulement les huit premiers inverses des carrés des nombres entiers. La formule nous donnera le neuvième avec une erreur égale à

$$\varpi_8 \frac{8!}{16!} = \frac{1}{90} \frac{1}{12.870} = \frac{1}{1.158.300},$$

ce qui représente moins de la 1/1000e partie de la valeur du terme lui-même.

Toutefois l'hypothèse que les coefficients ϖ sont négligeables à partir d'un certain rang ne peut être utilisée indéfiniment, en particulier si la somme des valeurs $f(n)$ est convergente. Cette hypothèse en effet conduit à remplacer la fonction $f(x)$ par une série de facultés où le coefficient a_0 de ξ_1 n'est pas nul.

9. Supposons la fonction f exprimée en série intermédiaire et

formons la somme $S_h(0)$ au moyen de la formule (13). Le coefficient du terme transcendant est r_h. Pour que la somme S_h ait une limite, il faut évidemment que r_h tende vers zéro pour h infini. L'expression de S est alors

$$\frac{S_h}{2} = -3\varpi_1 - 5\varpi_2\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 7\varpi_3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

ou encore

$$\frac{S}{2} = r_0 - \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{3} - \dots$$

et nous retombons sur la formule (24).

Si nous ne connaissons que les h premières valeurs de $f(x)$, nous aurons une valeur approchée de la somme limite en négligeant les valeurs des r d'indice supérieur à $h - 1$. La somme ainsi obtenue sera naturellement différente de celle que nous aurait donné l'addition des h valeurs connues. En fait tout se passera comme si nous avions remplacé la fonction inconnue f par une série de facultés

$$a_1\xi_2 + a_2\xi_3 + \dots + a_h\xi_{h+1} \tag{25}$$

où le coefficient a serait nul, et les autres déterminés par les formules (23) limitées aux h premières valeurs des r.

On peut remarquer que si nous représentons f par une série intermédiaire où nous négligeons les coefficients ϖ d'indice supérieur à $h - 1$, elle a pour expression

$$-r_0\chi_2 - (r_1 - r_0)\chi_3 - \dots + (-1)^h(r_{h-1} - r_{h-2})\chi_{h-1}.$$

La formule (25) correspond à l'adjonction à la somme précédente du terme $(-1)^h r_{h-1}\chi_h$ qui a pour effet de rendre nul le coefficient de ξ_1.

Le résultat obtenu pour la valeur de S_h ne peut être amélioré que si l'on fait des hypothèses sur l'allure des coefficients inconnus r. En particulier si les premiers coefficients r connus sont constamment alternés et décroissants et que l'on admette qu'il continue toujours d'en être ainsi, on en déduit immédiatement que deux sommes S_h et S_{h-1} relatives à deux valeurs consécutives comprennent entre elles la somme limite S.

Reprenons la fonction (17) en supposant toujours connues seulement les huit premières valeurs numériques : nous obtiendrons au moyen des Tableaux III ou IV les valeurs

$$S_6 = 1,662\ldots \qquad S_7 = 1,631\ldots$$

et en remarquant que les S d'indice pair décroissent alors que les S d'indice impair croissent, nous pouvons présumer que la valeur limite (1,6449) est comprise entre les deux nombres précédents, résultat intéressant à côté de la faible approximation (1,527...) donnée par l'addition des huit termes connus.

La formule (24) donne une valeur approchée du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme en fonction des précédents par un calcul analogue à celui fait au paragraphe 8. Ici nous supposons non plus $w_n = 0$ mais $r_n = 0$ et dans l'exemple choisi le neuvième terme sera donné avec une erreur égale en valeur absolue à

$$\frac{r_8}{218790} = \frac{1}{9 \times 218790} = \frac{1}{1969110},$$

soit moins de la vingt-quatre millième partie du terme inconnu $\left(\frac{1}{81}\right)$.

Les formules (23) fournissent d'ailleurs les coefficients de la série de facultés qui correspond aux hypothèses faites. Pour la fonction (17) la coïncidence des nombres trouvés

$$a_1 = 0, \qquad \frac{2a_2}{2} = 36, \qquad \frac{3a_3}{2} = -594, \qquad \ldots$$

avec ceux de la huitième ligne du Tableau IV, est purement accidentelle et résulte de propriétés sur lesquelles il est inutile de s'étendre ici.

11. Les Tableaux III et IV donnent les premières valeurs de r et de S en fonction des seules valeurs $f(0)$, $f(1)$, ... Elles ont été calculées pour les r par la formule

$$(26) \qquad (-1)^{h+1} r_h = (H_0 - H_1) f(0) + \frac{3!}{1!^2}(H_1 - 2H_2 - H_3) f(1) + \ldots.$$

Celles des S se déduisent facilement des précédentes. Leur expression est d'ailleurs

$$(27) \qquad \frac{S_h}{2} = \sum_{n=0}^{h} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} f(n) \left[2\cos\pi x \, \frac{X_x - (n+1) X_{x+1} - \ldots}{x - 1} \right]_{x=h-1}.$$

Par exemple les coefficients de $f(1)$ ont pour valeurs

$$6\Omega\cos\pi x\,\frac{X_1-2X_2+X_3}{x+1}=\cos\pi h\left[H_1-H_2-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

Les nombres de ces tableaux croissent très vite et il convient de constater le caractère très spécial des méthodes exposées dans ce chapitre ou à la fin du chapitre précédent et qui rattache des approximations numériques au calcul de rapport ou de différence de très grands nombres.

12. Signalons sommairement, pour terminer, la transformation que l'on peut faire subir à l'expression de la somme S_h donnée par la formule (24) par l'application du procédé général qui résulte de la formule (7) du Chapitre IV.

Si nous définissons une suite de nombres ρ_n comme les réciproques de ceux de la suite $(-1)^n\frac{r_n}{n+1}$, les ρ s'exprimeront en fonction linéaire des valeurs $f(p)$ au moyen des coefficients du nouveau Tableau V et cela d'une manière très simple puisque dans la $p^{\text{ième}}$ colonne de ce tableau il n'y a que p coefficients non nuls qui sont ceux de la série de Newton correspondant à

$$\left[\frac{1}{(p-1)!}\right]^2 x(x-1)\ldots(x-p+1)(x-2)\ldots(x+p).$$

TABLEAU V.

ρ_n.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.	$f(8)$.
$n=0\ldots$	1								
$1\ldots$	0	3							
$2\ldots$	0	-2	10						
$3\ldots$	0	0	-15	35					
$4\ldots$	0	0	6	-84	126				
$5\ldots$	0	0	0	70	-420	462			
$6\ldots$	0	0	0	-90	540	-1980	1716		
$7\ldots$	0	0	0	0	-315	3465	-9009	6435	
$8\ldots$	0	0	0	0	0	-3080	20020	-40040	24310

1700 ✓

Seq 2740

Please enter 1

1790

TABLEAU VI.

σ_n.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.	$f(8)$.
$n = 0$...	1								
1...	1	$\frac{3}{2}$							
2...	1	1	$\frac{5}{2}$						
3...	1	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{35}{8}$					
4...	1	1	1	$-\frac{7}{8}$	$\frac{63}{8}$				
5...	1	1	1	$\frac{21}{16}$	$-\frac{84}{16}$	$\frac{231}{16}$			
6...	1	1	1	1	$\frac{51}{16}$	$-\frac{264}{16}$	$\frac{429}{16}$		
7...	1	1	1	1	$\frac{93}{128}$	$\frac{1353}{128}$	$-\frac{5577}{128}$	$\frac{6435}{128}$	
8...	1	1	1	1	1	$-\frac{187}{128}$	$\frac{4433}{128}$	$-\frac{13585}{128}$	$\frac{12155}{128}$

Les sommes S_h du Tableau IV seront remplacées par de nouvelles expressions

$$\sigma_h = \rho_0 + \frac{1}{2}\rho_1 + \ldots + \frac{1}{2^h}\rho_h$$

qui se calculeront au moyen du Tableau VI.

Si les valeurs trouvées pour les ρ sont toutes de même signe et décroissantes et si nous admettons qu'il doit continuer à en être ainsi, la série σ_h aura, pour h infini, une limite S comprise entre σ_h et $\sigma_h + \frac{\rho_h}{2^h}$.

Par exemple dans l'exemple cité en faisant $h = 7$ nous trouverons

$$1{,}643\ldots < S < 1{,}645\ldots$$

Au fond, la transformation se justifie par l'emploi conventionnel d'hypothèses telles que

$$r_{h+1} = r_{h+2} = \ldots = 0, \qquad \rho_h = \rho_{h+1} = \ldots = \text{const.},$$

$$\frac{r_h}{h+1} = -\frac{r_{h+1}}{h+2} = \ldots = \text{const.}, \qquad \rho_{h+1} = \rho_{h+2} = \ldots = 0.$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES