LES CALCULS FORMELS

DES

SÉRIES DE FACTORIELLES

PAR

J. SER

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1933

B
BROESE

€ 40,-
11857

LES CALCULS FORMELS

DES

SÉRIES DE FACTORIELLES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.
95770

LES CALCULS FORMELS

DES

SÉRIES DE FACTORIELLES

PAR

J. SER

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1933

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

AVERTISSEMENT.

Cet Ouvrage n'a rien de didactique. Ce n'est pas non plus un simple formulaire. Je me suis efforcé seulement d'exposer, non la théorie, mais la suite des calculs qui se présentent naturellement lorsque dans une fonction uniforme on se borne à donner à la variable des valeurs entières. Il n'est pas possible d'éviter de constater qu'une classe remarquable de fonctions est ainsi pratiquement déterminée si l'on admet que les fonctions périodiques, introduites logiquement par le calcul, peuvent être systématiquement éliminées dans le seul but de simplification. Ce postulat une fois accepté permet d'employer des méthodes élémentaires, d'une commode uniformité. J'ai d'ailleurs intentionnellement laissé de côté les considérations de convergence car il s'agissait ici, non pas de démontrer des propositions mais de les rattacher les unes aux autres d'une manière aussi étroite et aussi claire que possible.

J'ai introduit dès le troisième chapitre la notion de fonction réciproque. L'avantage correspond à celui que l'on retire de l'emploi de la fonction $f(-x)$ dans l'étude de la fonction $f(x)$. L'autoréciprocité est une sorte de parité.

Les coefficients des développements en séries des puissances de $\log(1-z)$ reviennent dans toutes les formules, surtout ceux des puissances 1 et -1. Ces derniers sont utilisés exclusivement dans les formules sommatoires et non les nombres de Bernoulli.

Le calcul des sommes alternées est fondé sur une opération spéciale et je ne sais si j'ai été précédé dans cette voie. J'y ai insisté dans la mesure où le permettaient la dimension et le but de cet Ouvrage. Les formules employées sont d'ailleurs plutôt des moyens d'interprétation des séries divergentes que des procédés de sommabilité.

La fonction Γ revient sans cesse dans les calculs en raison de la manière simple dont elle est rattachée à $\frac{1}{1+x}\cdot$ Dans le chapitre spécial qui lui est consacré se trouve une expression du reste de Stirling qui est convergente et se prête au calcul. J'ai donné aussi une nouvelle expression de la fonction entière qui figure dans le développement de $\Gamma(s)$. Elle est maniable et ne renferme qu'une seule transcendante qu'une généralisation facile rattache au logarithme intégral.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'un groupe de combinaisons des valeurs $f(0)$, $f(1)$, ... qui paraissent jouer dans les facultés un rôle analogue à celui des différences ordinaires dans les polynomes. Ils permettent au point de vue formel le passage d'une série de Newton à la série de facultés qui lui correspondrait. La solution complète est liée à l'emploi des séries divergentes. J'ai indiqué aussi très sommairement un procédé d'utilisation de ces coefficients pour le prolongement des termes de certaines séries et le calcul d'une valeur logique de leur somme. L'exemple indiqué — à la vérité très particulier — d'une somme obtenue avec quatre chiffres exacts pour une série dont on ne connaît que huit termes dont l'addition ne donne que le premier chiffre conforme, et cela sous des hypothèses admissibles, m'a paru de nature à attirer l'attention sur cette méthode. Je suis convaincu d'ailleurs que l'on peut espérer arriver par une étude approfondie de ces coefficients à reconnaître la nature d'une série de factorielles et peut-être à séparer les éléments entiers et fractionnaires.

Je n'ai pu éviter quelques notations nouvelles et je m'en excuse. Beaucoup trop de mots en mathématiques ont des sens différents et beaucoup trop d'idées très précises n'ont pas d'expressions suffisamment concises. Peut-être au fond n'y a-t-il de véritables progrès que ceux du symbolisme.

LES CALCULS FORMELS

DES

SÉRIES DE FACTORIELLES

CHAPITRE I.

LA SÉRIE DE NEWTON.

---

1. La série de factorielles la plus simple est la série entière appelée série de Newton pour laquelle nous adopterons la notation

$$(1) \qquad f_0 - f_1 X_1 - f_2 X_2 - \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty} f_n X_n,$$

$$X_n = \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)}{1.2\ldots n}, \qquad X_0 = -1.$$

Sur l'axe réel une série de ce genre est en général convergente au delà d'un point critique x_0. Elle définit une fonction $f(x)$ et inversement toute fonction $f(x)$ remplissant certaines conditions est développable en série de la forme (1).

D'autre part, il est évident que les coefficients f peuvent être calculés de proche en proche au moyen des valeurs que prend $f(x)$ pour une suite de $n+1$ entiers supérieurs à x_0. Nous ferons le calcul au moyen du tableau suivant.

Inscrivons dans une première colonne les valeurs $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ...; dans une seconde les différences $f(0)-f(1)$, $f(1)-f(2)$, ..., et ainsi de suite, le coefficient f_n^p de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne et de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne étant formé en retranchant dans la colonne précédente du coefficient de la même ligne celui de la ligne immédiatement au-dessous. Le tableau sera donc rectangulaire et non triangulaire comme on le construit quelquefois.

Nous aurons dans ces conditions

$$(2) \qquad f(x+p) = f_0^p - f_1^p X_1 - f_2^p X_2 - \ldots,$$

et si nous désignons par N, considéré comme fonction de n, le symbole désigné plus haut par X comme fonction de x, les coefficients de la série précédente satisferont aux relations

$$f_n^p = f(p) - N_1 f(p+1) - \ldots - N_n f(p+n),$$
$$f(n+p) = f_0^p - N_1 f_1^p - \ldots - N_n f_n^p,$$

dont nous utiliserons plus loin la symétrie.

2. Pour éviter toute ambiguïté, nous appellerons différence *ordonnée* et nous désignerons par le symbole Δf la fonction

$$f(x) - f(x+1) = f_1 - f_2 X_1 - f_3 X_2 - \ldots,$$

car on a évidemment

$$\Delta X_0 = 0, \qquad \Delta X_1 = X_0 = -1, \qquad \Delta X_n = X_{n-1}.$$

D'une manière générale, la différence ordonnée d'ordre n correspond à la série

$$(3) \qquad \Delta^n f = f_n - f_{n+1} X_1 - f_{n+2} X_2 - \ldots,$$

et l'on a d'ailleurs, y représentant un nombre entier ou non,

$$(4) \qquad f(x+y) = f(x) - Y_1 \Delta f - Y_2 \Delta^2 f - \ldots,$$

Y_1, Y_2, ... ayant le même sens que X_1, X_2, ...

La somme ordonnée sera définie comme opération inverse de la précédente, mais en ajoutant la condition *essentielle* que la fonction obtenue sera nulle pour $x = 0$. En adoptant le symbole Ω pour définir la somme ordonnée nous aurons

$$\Omega X_0 = \Omega(-1) = X_1, \qquad \Omega X_{n-1} = X_n,$$
$$\Omega f(x) = -(f_0 X_1 + f_1 X_2 + f_2 X_3 + \ldots).$$

Les sommes ordonnées successives se détermineront de la même manière mais en ajoutant chaque fois la condition supplémentaire que la somme ordonnée d'ordre n sera nulle pour $n-1$, de sorte que

(5) $$\Omega^n f(x) = -(f_0 X_n + f_1 X_{n+1} + f_2 X_{n+2} + \ldots)$$

sans ambiguïté.

Ces formules se modifient lorsque l'on considère les valeurs négatives de x. Posons

$$f(x) - f(x+1) = \Delta f(x) = \varphi(x),$$

et nous aurons

(3 *bis*) $$f(-x) - f(1-x) = \varphi(-x) = -\Delta f(1-x),$$

(5 *bis*) $$\Omega\varphi(-x) = f(1-x), \qquad \Omega\varphi[-(x+1)] = f(-x).$$

3. La suite des polynomes X peut être considérée comme formée des sommes ordonnées successives de X_0, c'est-à-dire de -1. Il est évident que le groupe des équations (5) permet d'exprimer les X au moins formellement par des développements où figurent linéairement les sommes ordonnées successives de la fonction arbitraire $f(x)$.

Le calcul se ramène à celui des coefficients de la fonction inverse (au sens habituel du mot) d'une fonction donnée, ces fonctions étant supposées développées toutes les deux en séries de puissances de la variable. Posons en effet

(6) $$-X_0 = g_0 f + g_1 \Omega f + g_2 \Omega^2 f + \ldots.$$

Les autres polynomes X s'exprimeront à l'aide des mêmes coefficients par des sommations ordonnées successives. Une simple substitution dans la série de Newton qui représente $f(x)$ donnera donc les relations entre les coefficients f et les coefficients inconnus g

(7) $$f_0 g_0 = 1, \qquad f_p g_0 + f_{p-1} g_1 + \ldots + f_0 g_p = 0.$$

Or cette série de relations est la même que celle que l'on obtient en posant

$$(f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots)(g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \ldots) = 1.$$

Faisons tout de suite une application très simple qui aura l'avantage d'introduire des constantes dont nous ferons un usage particulièrement fréquent. Considérons les fonctions (VI — 6)

$$\gamma_n = -\left(X_n + \frac{X_{n+1}}{2} + \frac{X_{n+2}}{3} + \dots\right)$$

qui sont les sommes ordonnées successives de $\frac{1}{1+x}$.

Les coefficients i_0, i_1, ... du développement

$$X_n = i_0\gamma_n + i_1\gamma_{n+1} + i_2\gamma_{n+2} + \dots$$

seront ceux de la série ordinaire

$$(8) \qquad \frac{z}{\log(1-z)} = i_0 + i_1 z + i_2 z^2 + \dots$$

inverse de la série qui exprime $\frac{\log(1-z)}{z}$ et dont les coefficients figurent dans γ. D'autre part on aura, d'après le système (7), les relations successives

$$i_0 = -1, \qquad i_{p-1} + \frac{i_{p-2}}{2} + \dots + \frac{i_0}{p} = 0$$

qui déterminent les coefficients i.

4. Les calculs du tableau fondamental s'appliquent à la détermination des coefficients de la fonction $f = x^p$ et l'on a ainsi

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^p &= -(p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots, \\ p_n &= 0^p - N_1 1^p - N_2 2^p - \dots - N_n n^p. \end{aligned} \right.$$

Lorsque p est un entier positif, le développement est limité et l'on obtient

$$\begin{aligned} x^2 &= X_1 - 2X_2, \\ x^3 &= X_1 - 6X_2 + 6X_3, \\ x^4 &= X_1 - 14X_2 + 36X_3 - 24X_4, \\ x^5 &= X_1 - 30X_2 + 150X_3 - 240X_4 + 120X_5, \quad \dots \end{aligned}$$

On peut remarquer que le coefficient p_h^k de X_h dans la ligne k peut se calculer par voie de récurrence au moyen de la relation

$$p_h^k = h(p_h^{k-1} - p_{h-1}^{k-1}),$$

cette même règle s'applique d'ailleurs aux puissances nulles ou négatives de x

$$1 = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{x} = X_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)X_2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X_3 + \ldots.$$

5. La résolution du système qui précède (9) nous donnerait l'expression des X en séries de puissances de x. Mais on arrive plus rapidement au résultat par la voie suivante qui introduit deux systèmes de coefficients, lesquels jouent un rôle important dans toutes les séries de factorielles.

Partons de la double égalité

$$(10)\quad \begin{aligned} 1-(1-z)^x &= zX_1 + z^2X_2 + z^3X_3 + \ldots \\ &= \frac{x}{1!}\log\frac{1}{1-z} - \frac{x^2}{2!}\log^2\frac{1}{1-z} + \frac{x^3}{3!}\log^3\frac{1}{1-z} - \ldots. \end{aligned}$$

Il suffit d'identifier les coefficients de z dans les deux derniers membres pour avoir le résultat cherché.

Inversement, nous aurons l'expression des puissances de x en série de Newton en identifiant les coefficients de t dans l'égalité

$$(11)\quad -\left(\frac{xt}{1!} + \frac{x^2t^2}{2!} + \frac{x^3t^3}{3!} + \ldots\right) = X_1(1-e^t) + X_2(1-e^t)^2 + X_3(1-e^t)^3 + \ldots.$$

6. Nous sommes donc conduits à étudier les coefficients de la série

$$(12)\quad \frac{1}{z^s}\log^s\frac{1}{1-z} = \alpha_0(s) + z\alpha_1(s) + z^2\alpha_2(s) + \ldots.$$

Il est très facile d'établir des relations linéaires, en nombre d'ailleurs illimité, entre les coefficients α.

Nous ne retiendrons que celle que l'on obtient en écrivant

$$\log^{s+1}\frac{1}{1-z} = \log^s\frac{1}{1-z}\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right)$$

et qui se traduit par

$$(13)\quad \alpha_n(s+1) = \frac{\alpha_0(s)}{n+1} + \frac{\alpha_1(s)}{n} + \ldots + \frac{\alpha_n(s)}{1},$$

ce que nous écrirons

$$\alpha_n = -\Omega\left(\frac{\alpha_0}{n+1} + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{2}\right),$$

relation qui permet d'exprimer les polynomes $\alpha(s)$ supposés développés en séries de Newton par voie de récurrence.

On obtient ainsi

$$\alpha_1 = \frac{S_1}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{S_1}{3} - \frac{S_2}{4},$$

$$\alpha_3 = \frac{S_1}{4} - \frac{S_2}{3} + \frac{S_3}{8}, \qquad \alpha_4 = \frac{S_1}{5} - \frac{13 S_2}{36} + \frac{S_3}{4} - \frac{S_4}{16},$$

$$\alpha_5 = \frac{S_1}{6} - \frac{11 S_2}{30} + \frac{17 S_3}{48} - \frac{S_4}{6} + \frac{S_5}{32}, \quad \ldots.$$

Les valeurs que prennent ces polynomes pour s entier, positif ou négatif, jouent un rôle important. En particulier pour $s = -1$, on retrouve les nombres i de la formule (8) au signe près.

Si nous posons maintenant

$$(14) \qquad t^{-s}(e^t - 1)^s = \beta_0(s) + t\beta_1(s) + t^2\beta_2(s) + \ldots,$$

nous aurons de même pour déterminer les séries β la relation de récurrence

$$\beta_n = -\Omega\left[\frac{\beta_0}{(n+1)!} + \frac{\beta_1}{n!} + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{2}\right],$$

d'où par suite

$$\beta_1 = \frac{S_1}{2}, \qquad \beta_2 = \frac{S_1}{6} - \frac{S_2}{4},$$

$$\beta_3 = \frac{S_1}{24} - \frac{S_2}{6} + \frac{S_3}{8}, \qquad \beta_4 = \frac{S_1}{120} - \frac{5 S_2}{72} + \frac{S_3}{8} - \frac{S_4}{16},$$

$$\beta_5 = \frac{S_1}{720} - \frac{S_2}{45} + \frac{7 S_3}{96} - \frac{S_4}{12} + \frac{S_5}{32}, \quad \ldots.$$

Nous retrouverons aussi les valeurs que prennent ces polynomes pour s entier; en particulier pour $s = -1$, ce sont les nombres de Bernoulli, à un facteur près.

La comparaison de la formule générale (16) indiquée plus loin avec celle déjà obtenue (9) nous donne une expression simple pour le cas de s entier

$$(15) \qquad \beta_{p-n}(n) = \frac{(-1)^n}{p!}\left[0^p - N_1 1^p - N_2 2^p - \ldots - N_n n^p\right].$$

En introduisant les coefficients α et β dans les formules (10) et (11) nous obtenons finalement les expressions générales importantes

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_n &= \alpha_{n-1}(1)\frac{x}{1!} - \alpha_{n-2}(2)\frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_0(n)\frac{x^n}{n!}, \\ \frac{x^n}{n!} &= \beta_{n-1}(1)X_1 - \beta_{n-2}(2)X_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\beta_0(n)X_n, \end{aligned} \right.$$

et les tableaux joints permettent de former les premières équations du groupe (16). En particulier

$$X_2 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}, \qquad X_3 = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

s.	α_0.	α_1.	α_2.	α_3.	α_4.	α_5.
-4.........	1	-2	$\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{720}$	0
-3.........	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{480}$
-2.........	1	-1	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{240}$
-1.........	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$
0.........	1	0	0	0	0	0
1.........	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
2.........	1	1	$\frac{11}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{137}{180}$	$\frac{7}{10}$
3.........	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{29}{15}$	$\frac{469}{240}$
4.........	1	2	$\frac{17}{6}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{967}{240}$	$\frac{89}{20}$

s.	β_0.	β_1.	β_2.	β_3.	β_4.	β_5.
-2.........	1	-1	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{720}$
-1.........	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{720}$	0
0.........	1	0	0	0	0	0
1.........	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$
2.........	1	1	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{360}$	$\frac{1}{40}$
3.........	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{43}{120}$	$\frac{23}{160}$
4.........	1	2	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{81}{80}$	$\frac{37}{72}$

7. La première des équations (16) montre que les dérivées des polynomes X dépendent des nombres α. On obtient facilement la formule générale en dérivant s fois l'égalité

$$e^{x \log(1-z)} = 1 - z X_1 - z^2 X_2 \ldots, \tag{17}$$

ce qui donne

$$(-1)^{s-1} \log^s \frac{1}{1-z} (1 - z X_1 - z^2 X_2 - \ldots) = z X_1^{(s)} + z^2 X_2^{(s)} + \ldots$$

et l'on a par suite l'expression de la dérivée d'ordre s de X en série de Newton

$$(-1)^{s-1} X_n^{(s)} = \alpha_{n-s}(s) - \alpha_{n-s-1} X_1 - \ldots - \alpha_0(s) X_{n-s}. \tag{18}$$

On peut résoudre le système qui précède et exprimer inversement X_n en fonction des dérivées $X^{(s)}$. Pour y parvenir rapidement, on peut remarquer que, dans les équations de ce système, les coefficients figurent de la même manière que dans les équations du type (6) et que par conséquent ces coefficients et ceux du système des solutions correspondent à deux fonctions inverses, en l'espèce

$$z^{-s} \log^s \frac{1}{1-z}, \qquad z^s \log^{-s} \frac{1}{1-z},$$

de sorte que nous aurons

$$(-1)^s X_n = \alpha_n(-s) X_s^{(s)} + \alpha_{n-1}(-s) X_{s+1}^{(s)} + \ldots + \alpha_0(-s) X_{n+s}^{(s)}. \tag{18 bis}$$

En particulier pour $s = 1$

$$\begin{aligned} X'_n &= \frac{1}{n} - \frac{X_1}{n-1} - \frac{X_2}{n-2} - \ldots - \frac{X_{n-1}}{1} \\ &= \frac{1}{n} + \Omega \frac{X_0}{n-1} + \Omega^2 \frac{X_0}{n-2} + \ldots + \Omega^{n-1} X_0, \\ X_{n-1} &= i_{n-1} X'_1 + i_{n-2} X'_2 + \ldots + i_0 X'_n, \end{aligned}$$

les coefficients i étant ceux de (8).

8. La dérivée de $f(x)$ a donc pour expression

$$f'_x = -\left[f_1 + \frac{f_2}{2} + \frac{f_3}{2} + \ldots\right] + \left[f_2 + \frac{f_3}{2} + \frac{f_4}{3} + \ldots\right] X_1 + \ldots. \tag{19}$$

Quant aux valeurs des dérivées successives à l'origine, elles s'expriment facilement au moyen des nombres α pour s positif

$$
(20)\qquad \left\{\begin{aligned}
-f'_0 &= f_1 + \frac{f_2}{2} + \frac{f_3}{2} + \frac{f_2}{4} + \ldots,\\
f''_0 &= \phantom{f_1 + {}} f_2 + f_3 + \frac{11}{12} f_4 + \ldots,\\
-f'''_0 &= \phantom{f_1 + f_2 + {}} f_3 + \frac{3}{2} f_4 + \ldots
\end{aligned}\right.
$$

et inversement, les coefficients f s'expriment en fonction des dérivées à l'origine au moyen des nombres β

$$
(20\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}
-f_1 &= f'_0 + \frac{1}{2} f''_0 + \frac{1}{6} f'''_0 + \frac{1}{24} f^{\text{IV}}_0 + \ldots,\\
f_2 &= \phantom{f'_0 + {}} f''_0 + f'''_0 + \frac{7}{12} f^{\text{IV}}_0 + \ldots,\\
-f_3 &= \phantom{f'_0 + f''_0 + {}} f'''_0 + \frac{3}{2} f^{\text{IV}}_0 + \ldots.
\end{aligned}\right.
$$

Comme application simple prenons le développement

$$
(21)\qquad \frac{1}{x+y+1} = \xi_1 - \xi_2 Y_1 - \xi_3 Y_2 - \ldots,
$$

où l'on a posé

$$
(22)\qquad \xi_n = \frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.
$$

On obtient immédiatement

$$
(23)\qquad \begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)^2} &= \xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 + \frac{1}{4}\xi_5 + \ldots,\\
\frac{2!}{(x+1)^3} &= \phantom{\xi_2 + \frac{1}{2}} \xi_3 + \xi_4 + \frac{11}{12}\xi_5 + \ldots
\end{aligned}
$$

et ces formules suffisent à montrer que le rôle des coefficients α et β s'étend aux séries de facultés.

9. Si l'on introduit quelques conventions qui ne sont artificielles qu'en apparence, on vérifiera que l'intégration conduit aux mêmes calculs que la dérivation. En posant

$$
(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
P_{n+1} &= \int_0^x X_n\, dx,\\
P^{(2)}_{n+2} &= \int_1^x dx \int_0^x X_n\, dx,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P^{(s)}_{n+s} &= \int_{s-1}^{s} P^{(s-1)}_{n+s-1}\, dx
\end{aligned}\right.
$$

et en intégrant s fois la formule (17), ce qui donne

$$1 - zX_1 - z^2 X_2 = \log^s(1-x)\left[P_s^{(s)} - zP_{s+1}^{(s)} - z^2 P_{s+2}^{(s)} - \ldots\right],$$

on trouve

$$(25)\qquad (-1)^s P_{n+s}^{(s)} = \alpha_0(-s)X_{n+s} + \alpha_1(-s)X_{n+s-1} + \ldots + \alpha_n(-s)X_s,$$

formule identique à (18 *bis*).

En particulier

$$-X_n = P_n + \frac{P_{n-1}}{2} + \ldots + \frac{P_1}{n},$$

$$P_n = i_{n-1}X_1 + i_{n-2}X_2 + \ldots + i_0 X_n$$

et nous voyons aussi que les coefficients i déjà rencontrés peuvent être définis par la relation importante

$$(26)\qquad i_n = \int_0^1 X_n\,dx.$$

Nous aurons aussi

$$\int_0^2 X_n\,dx = 2i_n - i_{n-1},$$

$$\int_0^3 X_n\,dx = 3i_n - 2i_{n-1} + i_{n-2}.$$

En résumé, si nous posons

$$\int_0^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(0) = -\varphi_1 X_1 - \varphi_2 X_2 - \ldots,$$

nous aurons les deux développements indéfinis

$$(27)\qquad \begin{cases} \varphi_n = i_0 f_{n-1} + i_1 f_n + i_2 f_{n+1} + \ldots, \\ -f_n = \varphi_n + \dfrac{\varphi_{n+1}}{2} + \dfrac{\varphi_{n+2}}{3} + \ldots. \end{cases}$$

10. Remarquons dès à présent que les relations (27) qui précèdent peuvent se généraliser. Posons

$$(28)\qquad \begin{cases} i_h f_0 + i_{h+1} f_1 + \ldots = p_h, \\ \dfrac{\varphi_h}{h} + \dfrac{\varphi_{h+1}}{h+1} + \ldots = q_h, \end{cases}$$

f_h et φ_h étant les coefficients de deux séries de Newton dont la seconde est l'intégrale de la première, nous aurons

$$(28\ bis)\qquad \begin{cases} p_n = i_0\, q_n + i q_{n-1} + \ldots + i_{n-1}\, q_1, \\ i_0\, q_n = \dfrac{p_1}{n} + \dfrac{p_2}{n-1} + \ldots + p_n \end{cases}$$

et ces relations s'étendent d'une manière analogue à deux suites qui satisfont aux relations (6).

Les premières des relations 28 *bis* auront la forme simple

$$\begin{aligned} p_1 &= -q_1, & -q_1 &= p_1, \\ p_2 &= -q_2 + \frac{1}{2} q_1, & -q_2 &= \frac{1}{2} p_1 + p_2, \\ p_3 &= -q_3 + \frac{1}{2} q_2 + \frac{1}{12} q_1, & -q_3 &= \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{2} p_2 + p_3. \end{aligned}$$

11. On peut évidemment permuter les différences et les dérivations, mais par suite de la convention faite pour la somme ordonnée, on aura

$$(29)\qquad \Omega' f - \Omega f' = [\Omega' f]_{x=0} = -\left[f_0 + \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{3} + \ldots\right],$$

ou sous une autre forme

$$(29\ bis)\qquad \Omega f - \int^x \Omega f'\, dx = -\left(f_0 + \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{3} + \ldots\right) X_1.$$

D'une manière générale la différence

$$\int_0^x \Omega^m f(x)\, dx - \Omega^m \int_0^x f(x)\, dx$$

sera un polynome de degré m dont on déterminera les coefficients par les valeurs du premier membre pour 0, 1, ... Par exemple

$$\int_0^x \Omega f(x)\, dx - \Omega \int_0^x f(x)\, dx = x \int_0^1 \Omega f\, dx,$$

puisque les deux membres s'annulent pour 0 et 1. En dérivant et en remplaçant f par f' on trouve

$$(30)\qquad \int_0^1 \Omega f'\, dx + [\Omega' f]_{x=0} = -f_0,$$

ce qui correspond à une identité. Mais en prenant pour limite de l'intégrale x et $x+1$ on obtient la relation

$$\int_x^{x+1} \Omega f(x)\,dx + \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^1 \Omega f(x)\,dx \tag{30 bis}$$

d'une application facile. Par exemple pour $f = \log(1+x)$ on trouve

$$\int_x^{x+1} \log\Gamma(1+x)\,dx = (x+1)\log(x+1) - (x+1) + \log\sqrt{2\pi},$$

formule bien connue.

12. Les calculs relatifs à la multiplication et à la division reposent sur l'emploi de la formule

$$x\mathrm{X}_m = m\mathrm{X}_m - (m+1)\,\mathrm{X}_{m+1}.$$

On a d'abord

$$xf(x) = (f_0 - f_1)\,\mathrm{X}_1 + \ldots + m[f_{m-1} - f_m]\,\mathrm{X}_m + \ldots. \tag{31}$$

On en déduit le développement de $(x+y)f$ et ensuite par simple identification celui de $\frac{f}{x+y}$. En particulier

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{x+1} &= f_0 - \frac{f_0+f_1}{2}\mathrm{X}_1 - \ldots - \frac{f_0+f_1+\ldots+f_{m-1}}{m}\mathrm{X}_m + \ldots, \\ \frac{1}{x+1} &= 1 - \frac{\mathrm{X}_1}{2} - \frac{\mathrm{X}_2}{3} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Pour $y = 0$, on peut utiliser la formule

$$m\frac{\mathrm{X}_m}{x} = 1 - \mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2 - \ldots - \mathrm{X}_{m-1}$$

et en posant

$$-f'_0 = f_1 + \frac{f_2}{2} + \frac{f_3}{3} + \ldots,$$

on a la formule générale

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'_0 - (f'_0 + f_1)\,\mathrm{X}_1 - \left(f'_0 + f_1 + \frac{f_2}{2}\right)\mathrm{X}_2 - \ldots,$$

La considération des fonctions réciproques des polynomes X (Chap. III) permet de simplifier les formules de ce genre. En remarquant que pour $x > 0$

$$1 - X_1 - X_2 - \ldots = 0,$$

on peut supprimer le terme f'_0 et écrire

$$(33)\qquad \frac{f(0)-f(x)}{x} = f_1 X_1 + \left(f_1 + \frac{f_2}{2}\right) X_2 + \left(f_1 + \frac{f_2}{2} + \frac{f_3}{3}\right) X_3 + \ldots.$$

Le même procédé peut être utilisé pour simplifier le développement de $f(x-1)$. Dans le cas où la limite

$$f(-1) = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$$

est convergente, le calcul formel donne

$$f(x-1) = f(-1) - X_1[f(-1) - f_0] - X_2[f(-1) - f_0 - f_1] - \ldots$$

et par conséquent pour $x > 0$

$$(34)\qquad f(x-1) = f_0 X_1 + (f_0 + f_1) X_2 + (f_0 + f_1 + f_2) X_3 + \ldots.$$

Cette égalité peut d'ailleurs subsister sous la réserve indiquée, même si la limite désignée par $f(-1)$ n'est pas finie. Par exemple la formule qui précède donne

$$(34\ bis)\qquad \frac{1}{x} = X_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) X_2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X_3 + \ldots.$$

13. Le symbole X_n peut être généralisé et envisagé comme une fonction de l'indice n

$$(35)\qquad X_n = -\frac{\Gamma(n-x)}{\Gamma(n+1)\Gamma(-x)}$$

(où Γ désigne la fonction eulérienne) qui se développe en série de Newton

$$X_n = N_0 + (x+1) N_1 + \frac{(x+1)(x+2)}{2!} N_2 + \ldots,$$

commode pour les valeurs $X_n(-x)$.

Les nombres i peuvent ainsi être considérés comme des fonctions de n définis par la formule (26)

$$i_n = \int_0^1 X_n\, dx = -\int_0^1 \frac{\Gamma(n-x)}{\Gamma(n+1)\Gamma(-x)}\, dx.$$

Cette expression peut être transformée. Partons du développement classique

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n+1)} = 1 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + \ldots,$$

qui devient, en prenant les différences secondes par rapport à la variable x,

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+3)\Gamma(x-1)} = - X_2 + X_3 N_1 + X_4 N_2 + \ldots.$$

Intégrons de 0 à 1 par rapport à x nous obtenons d'abord

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+3)\Gamma(x-1)} dx = - i_2 + i_3 N_1 + i_4 N_2 + \ldots.$$

D'autre part si nous faisons le changement de variable $x = 1 - y$ nous trouvons aussi

$$(36) \qquad \int_0^1 \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+3)\Gamma(x-1)} dx = \int_0^1 \frac{\Gamma(n+2-y)}{\Gamma(n+2+1)\Gamma(-y)} dy = - i_{n+2}$$

et nous obtenons par suite le développement de i_{n+2} en série de Newton de la variable n

$$(37) \qquad i_{n+2} = i_2 - i_3 N_1 - i_4 N_2 - \ldots.$$

On voit que i_{x+2} satisfait à la relation $f(n) = f_n$ et que par suite les nombres i d'indice supérieur à 2 forment une suite autoréciproque d'après la définition donnée plus loin. Comme conséquence i_{x+2} est susceptible de développements de forme spéciale tels que

$$2^x i_{x+2} = \frac{1}{2} - \frac{X_2}{45} - \frac{11}{945} X_4 - \frac{107}{14175} X_6 - \frac{2549}{467775} X_8 - \ldots,$$

où les indices des X sont tous pairs.

En développant le premier terme de (36) d'après la formule de Stirling on trouve que pour n très grand

$$i_{n+1} = - \int_0^1 \frac{n^{x-2}}{\Gamma(x+1)} dx = - \frac{\mu}{n^2} \int_0^1 x(x-1) n^x dx,$$

μ désignant un nombre compris entre le maximum et le minimum de $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ dans l'intervalle d'intégration.

D'autre part

$$\int_0^1 x(x-1)\,n^x\,dx = -\frac{n-1}{\log^2 n} + \frac{2n-1}{\log^3 n}$$

et l'on voit que i_n devient pour n très grand infiniment petit comme $\frac{1}{n \log^2 n}$. D'ailleurs la série qui a pour terme général

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) i_n$$

et qui s'obtient par intégration de (34 *bis*) est divergente.

Les nombres i, sauf i_0, sont tous positifs et forme une suite décroissante qui a pour somme l'unité. Voici leurs premières valeurs :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{24}, \quad \frac{19}{720}, \quad \frac{3}{160}, \quad \frac{863}{60\,480}, \quad \frac{275}{24\,192}, \quad \frac{33\,953}{3\,628\,800}, \quad \frac{8\,183}{1\,036\,800},$$

$$\frac{3\,250\,433}{449\,001\,600}, \quad \frac{4\,671}{788\,480}, \quad \frac{13\,695\,779\,093}{2\,615\,348\,736\,000}, \quad \frac{24\,466\,579\,093}{5\,230\,697\,472\,000}.$$

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

1. Certaines formes des polynomes en X correspondent à des combinaisons intéressantes. On peut les obtenir, soit par un calcul direct, soit plus simplement en général par application des formules de somme ou de différence. Nous nous contenterons d'indiquer ici quelques groupes simples

$$
(a)\quad\left\{
\begin{aligned}
&X_1 - X_2 = \frac{x(1+x)}{2!},\\
&X_2 - 2X_3 + X_4 = \frac{x(1-x)(1+x)(2+x)}{4!},\\
&X_n - N_1 X_{n+1} - \ldots - N_n X_{2n}\\
&\quad = \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)(1+x)\ldots(n+x)}{(2n)!}.
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifie facilement en formant le tableau fondamental relatif au premier membre qu'il correspond à un polynome nul pour $0, 1, \ldots, n$ et aussi $-1, -2, \ldots, -(n-1)$:

$$
(b)\quad\left\{
\begin{aligned}
&X_0 - X_1 = \frac{1+x}{1} X_0,\\
&X_1 - 2X_2 + X_3 = \frac{2+x}{3}(X_1 - X_2),\\
&X_2 = 3X_3 + 3X_4 - X_5 = \frac{3+x}{5}(X_2 - 2X_3 + X_4),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

Ces polynomes sont respectivement les différences des précédents :

$$(c)\quad \begin{cases} X_2 - X_3 = \dfrac{x(1-x^2)}{3!}; \\ X_3 - 2X_4 + X_5 = \dfrac{x(1-x^2)(2^2-x^2)}{5!}, \\ X_4 - 3X_5 + 3X_6 - X_7 = \dfrac{x(1-x^2)(2^2-x^2)(3^2-x^2)}{7!}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces polynomes sont les sommes des polynomes (a) :

$$(d)\quad \begin{cases} X_1 - 2X_2 = 2\dfrac{x^2}{1}, \\ X_2 - 3X_3 + 2X_4 = 2\dfrac{x^2(1-x^2)}{4!}, \\ X_3 - 4X_4 + 5X_5 - 2X_6 = 2\dfrac{x^2(1^2-x^2)(2^2-x^2)}{6!}. \end{cases}$$

Chacun des coefficients est la somme de celui situé immédiatement au-dessus et de celui à gauche de ce dernier.

e. Les formules suivantes dont nous n'écrirons que les premières introduisent un groupe de coefficients compliqués que nous retrouverons à propos des séries intermédiaires :

$$\begin{aligned} &X_1 - 2X_2 = X_1^2, \\ &X_2 - 6X_3 + 6X_4 = -X_2^2, \\ &X_3 - 12X_4 + 30X_5 - 20X_6 = X_3^2, \\ &X_4 - 20X_5 + 90X_4 - 140X_7 + 70X_8 = -X_4^2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

2. La fonction $\log(1+x)$ s'exprime en série de Newton

$$(1)\qquad \log(1+x) = -(l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3 + \dots)$$

et les coefficients l_1, l_2, ... auront pour valeur d'après le tableau fondamental

$$l_1 = \log\frac{1}{2}, \qquad l_2 = \log\frac{1.3}{2^2}, \qquad l_3 = \log\frac{1.3^3}{2^3.4}, \qquad \dots.$$

On peut facilement les exprimer au moyen des nombres i. Il suffit de considérer l'équation qui précède comme obtenue par intégration de

$$\frac{1}{x+1} = 1 - \frac{X_1}{2} - \frac{X_2}{3} - \ldots$$

et d'appliquer les formules (27) du chapitre précédent. On obtient ainsi

$$(2) \qquad l_n = \frac{i_0}{n} + \frac{i_1}{n+1} + \frac{i_2}{n+2} + \ldots,$$

$$(3) \qquad -\frac{1}{n} = l_n + \frac{l_{n+1}}{2} + \frac{l_{n+2}}{3} + \ldots.$$

Ce groupe se complète par une application appropriée des formules (28) et (28 *bis*).

D'autre part nous trouverons plus loin la valeur des séries

$$\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{4} + \ldots = -C,$$

$$\frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{4} + \frac{l_3}{5} + \ldots = -\log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2},$$

mais les séries analogues qui prolongent ce groupe ne paraissent pas avoir des valeurs que l'on puisse formaliser sous une forme simple.

Nous rencontrerons d'ailleurs d'autres séries formées avec les nombres l. Par exemple :

$$\frac{l_1}{2^2} + \frac{l_2}{2^3} + \frac{l_3}{2^4} + \ldots = \frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi}.$$

Les nombres l décroissent lentement en valeur absolue

0,693 147,	0,068 664,
0,287 682,	0,056 167,
0,169 899,	0,047 218,
0,116 655,	0,040 532,
0.087 127,	0,035 370,

et leur suite diverge comme log0.

3. Le développement particulièrement simple

$$(4) \qquad (1-a)^x = 1 - a X_1 - a^2 X_2 - \ldots,$$

correspond à une série de Newton convergente lorsque $a < 1$.

D'autre part on a aussi

$$a^x = 1 - (1-a)X_1 - (1-a)^2 X_2 - \ldots$$

et l'on peut remarquer que le coefficient f_n de l'une de ces deux équations correspond à la valeur $f(n)$ de l'autre. Lorsque $a = \frac{1}{2}$, les deux équations sont identiques. Les coefficients de 2^{-x} correspondent donc à la propriété $f(n) = f_n$.

Pour $a = 1$ nous avons l'équation remarquable

$$0^x = 1 - X_1 - X_2 - \ldots,$$

qui est nulle pour toutes les valeurs positives de x sauf pour $x = 0$.

Pour $a = -1$ nous avons le développement limite

$$2^x = 1 + X_1 - X_2 + X_3 - \ldots. \tag{5}$$

Pour $a > 1$ le second membre de (4) ne correspond plus à la valeur du premier que pour les valeurs entières de x à moins de convention particulière.

Sous cette réserve on a

$$(-1)^x = 1 - 2X_1 - 2^2 X_2 - \ldots.$$

Pour $a = \frac{1}{2}$ on obtient une fonction qui joue un rôle fondamental au point de vue de ce que nous appellerons plus loin l'autoréciprocité. On peut aussi noter dès à présent la correspondance que l'on peut établir entre les valeurs de 2^{-x} et les séries divergentes qui correspondent aux valeurs négatives de x dans (5).

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

$$\frac{1}{2^2} = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. On obtient immédiatement au moyen des formules générales

$$\Delta a^x = (1-a) - (1-a)^2 X_1 - (1-a)^3 X_2 - \ldots,$$

$$\Omega a^x = - X_1 - (1-a) X_2 - (1-a)^2 X_2 - \ldots$$

et l'on en déduit

$$\Delta a^x = a^x(1-a), \qquad \Omega a^x = \frac{a^x - 1}{1-a}. \tag{6}$$

Ces formules ont un sens quel que soit a. D'ailleurs la première tout au moins peut s'établir par un calcul direct.

Pour $a = 0$ on peut écrire

$$\Delta 0^x = 1 - X_1 - X_2 - \ldots = 0^x,$$
$$\Omega 0^x = \quad - X_1 - X_2 - \ldots = 0^x - 1,$$

et pour $a = 1$

$$\Delta 1^x = 0^x - 1, \qquad \Omega 1^x = - X_1.$$

5. Les développements des fonctions trigonométriques se rattachent aux précédents par la relation habituelle

$$e^{2\alpha i x} = \cos 2\alpha x + i \sin 2\alpha x,$$

de sorte que si nous posons

$$(7) \qquad 1 - e^{2i\alpha} = \rho(\cos\beta + i \sin\beta),$$

ce qui entraîne

$$\rho = 2\sin\alpha, \qquad 2(\alpha - \beta) = (2k+1)\pi,$$

nous aurons les deux formules

$$(8) \qquad \begin{cases} \cos 2\alpha x = 1 - \rho\cos\beta X_1 - \rho^2 \cos 2\beta X_2 - \ldots, \\ \sin 2\alpha x = \quad - \rho \sin\beta X_1 - \rho^2 \sin 2\beta X_2 - \ldots, \end{cases}$$

dans lesquelles il faut supposer les expressions $\cos n\beta$ et $\sin n\beta$ des deuxièmes membres exprimés en α.

On aura par exemple

$$\cos 2\alpha x = 1 - \rho \sin\alpha X_1 + \rho^2 \cos 2\alpha X_2 + \rho^3 \sin 3\alpha X_3$$
$$- \rho^4 \cos 4\alpha X_4 - \rho^5 \sin 5\alpha X_5 - \ldots.$$

Les expressions obtenues sont compliquées. Il n'y a d'ailleurs convergence que si ρ est plus petit que 1 en valeur absolue. On peut supposer α compris entre $-\pi$ et $+\pi$ et même entre 0 et π de sorte que la condition se ramène à $\alpha < \frac{\pi}{6}$ et l'on peut alors se borner pour β à la valeur $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

On peut dériver et intégrer soit par rapport à x, soit par rapport à α et obtenir ainsi des relations plus ou moins intéressantes. Par exemple en dérivant $\sin 2\alpha x$ par rapport à x et faisant $x = 0$, on obtient

$$2\alpha = \rho \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\rho^2}{2!}\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \ldots,$$

et en intégrant la même équation de o à 1

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha} = \overset{\cdot}{i}_1 \rho \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \overset{\cdot}{i}_2 \rho^2 \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \ldots.$$

D'ailleurs, pour $2\alpha = 1$, la valeur de

$$\rho = 2 \sin \frac{1}{2} = 0{,}959\ldots$$

est plus petite que 1 et par suite les développements directs

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - c_1 X_1 - c_2 X_2 - \ldots, \\ \sin x &= \quad -(s_1 X_1 + s_1 X_2 + \ldots) \end{aligned}$$

sont convergents.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$ les formules se simplifient. On a par exemple

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{\pi}{3} x = 1 - X_1 + X_4 - X_7 + X_{10} - X_{13} + \ldots \\ + \sqrt{3}[(X_2 - X_3) - (X_5 - X_6) + (X_8 - X_9) - \ldots] \end{aligned}$$

et des relations telles que

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = -\overset{\cdot}{i}_0 - \frac{\overset{\cdot}{i}_1}{2} + \frac{\overset{\cdot}{i}_2}{3} + \overset{\cdot}{i}_4 + \frac{\overset{\cdot}{i}_5}{2} - \frac{\overset{\cdot}{i}_6}{2} - \overset{\cdot}{i}_7 - \frac{\overset{\cdot}{i}_8}{2} + \ldots.$$

D'autre part, si nous reprenons les relations (8) en introduisant dans le premier membre la variable β nous obtiendrons cette fois

$$\begin{aligned} \cos(\pi - 2\beta)x &= 1 - \rho \cos\beta X_1 - \rho^2 \cos 2\beta X_2 - \ldots, \\ \sin(\pi - 2\beta)x &= \quad -\rho \sin\beta X_1 + \rho^2 \sin 2\beta X_2 + \ldots, \end{aligned}$$

avec comme condition $2\cos\beta < 1$.

Nous pouvons vérifier que le calcul direct au moyen du tableau fondamental conduit au même résultat pour deux fonctions telles que $\cos(\pi - 2\beta)x$ et $\cos\pi \cos 2\beta x$ dont la différence s'annule pour toutes les valeurs entières de x. Il suffit d'ailleurs de substituer une valeur quelconque non entière pour écarter une fonction impropre, sous la réserve naturellement qu'on n'aura pas introduit précisément dans cette fonction impropre une constante correspondant à la valeur de vérification.

En particulier, les deux fonctions

$$\cos \pi x, \qquad (-1)^x = \cos \pi x + i \sin \pi x$$

se représentent par la même série de Newton divergente.

6. On obtient facilement les formules de différence et de somme ordonnée des fonctions trigonométriques. En partant de

$$\Delta_x e^{2\alpha i x} = e^{2\alpha i x}(1 - e^{2\alpha i}) = \rho e^{i\left(2\alpha x - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

on trouve

$$\Delta_x \cos 2\alpha x = 2 \sin 2(x+1)\alpha \sin \alpha, \qquad \Delta_x \sin 2\alpha x = -2\cos(2x+1)\alpha \sin \alpha$$

et, inversement,

$$\Omega_x \cos 2\alpha x = \frac{\sin(1-2x)\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{1}{2}, \qquad \Omega_x \sin 2\alpha x = \frac{\cos(1-2x)\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les formules se simplifient

$$\Delta \cos \pi x = 2 \cos \pi x, \qquad \Omega \cos x\pi = \frac{\cos \pi x - 1}{2}, \tag{9}$$

et l'on en déduit les expressions intéressantes

$$\Delta_x \cos \pi x \, f(x), \qquad \Omega_x \cos \pi x \, f(x)$$

relatives à une fonction $f(x)$ quelconque, au moins formellement, de la manière suivante :

Nous avons d'abord

$$\Delta(1-a)^x \cos \pi x = (1-a)^x (2-a) \cos \pi x,$$

$$\Omega(1-a)^x \cos \pi x = \frac{(1-a)^x \cos \pi x - 1}{2-a},$$

et en développant suivant les puissances de a les deux membres de cette dernière formule et en égalant les coefficients de a nous obtenons le groupe important de relations

$$\Omega \cos \pi x \, X_n = \cos \pi x \left(\frac{X_n}{2} + \frac{X_{n-1}}{2^2} + \ldots + \frac{X_1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{10}$$

En portant ces valeurs dans l'expression de $f(x)$ et en posant :

$$2t_0 = f_0 + \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2} + \ldots,$$

$$(11) \qquad 2t_n = f_n + \frac{f_{n+1}}{2} + \frac{f_{n+2}}{2^2} + \ldots,$$

on trouve finalement :

$$(12) \qquad \Omega \cos\pi x\, f(x) = -t_0 + \cos\pi x(t_0 - t_1 X_1 - t_2 X_2 - \ldots).$$

Désignons par $\Theta f(x)$ le coefficient de $\cos\pi x$ dans le deuxième membre et formons la différence des deux membres de (12); nous trouvons après avoir divisé par le facteur $\cos\pi x$:

$$(13) \qquad 2\Theta f(x) - \Delta\Theta\, f(x) = f(x).$$

C'est l'équation fonctionnelle à laquelle satisfait $\Theta f(x)$. On vérifie d'ailleurs directement que la limite, quand elle existe, de la suite indéfinie

$$f(x) - f(x+1) + f(x+2) - \ldots$$

satisfait à la même équation et elle coincide avec Θ si l'on pose

$$t_0 = f(0) - f(1) + f(2) - \ldots,$$

de sorte que l'on a dans ce cas l'égalité

$$(14) \qquad f(0) - f(1) + f(2) - \ldots = \frac{f_0}{2} + \frac{f_1}{2^2} + \frac{f_2}{2^3} + \ldots.$$

CHAPITRE III.

SÉRIES ET NOMBRES RÉCIPROQUES.

1. Reprenons le tableau fondamental et considérons cette fois les séries de Newton ayant pour coefficients non plus les nombres d'une même ligne mais ceux d'une même colonne. Prenons d'abord la série

$$f(0) - X_1 f(1) - X_2 f(2) - X_3 f(3) - \ldots \tag{1}$$

qui est ainsi définie formellement. Nous l'appellerons la série réciproque de f et nous la désignerons par l'une des deux notations

$$[\mathcal{R} f](x), \qquad \mathrm{R}[f(x)].$$

Cette série sera en général convergente au delà d'une certaine valeur critique qui ne sera pas la même que pour la fonction f.

Dans les mêmes conditions les nombres de la $(m+1)^{\text{ième}}$ colonne définiront une fonction qui ne sera d'ailleurs que la fonction précédente où x a été remplacé par $x+m$ et qui sera désignée par $[\mathrm{R}f](x+m)$, la réciproque de $f(x+m)$ étant d'autre part désignée par $\mathrm{R}f(x+m)$.

L'examen du tableau montre immédiatement que

$$\mathrm{R}[f(x+m)] = \Delta^m[\mathrm{R}f](x), \qquad [\mathrm{R}f](x+m) = \mathrm{R}[\Delta^m f(x)], \tag{2}$$

relations qui ne sont pas indépendantes.

D'une manière générale, y étant un nombre quelconque,

$$\mathrm{R}f(x+y) = \mathrm{R}[f - Y_1 \Delta f - Y_2 \Delta^2 f - \ldots]$$

et par suite en désignant plus simplement par $\rho(x)$ la réciproque de f

$$\mathrm{R}f(x+y) = \rho(x) - Y_1 \rho(x+1) - Y_2 \rho(x+2) - \ldots \tag{3}$$

Les formules (2) ne s'étendent en dehors du tableau que si la série f est convergente en deçà de (-1). On aurait dans ce cas

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} R[f(x-1)]-\Omega[Rf](x)=Rf(-1, \\ {[Rf](x-1)-R[\Omega f(x)]=[f](-1),} \end{array}\right.$$

les symboles qui figurent dans le second membre représentant les sommes supposées convergentes :

$$\Sigma f_n, \qquad \Sigma f(n).$$

2. Il y a des exemples évidents de fonctions réciproques : En particulier les formules (4) et (8) du Chapitre II indiquent qu'il y a réciprocité entre

$$\begin{array}{ll} a^x, & (1-a)^x; \\ \cos 2\alpha x, & (2\sin\alpha)^x \cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)x; \\ \sin 2\alpha x, & (2\sin\alpha)^x \sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)x. \end{array}$$

De même la formule (3) appliquée à $\dfrac{1}{x+1}$ qui est sa propre réciproque montre que

$$(5)\qquad R_x\frac{1}{x+y+1}=\frac{1}{x+1}-Y_1\frac{1}{x+2} -Y_3\frac{1}{x+3}-\ldots=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+z)},$$

et nous voyons qu'il y a réciprocité entre les fonctions

$$\frac{1}{x+m}, \qquad \frac{(m-1)!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)},$$

ce qu'on peut vérifier directement par l'examen des coefficients.

Le procédé de la formule (1) n'est pas toujours le plus simple pour former la réciproque d'une fonction comme nous le verrons par la suite. Il est évident toutefois que tous les procédés reviendront à remplacer dans un développement où figureront des combinaisons ϖ_h fonctions linéaires des coefficients $f_0\ f_1\ \ldots\ f_h$, ces combinaisons ϖ_h respectivement par d'autres combinaisons composées de la même manière avec $f(0)$, $f(1)$, $f(h)$.

Cette considération conduit à considérer *a priori* d'une part les groupes de combinaisons linéaires des f_n qui garderont la même valeur lorsqu'on remplacera les f_n par les $f(n)$ et d'autre part les groupes analogues où la substitution amènera un simple changement de signe.

Parmi les premiers on peut noter dès à présent les nombres qui figurent dans la diagonale du tableau fondamental :

$$f_0, \quad f_1 - f_2, \quad f_2 - 2f_3 + f_4, \quad \ldots$$

et parmi les seconds d'autres à peine plus compliqués :

$$f_1 - 2f_2, \quad f_2 - 3f_3 + 2f_4, \quad f_3 - 4f_4 + 5f_5 - 2f_6$$

dont la loi de formation est évidente. D'autres combinaisons ressortissent aux procédés indiqués au paragraphe 9 de ce chapitre et au paragraphe 3 du Chapitre VIII.

3. Les séries de Newton appelées « développements de zéro » correspondent aux fonctions réciproques des polynomes X. On a tout d'abord :

$$\text{(6)} \qquad R(1) = 1 - X_1 - X_2 - X_3 - \ldots.$$

C'est évidemment le développement de $(1-1)^x$ qui d'ailleurs sous cette forme correspond bien à la réciproque de 1^x.

La réciproque de X_1 est ensuite

$$\text{(7)} \qquad R(X_1) = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \ldots,$$

et l'on a

$$\Delta R(X_1) - R(X_1) = [RX_1](x+1) = R(1),$$
$$R(X_1) = (1-1)^{x-1}.$$

D'une manière générale $R(X_m)$, qu'il est inutile d'écrire, peut être interprété comme représentant $(1-1)^{x-m}$. Ces fonctions sont donc égales à 1 pour $x = m$, nulles pour toutes les valeurs supérieures et infinies pour les valeurs inférieures.

On peut remarquer que ces séries jouent un rôle correcteur en ce sens que, si dans la suite des valeurs $f(0)$, $f(1)$, ... se glisse une valeur erronée et si le terme $f(m)$ par exemple est remplacé par $f(m) + \varepsilon$, le développement obtenu sera une série de Newton qui ne deviendra convergente que si l'on en retranche la série $\varepsilon R(X_m)$.

Nous avons vu aussi (I, 12) qu'on peut les utiliser pour simplifier certains développements.

4. Il est évident que la série

$$u(x) = f(x) + \mathrm{R} f(x)$$

a le tableau de ses coefficients symétrique par rapport à la diagonale de sorte que $u_m = u(m)$. Nous dirons pour simplifier que cette série est autoréciproque positivement.

De même la série

$$v(x) = f(x) - \mathrm{R} f(x)$$

a un tableau de coefficient symétrique par rapport à la diagonale, qui est formé de zéros, mais avec changement de signe ; elle est autoréciproque négativement.

L'examen du tableau montre que si u est autoréciproque les combinaisons suivantes le sont aussi :

$$(8)\quad \Delta u - \Delta^2 u,\quad \Delta^2 u - 2\Delta^3 u + \Delta^4 u,\quad \Delta^3 u - 3\Delta^4 x + 3\Delta^5 u - \Delta^6 u.$$

Par exemple en partant de la fonction $\frac{1}{x+1}$ et en posant

$$\xi_1 = \frac{1}{x+1},\qquad \xi_m = \Delta^m \xi_1,$$

on détermine une suite de fonctions autoréciproques :

$$(9)\qquad \xi_2 - \xi_3,\quad \xi_3 - 2\xi_4 + \xi_5,\quad \xi_4 - 3\xi_5 + 3\xi_6 - \xi_7$$

dont le type général peut aussi s'écrire :

$$\frac{m!}{(x+m+1)\ldots(x+2m+1)}.$$

On déterminera de même la suite de fonctions autoréciproques avec changement de signe :

$$(10)\qquad \xi_1 - 2\xi_2,\quad \xi_2 - 3\xi_3 + 2\xi_4,\quad \xi_3 - 4\xi_4 + 5\xi_5 - 2\xi_6.$$

5. Les séries des types u et v peuvent être mises sous une forme spéciale qui met en évidence le fait que leurs $2m$ premiers coefficients ne dépendent que de m constantes seulement. Les deux

fonctions

$$\left(\frac{1-a}{2}\right)^x, \qquad \left(\frac{1+a}{2}\right)^x = \left(1-\frac{1-a}{2}\right)^x$$

sont évidemment réciproques; la somme

$$2^{-x}[(1-a)^x + (1+a)^x] = 2^{-x+1}[1 - a^2 X_2 - a^4 X_4 - \ldots]$$

est donc autoréciproque positivement quel que soit a et il en est de même de toutes les expressions $2^{-x}X_{2n}$ tandis que les expressions $2^{-x}X_{2n+1}$ sont autoréciproques avec changement de signe.

Les formules de transformation

$$(11) \qquad 2^{x-n}X_n = X_n - (n+1)X_{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}X_{n+2} - \ldots$$

sont assez compliquées et les dernières représentent la limite pratique des séries de Newton convergentes.

Quoi qu'il en soit, si l'on met une fonction quelconque sous la forme

$$(12) \qquad f(x) = 2^{-x}a(x) = 2^{-x}(a_0 - a_1 X_1 - a_2 X_2 - \ldots),$$

sa réciproque s'en déduit immédiatement puisqu'il suffit de changer les signes des coefficients des polynomes X d'indice impair.

6. Les différences des fonctions mises sous la forme (12) ont une forme analogue :

$$2^h \Delta^h f = 2^{-x}\left[a(x) + h\Delta_a + \frac{h(h-1)}{2}\Delta^2 a + \ldots + \Delta^h a\right]$$

et, inversement,

$$\Delta^h a = 2^x[f - H_1 2^1 \Delta f - H_2 2^2 \Delta^2 f - \ldots - 2^h \Delta^h f].$$

Si f est autoréciproque positivement, $a(x)$ n'a pas de coefficient de rang pair et il en est de même de $\Delta^{2n}a$. Par contre Δ_a^{2n+1} n'a que des coefficients de rang impair. C'est l'inverse si f est autoréciproque négativement.

On peut ainsi former des combinaisons autoréciproques dont la plus simple est

$$(13) \qquad f(x) - 2\Delta f(x).$$

Considérons aussi le produit

$$2x\,\Delta f = 2^{-x}[(a_0+a_2)X_1+(a_1+a_3)X_2+(a_2+a_4)X_3+\ldots].$$

On voit que si f est autoréciproque positivement, ce produit l'est négativement et inversement. Par suite la différence

$$\Delta(x+1)f = x\,\Delta f - f + 2\Delta f \tag{14}$$

est autoréciproque en même temps que f mais de parité différente.

7. Formons maintenant les sommes ordonnées des fonctions mises sous la forme (12). Nous avons successivement

$$2\,\Delta e^{-x} = 2^{-x}, \qquad 2\,\Delta(e^{-x}X_1) = 2^{-x}(X_1+X_0),$$
$$2\,\Delta(e^{-x}X_n) = 2^{-x}(X_n+X_{n-1}), \tag{15}$$

et par suite

$$2^{-x}X_n = 2\,\Delta[e^{-x}(X_n - X_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}(1+X_1)]$$

ou encore

$$\Omega\, 2^{-x}X_n = 2.2^{-x}(X_n - X_{n-1}+\ldots]+(-1)^n 2, \tag{16}$$

le deuxième membre étant nul avec x. Si nous remplaçons la constante par le développement :

$$2 = 2^{-x}(1+X_1-X_2+X_3-\ldots),$$

nous obtiendrons enfin

$$\Omega\, 2^{-x}X_n = 2.2^{-x}(X_n - X_{n+1}+X_{n+2}-\ldots), \tag{17}$$

et le résultat se présente sous forme d'un développement illimité, mais il a la forme (12) et il s'annule pour $0, 1, \ldots, n-1$. En l'appliquant à $f(x)$ nous aurons

$$\Omega f(x) = 2.2^{-x}[a_0X_1-(a_0+a_1)X_2-(a_0+a_1+a_2)X_3-\ldots]. \tag{18}$$

Remarquons que si nous formons

$$-\frac{\Omega f(x)}{x+1} = 2^{1-x}\Bigg[\frac{a_0}{2}X_1 - \frac{a_1}{3}X_2 + \frac{a_0+a_2}{4} - \frac{a_1+a_3}{5}X_4 + \frac{a_0+a_2+a_4}{6}X_5 - \frac{a_1+a_3+a_5}{7}X_6+\ldots\Bigg], \tag{19}$$

nous voyons que cette série est autoréciproque en même temps que f mais avec un signe différent. C'est au fond la même propriété que celle qui résulte de la forme (14).

8. Comme application immédiate, reprenons la double égalité

$$\begin{aligned}(1-x)^y &= 1 - xY_1 - x^2Y_2 - x^3Y_3 - \ldots\\ &= 1 - y\log\frac{1}{1-x} + \frac{y^2}{2!}\log^2\frac{1}{1-x} - \ldots.\end{aligned}$$

Supposons les logarithmes développés en x au moyen des coefficients $\alpha(s)$ du Chapitre I, puis dans l'identité formée en considérant les deux derniers membres remplaçons les puissances de x par les polynomes X d'indice correspondant en posant

$$\Lambda_h = \alpha_0(h)X_h + \alpha_1(h)X_{h+1} + \alpha_2(h)X_{h+2} + \ldots. \tag{20}$$

Nous savons d'autre part que

$$W = \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} = 1 + X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots,$$

et par suite la substitution nous donne

$$W = 1 + y\Lambda_1 - \frac{y^2}{2!}\Lambda_2 + \frac{y^3}{3!}\Lambda_3 - \ldots \tag{21}$$

et nous obtenons ainsi le développement de W en y. On peut donc définir les fonctions Λ par la relation

$$\Lambda_h = (-1)^{h-1}\left[\frac{\partial^h W}{\partial y^h}\right]_{h-0}.$$

Formons maintenant la différence ordonnée de W par rapport à x :

$$-\frac{1}{y}\Delta_x W = \frac{W}{x+1} = -\Delta\Lambda_1 + \frac{y}{2!}\Delta\Lambda_2 - \frac{y^2}{3!}\Lambda\Delta_3 + \ldots.$$

La comparaison nous montre que

$$\Delta\Lambda_1 = -\frac{1}{x+1}, \qquad \Delta\Lambda_n = -\frac{n\Lambda n}{x+1}. \tag{22}$$

En posant pour simplifier

$$\lambda_n = -\Delta\Lambda_n,$$

nous aurons entre les fonctions λ les relations successives

$$\lambda_1 = \frac{1}{x+1}, \qquad \lambda_n = \frac{n}{x+1}\,\Omega\,\lambda_{n-1}. \tag{23}$$

La première fonction étant autoréciproque positivement les suivantes le sont aussi d'après (19), celles d'indice pair négativement, celles d'indice impair positivement.

Il est d'ailleurs possible de les mettre sous la forme (12). On a d'abord

$$\frac{1}{x+1} = 2^{-x}\left(1 - \frac{X_2}{3} - \frac{X_4}{5} - \frac{X_6}{7} - \dots\right) \tag{24}$$

et ensuite par application de la formule (19) :

$$\frac{1}{2(x+1)}\left[\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C\right] = 2^{-x}\left[\frac{X_1}{2} + \left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{X_3}{4} + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{X_5}{6} + \dots\right] \tag{25}$$

mais les résultats se compliquent rapidement.

9. Les fonctions λ se développent donc très simplement en séries de Newton au moyen des coefficients $\alpha(1)$ pour les valeurs entières de (s) :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \frac{X_1}{2} - \frac{X_2}{3} - \frac{X_3}{4} - \frac{X_4}{5} - \dots, \\ \lambda_2 &= \quad - X_1 - X_2 - \frac{11}{12}X_3 - \frac{5}{6}X_4 - \dots, \\ \lambda_3 &= \qquad\qquad - X_2 - \frac{3}{2}X_3 - \frac{7}{4}X_4 - \dots. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Les coefficients de l'une quelconque de ces fonctions forment une suite de nombres autoréciproques mais à la condition que l'on introduise les coefficients 0 des premiers polynomes X. On vérifiera de la sorte que les suites

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},$$

$$0,\quad 0,\quad 1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{15}{8}$$

sont autoréciproques positivement et que les suites

$$0,\quad 1,\quad 1,\quad \frac{11}{12},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{137}{180},$$

$$0,\quad 0,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad \frac{17}{6}$$

sont autoréciproques négativement.

10. Cette propriété des coefficients des puissances de $\log(1-z)$ s'étend aux puissances négatives mais à la condition de prendre comme coefficient initial celui de la première puissance de z dans le développement. Nous l'avons déjà vérifié pour la puissance (-1). On a en effet

$$\frac{1}{\log(1-z)} - \frac{\dot{i}_0}{z} - \dot{i}_1 = \dot{i}_2 z + \dot{i}_3 z^2 + \dot{i}_4 z^3 + \ldots \tag{27}$$

et cette suite est autoréciproque positivement [Chap. I, éq. (37)].

D'autre part si nous appliquons la transformation (19) à la fonction λ_{-1} nous trouverons la série

$$(2\dot{i}_3 - 3\dot{i}_4)X_1 + (3\dot{i}_4 - 4\dot{i}_5)X_2 + (4\dot{i}_5 - 5\dot{i}_6)X_3 + \ldots \tag{28}$$

qui correspond à

$$\frac{1}{\log^2(1-z)} + \frac{\dot{i}_0}{z^2} + \frac{1}{z} - \dot{i}_2$$

comme on le vérifierait par une simple dérivation de la relation (27). Ce procédé s'étend sans difficulté.

On déduit de ce qui précède la conséquence suivante : Si l'on considère le développement

$$v = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

où les coefficients forment une suite autoréciproque, les coefficients du développement de $\frac{1}{v}$, abstraction faite de ceux des puissances négatives ou nulles, forment aussi une suite autoréciproque de même nature. On le vérifie en mettant la fonction v composée par exemple de coefficients autoréciproques positivement sous la forme

$$v = b_1 \log(1-z) + b_2 \log^3(1-z) + \ldots$$

(en supposant pour simplifier que b_1 n'est pas nul). Par suite

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{b_1 \log(1-z)} + C_1 \log(1-z) + C_2 \log^3(1-z) + C_3 \log^5(1-z) + \ldots$$

ou encore

$$\frac{1}{v} - \frac{i_0}{a_1 z^2} - \frac{i_1}{a_1} = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \ldots$$

et la suite des coefficients γ_1, γ_2, ... est bien autoréciproque positivement.

De même si nous avions considéré une suite de termes à coefficients autoréciproques négativement

$$v = a'_2 z^2 + a'_3 z^3 + a'_4 z^4 + \ldots,$$

le développement inverse serait

$$\frac{1}{v} - \left(\frac{1}{a'_2 z^2} + \frac{\alpha'}{z} + \beta'\right) = \gamma'_1 z + \gamma'_2 z^2 + \gamma'_3 z^3 + \ldots,$$

où le terme γ'_1 serait d'ailleurs nul et la suite serait autoréciproque négativement.

11. Le groupe des équations (26) peut se résoudre en X au moyen des coefficients β :

$$-1 = -\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2!} - \frac{\lambda_3}{3!} + \frac{\lambda_4}{4!} - \ldots,$$

$$X_1 = \qquad -\lambda_2 + \lambda_3 - \frac{7}{12}\lambda_4 + \ldots,$$

$$X_n = \Sigma(-1)^{n-1} \frac{N_1 - N_2 2^n - N_3 3^n - \ldots - n^n}{n!} \lambda_{n+1}.$$

On en déduit qu'une équation quelconque peut se mettre sous la forme

$$(29) \qquad f(x) = f_0 \lambda_1 - \left(\frac{f_0}{2!} - f_1\right)\lambda_2 - \left(\frac{f_0}{3!} - f_1 + f_2\right)\lambda_3 - \ldots$$

et sa réciproque s'en déduit par simple changement de signe des coefficients d'indice impair.

On pourrait vérifier directement que les combinaisons

$$f_0, \quad \frac{f_0}{6} - f_1 + f_2, \quad \ldots$$

ne changent pas quand on remplace les f_n par les $f(n)$ et que les combinaisons analogues :

$$\frac{f_0}{2} - f_1, \quad \frac{f_0}{24} - \frac{7}{12} f_1 + \frac{3}{2} f_2 - f_3, \quad \ldots$$

changent de signe par la substitution.

12. Une suite particulière de nombres autoréciproques joue un rôle important, c'est celle des nombres $b_0 b_1 b_2$ dont le premier est égal à un et où tous les b d'indice impair, sauf b_1, sont nuls. Les relations $f(n) = f_n$ les déterminent de proche en proche et l'on obtient ainsi :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_4 = -\frac{1}{30}, \quad b_6 = \frac{1}{42}, \quad \ldots.$$

Ce sont les nombres bien connus de Bernoulli.

La série formelle

$$(30) \qquad b(x) = 1 - \frac{1}{2} X_1 - \frac{1}{6} X_2 + \frac{1}{30} X_4 + \ldots$$

étant autoréciproque nous pourrons poser

$$2^x b(x) = a_0 - a_2 X_2 - a_4 X_4 - \ldots = a(x)$$

sans coefficients d'indice impair. Si nous considérons maintenant la suite autoréciproque aussi,

$$a_0 + a(0), \quad a_1 + a(1), \quad a_2 + a(2), \quad \ldots,$$

nous voyons que ses trois premiers termes sont doubles de ceux de la série des b et que ses termes d'indice pair sont nuls de sorte que nous avons

$$(31) \qquad a(n) = 2^n b_n, \qquad a_n = (2 - 2^n) b_n.$$

Si nous considérons maintenant la suite autoréciproque avec changement de signe :

$$a(0) - a_0, \quad a(1) - a_1, \quad a(2) - a_2, \quad \ldots,$$

les termes d'indice pair sont tous nuls, sauf le second. Les trois premiers, 0, 1, 1, déterminent donc toute la suite qui est par conséquent formée de nombres entiers e. On en déduit

$$e_n = a(n) - a_n = 2(2^n - 1)\, b_n, \tag{32}$$

avec les valeurs

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_4 = -1, \quad e_6 = 3, \quad e_8 = -17, \quad e_{10} = 155, \quad \ldots$$

qui permettent le calcul relativement rapide des nombres b.

13. Les nombres b se rattachent à la sommation ordonnée des puissances de x. Posons

$$\Omega x^{n-1} = \mu_1(n)x + \mu_2(n)x^2 + \mu_3(n)x^3 + \ldots \tag{33}$$

et considérons le développement illimité

$$(1+x)^p = 1 + x\,\mathrm{P}_1 - x^2\,\mathrm{P}_2 + x^3\,\mathrm{P}_3 - \ldots,$$

où P est le symbole habituel analogue à X. Cette série a pour réciproque en p :

$$(-x)^p = 1 - (x+1)\mathrm{P}_1 - (x+1)^2\mathrm{P}_2 - (x+1)^3\mathrm{P}_3 - \ldots.$$

Prenons la somme des deux expressions par rapport à x en remarquant que par définition

$$\Omega(x+1)^n = \Omega x^n - x^n.$$

La réciprocité continue par rapport à p. Par conséquent les deux suites de polynome en x :

$$\begin{array}{lllll} \Omega(1), & -\Omega(x), & \Omega(x^2), & -\Omega(x^3), & \ldots, \\ \Omega(1), & \Omega(x) - x, & \Omega(x^2) - x^2, & \Omega(x^3) - x^3, & \ldots \end{array}$$

sont réciproques.

Prenons d'abord les coefficients de x :

$$\begin{array}{lllll} \mu_1(1), & -\mu_1(2), & \mu_1(3), & -\mu_1(4), & \ldots; \\ \mu_1(1), & \mu_1(2) - 1, & \mu_1(3), & \mu_1(4), & \ldots. \end{array}$$

La valeur initiale et la réciprocité les déterminent et l'on trouve

$$\mu_1(1) = -1, \qquad \mu_1(2) = \frac{1}{2}, \qquad \mu_1(2m) = 0.$$

Ce sont donc les nombres b au signe près. On a d'ailleurs

$$[\Omega x^{n-1}]'_{x=0} = (-1)^n b_{n-1}, \tag{34}$$

et la formule [Chap. I, éq. (14)] donne aussi

$$b_n = (-1)^n n \int_0^1 \Omega x^{n-1}\, dx.$$

Le calcul se continue de la même manière pour les coefficients de x^2, x^3, ... et l'on trouve sans difficulté que d'une manière générale la succession des coefficients de la puissance x^n dans la suite (33) est toujours autoréciproque, positivement si n est pair, négativement si n est impair; elle est formée de $n-1$ zéros suivis du nombre $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ et les coefficients d'indice $n+2k+1$ sont nuls.

14. Prenons la somme ordonnée des deux termes de la formule (16) du Chapitre I :

$$X_{n+1} = \frac{\alpha_{n-1}(1)}{1!}\Omega x - \frac{\alpha_{n-2}(2)}{2!}\Omega x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{\alpha_0(n)}{n!}\Omega x^n$$

et intégrons de 0 à 1 en tenant compte de la formule trouvée plus haut (34). Il vient

$$i_{n+1} = \frac{\alpha_{n-1}(1)}{1!} b_2 + \frac{\alpha_{n-3}(3)}{4!} b_4 + \ldots,$$

et en portant ces valeurs dans la formule

$$\frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} = i_1 + i_2 z + i_3 z^2 + \ldots$$

nous trouvons, après avoir posé $1 - z = e^t$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = b_0 - b_1 \frac{t}{1!} + b_2 \frac{t^2}{2!} + b_4 \frac{t^4}{4!} + \ldots,$$

formule bien connue et qui correspond simplement, d'ailleurs, à une des formes de l'équation (14) du Chapitre I.

CHAPITRE IV.

SOMME ET FORMULES SOMMATOIRES.

1. L'opération par laquelle nous avons défini la somme ordonnée d'une fonction est purement formelle mais on peut montrer comment elle revient en fait à une sommation des valeurs de la fonction pour la suite des nombres entiers.

Reprenons la série des équations (2) du Chapitre I dont les coefficients sont formés au moyen du tableau fondamental :

$$f(x+p) = f_0^p - f_1^p X_1 - f_2^p X_2 - \dots,$$

et additionnons membre à membre depuis $p = 0$ jusqu'à $p = h - 1$. D'après la loi de formation du tableau,

$$f_0^0 + f_0^1 + \dots + f_0^{h-1} = f(0) + f(1) + \dots + f(h-1), \tag{1}$$

$$f_p^0 + f_p^1 + \dots + f_p^{h-1} = f_{p-1}^0 - f_{p-1}^h. \tag{2}$$

Posons maintenant

$$f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+h-1) = S_h(x),$$
$$f(0) + f(1) + \dots + f(h-1) = S_h(0).$$

D'autre part, remarquons que

$$f_0^0 X_1 + f_1^0 X_2 + f_2^0 X_3 + \dots = -\Omega f(x),$$
$$f_0^h X_1 + f_1^h X_2 + f_2^h X_3 + \dots = -\Omega f(x+h),$$

car ces développements illimités sont bien ce que nous avons défini comme les sommes ordonnées, le premier de $f(x)$ et le second de $f(x+h)$.

Avec ces notations la formule que nous donne l'addition des termes peut s'écrire

$$\Omega f(x) = S_h(x) - S_h(0) + \Omega f(x+h). \tag{3}$$

Son intérêt provient de ce que, en général, la série $\Omega f(x+h)$ se réduit lorsque h augmente indéfiniment à un nombre limité de termes. C'est la conséquence habituelle de la formation des différences successives.

2. Prenons sucessivement quelques cas simples. Il est évident d'abord que lorsque $\Omega f(x+h)$ tend vers zéro pour h infini la formule définit $\Omega f(x)$ comme la différence entre les sommes $S_h(x)$ et $S_h(0)$.

Ces sommes peuvent être convergentes séparément. Par exemple pour $s > 1$, on aura

$$\Omega \frac{1}{(x+a)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+a+n)^s} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s} \tag{4}$$

puisque les coefficients de $\Omega f(x+h)$ sont successivement

$$\frac{1}{(a+h)^s}, \quad \Delta \frac{1}{(a+h)^s}, \quad \ldots$$

et tendent vers zéro quand h devient infini.

Lorsque $s=1$ les deux séries $S_h(x)$ et $S_h(0)$ ne sont plus séparément convergentes, mais on pourra considérer les différences terme à terme et écrire en particulier

$$\Omega \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{x+1+n} - \frac{1}{1+n} \right], \tag{5}$$

ce qui définit la fonction $-\left[\dfrac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C\right]$.

3. Le cas où $\Omega f(x+h)$ n'a qu'un terme est à peine plus compliqué. Prenons d'abord $f = \log(1+x)$. Ici

$$f_0^h = \log(1+h), \qquad f_1^h = \log\left(1 + \frac{1}{h+1}\right),$$

et ce coefficient de même que les suivants s'annule quand h devient infini de sorte que l'on peut écrire

$$\Omega \log(1+x) = \lim \left[\log\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{h}\right) - x\log(1+h) \right], \tag{6}$$

formule qui permet d'introduire d'une manière tout à fait élémentaire la fonction $\log \Gamma(x+1)$.

4. D'une manière générale la fonction $\log^m(x+1)$ correspond pour $m > 1$ à une formule où $\Omega f(x+h)$ n'a qu'un seul terme. Par exemple pour $m = 2$:

$$f_0^h = \log^2(1+h), \qquad f_1^h = \log\frac{1+h}{2+h}\log(1+h)(2+h).$$

Ce second coefficient se réduit pour h très grand à $\frac{2\log h}{h}$ et s'annule par suite de sorte que l'on peut écrire

$$(7) \quad \Omega \log^2(1+x) = \lim[\log^2(1+x) + \log^2(2+x) + \ldots + \log^2(h+x) - (\log^2 2 + \ldots + \log^2 h) - x\log^2(h+1)].$$

5. Examinons maintenant un cas où $\Omega f(x+h)$ a deux termes. Prenons $f = \log\Gamma(1+x)$. Nous aurons ici

$$f_0^h = \log\Gamma(1+h), \qquad f_1^h = -\log(1+h), \qquad f_2^h = \log\frac{2+h}{1+h},$$

de sorte que

$$(8) \quad \Omega \log\Gamma(1+x) = \lim\left[\log\frac{\Gamma(1+x)\Gamma(2+x)\ldots\Gamma(h+x)}{\Gamma(1)\Gamma(2)\ldots\Gamma(h)} - X_1\log\Gamma(1+h) + X_2\log(1+h)\right].$$

6. Prenons le cas général de x^p où p est positif et compris entre deux entiers m et $m+1$. Il est facile de voir que $\Omega f(x+h)$ a $m+1$ termes. Soit par exemple $p = \frac{3}{2}$:

$$f_0^h = h^{\frac{3}{2}}, \qquad f_1^h = h^{\frac{3}{2}} - (h+1)^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}h^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}h^{-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

et finalement

$$(9) \quad \Omega x^{\frac{3}{2}} = \lim\left[x^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} + \ldots + (x+h-1)^{\frac{3}{2}} - \left(1^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + \ldots + (h-1)^{\frac{3}{2}}\right) - h^{\frac{3}{2}}X_1 + \frac{3}{2}h^{\frac{1}{2}}X_2\right].$$

7. Nous allons maintenant utiliser la formule (3) pour la détermination de la somme $S_h(0)$ que nous avons définie d'abord

comme étant pour h très grand la somme

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(h-1).$$

Une première expression de $S_h(0)$ s'obtient en faisant $x=h$ dans la formule (3) qui s'écrira

$$(10)\qquad S_h(0)+[\Omega f(x)]_{x=h}=S_h(h)+[\Omega f(x+h)]_{x=h}=0.$$

C'est évidemment une simple identité que l'on peut vérifier de bien des manières. La suivante montre bien comment cette identité se rattache à la formation des termes du tableau fondamental. On a en effet

$$[\Omega f(x+h)]_{x=h}=-[f_0 H_1+f_2 H_2+\ldots+f_h H_h],$$

les autres termes étant nuls pour $x=h$.

Si l'on remplace les coefficients f_n par leurs valeurs

$$f_n=f(0)-N_1 f_{(1)}-N_2 f_{(2)}-\ldots-N_n f(n),$$

on trouve que (10) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&-f(0)[H_1+H_2+H_3+\ldots+H_h],\\
&+f(1)[\quad H_2+2H_3+\ldots+(h-1)H_h]\\
&+f(2)\left[\quad H_3+\ldots+\frac{(h-1)(h-2)}{2}H_h\right],\\
&+\ldots.
\end{aligned}$$

Or si nous nous reportons aux formules (7) du Chapitre III relatives aux développements de zéro, nous voyons que le coefficient de $f(0)$ est toujours 1 pour $h>0$, que celui de $f(1)$ est toujours -1 pour $h>1$ et ainsi de suite de sorte que l'identité (10) est toujours vérifiée.

8. L'application au cas où $f=x^p$, p étant un entier positif, est immédiate. Les formules (9) du Chapitre I donnent les développements de f en série de Newton et par suite la formation de Ωf est immédiate. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+h-1&=-H_2,\\
1^2+2^2+\ldots+(h-1)^2&=-H_2+2H_3,\\
1^3+2^3+\ldots+(h-1)^3&=-H_2+6H_3-6H_4,\quad\text{etc.},
\end{aligned}$$

et d'une manière générale pour p positif quelconque

$$1^p + 2^p + \ldots + (h-1)^p$$
$$= -1^p H_2 + (-2.1^p + 2^p) H_3 + (-3.1^p + 3.2^p - 3^p) H_4 + \ldots.$$

9. Dans le cas général où $\Omega f(x)$ n'est pas connue, la formule (3), par cela même qu'elle correspond à une simple identité, est d'une application sans avantage généralement. Mais il n'en est plus de même si la somme ordonnée de f est une fonction connue ou déterminée par ailleurs.

Par exemple, on aura :

1° $$\Omega a^x = \frac{a^x - 1}{1-a}, \qquad 1 + a + \ldots + a^{h-1} = \frac{1-a^h}{1-a},$$

$$\Omega\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - c, \qquad 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{h-1} = \frac{\Gamma'(1+h)}{\Gamma(1+h)} + C.$$

2° $$\Omega\, 2^{-x} X_n = 2^{-x+1}[X_n - X_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} X_1 + (-1)^{n-1}] + (-1)^n 2$$

[Chap. III, éq. (16)].

Pour $n = 1$,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{h-1}{2^{h-1}} = -\frac{h+1}{2^{h-1}} + 2.$$

Pour $n = 2$,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2h-1}{2^{h-1}} = -\frac{h(h+1)-2}{2^h} + 2,$$

et pour h infini la limite est toujours 2.

3° $$\Omega \log\left[1 - \frac{1}{(2+x)^2}\right] = \log\frac{1+x}{2+x} - \log\frac{1}{2},$$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{h^2}\right) = \frac{h+1}{2h}.$$

4° On peut généraliser l'exemple qui précède en remarquant que

$$\Omega \log(x+a) = -\log\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}.$$

Par suite, si l'on pose

$$P(x) = \left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(x+1)^3}\right).$$

On aura d'abord

$$-\Omega \log[1-(x+2)^{-3}] = \log \frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(x+x_2)\,\Gamma(x+x_3)}{\Gamma^3(x+2)\,\Gamma(x_2)\,\Gamma(x_3)},$$

les trois valeurs 1, x_2 et x_3 étant déterminées par l'équation

$$(x+2)^3-1 = (x+1)(x+x_2)(x+x_3).$$

Pour h quelconque,

$$\mathrm{P}(h) = \frac{\Gamma(h+1)\,\Gamma(h+x_2)\,\Gamma(h+x_3)}{\Gamma^3(h+2)\,\Gamma(x_2)\,\Gamma(x_3)},$$

et pour h infini,

$$\lim \mathrm{P}(h) = \frac{1}{\Gamma(x_2)\,\Gamma(x_3)} = \frac{6\pi}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}} = 0,809\ldots.$$

5° On trouvera de même en partant de

$$\Omega \log\left[1-\left(\frac{a}{x+b}\right)^2\right]$$

la valeur du produit

$$\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\left[1-\frac{a^2}{(b+1)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{a^2}{(b+h)^2}\right]\cdots = \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\,\Gamma(b+a)},$$

et pour $b=1$, on retombe sur l'égalité bien connue

$$\Gamma(1-a)\,\Gamma(1+a) = \frac{\pi a}{\sin \pi a}.$$

10. Reprenons maintenant la formule (10) et cherchons une nouvelle expression de $\mathrm{S}_h(0)$ dans laquelle figurera cette fois la fonction

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx. \tag{11}$$

Pour cela, intégrons les deux membres de (10) de 0 à 1 en remarquant que

$$\int_0^1 \mathrm{S}_h(x)\,dx = \int_0^h f(x)\,dx.$$

Nous obtenons la relation

$$(12)\quad S_h(0) - \int_0^h f(x)\,dx - \int_0^1 \Omega f(x+h)\,dx = -\int_0^1 \Omega f(x)\,dx$$

que nous pouvons écrire en nous reportant aux formules (25) du Chapitre I :

$$(12\,bis)\quad \begin{aligned} S_h(0) - \int_0^h f\,dx + i_1 f_0^h + i_2 f_2^h + i_3 f_3^h + \ldots \\ = i_1 f_0 + i_2 f_1 + i_3 f_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Lorsque $S_h(0)$ est finie pour h infini son expression est très précise. On a en effet, d'une part,

$$f_0^h = f_1^h = f_2^h = \ldots = 0$$

et, d'autre part,

$$(13)\quad \int_0^\infty f(x)\,dx = \varphi_0,$$

φ_0 désignant une constante qui peut être nulle de sorte que $S_h(0)$ a finalement pour expression

$$(14)\quad S_h(0) = \varphi_0 + i_1 f_0 + i_2 f_1 + i_3 f_2 + \ldots.$$

11. Comme application simple, prenons le cas de la fonction supposée développée en série de Newton

$$(15)\quad (x+1)^{-s} = \sigma_0 - \sigma_1 X_1 - \sigma_2 X_2 - \ldots.$$

Il est évident que, pour $s > 1$, le coefficient f_0^h qui est égal à $(h+1)^{-s}$ est nul ainsi que les coefficients suivants. D'autre part,

$$(16)\quad \varphi_0 = \int_0^\infty (x+1)^{-s}\,dx = \frac{1}{s-1},$$

de sorte que l'on a ici

$$(17)\quad S_h(0) = \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + i_1\sigma_0 + i_2\sigma_1 + i_3\sigma_2 + \ldots.$$

Comme autre exemple prenons la fonction a^x pour $a < 1$. On a immédiatement

$$\varphi_0 = \int_0^\infty a^x\,dx = -\frac{1}{\log a}, \qquad f_n = (1-a)^n,$$

et par suite,

$$S_h(0) = -\frac{1}{\log a} + i_1 + i_2(1-a) + i_3(1-a)^2 + \ldots.$$

En comparant avec la formule (8) du Chapitre I, on retrouve pour $S_h(0)$ la valeur $\frac{1}{1-a}$.

12. Lorsque l'on connaît le développement en série de Newton de l'intégrale

$$(18) \qquad \int_0^x f(x)\,dx = -\varphi_1 X_1 - \varphi_2 X_2 - \varphi_3 X_3 - \ldots,$$

on peut transformer la formule (8) de manière à éviter l'emploi des coefficients i. Les formules (28) du Chapitre I montrent que l'on a

$$i_1 f_0 + i_2 f_1 + i_3 f_2 + \ldots = -\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{3} + \frac{\varphi_3}{4} + \ldots\right),$$

ce qui conduit à la deuxième expression

$$(19) \qquad S_h(0) - \varphi_0^h - \frac{\varphi_1^h}{2} - \frac{\varphi_2^h}{3} - \ldots = -\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_2}{3} - \ldots,$$

φ_0 ayant la même signification que précédemment.

Cette formule peut aussi s'écrire

$$S_h(0) + [\Omega\varphi(x+h)]'_{x=0} = [\Omega\varphi(x)]'_{x=0},$$

et sous cette forme nous voyons immédiatement que si dans la formule (8) nous avions considéré la fonction φ et les sommes $\sigma(x)$ et $\sigma(0)$ relatives à cette fonction il aurait suffi de dériver par rapport à x et de faire $x = 0$ pour retomber sur l'expression précédente :

Comme application simple reprenons l'équation (15). Il est à peu près évident que la fonction φ a la même forme que f. Il sera donc plus rapide d'écrire

$$\Omega(x+1)^{-s} = -(\sigma_0 X_1 + \sigma_1 X_2 + \sigma_2 X_3 + \ldots).$$

En dérivant et en faisant $x = 0$ nous trouvons

$$s\zeta(s+1) = \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2} + \ldots$$

ou encore

$$(20) \qquad (s-1)\zeta(s) = \sigma_0(s-1) + \frac{\sigma_1(s-1)}{2} + \frac{\sigma_2(s-2)}{3} + \ldots.$$

C'est cette dernière formule, du reste, que nous aurait donné la méthode indiquée ci-dessus, après usage de diverses relations entre les coefficients $\sigma(s)$ et $\sigma(s-1)$.

13. Les formules (14) et (19) ne conduisent pas à des calculs très rapides; on peut dans la pratique remplacer les séries primitives par d'autres plus convergentes en opérant de la manière suivante : Soit k un nombre aussi grand que le permettra le calcul direct de la somme

$$S_k(0) = f(0) + f(1) + \ldots + f(k-1),$$

on aura les deux égalités

$$S_k(0) = \int_0^k f(x)\,dx - (i_1 f_0^k + i_2 f_1^k + \ldots) - \int_0^1 \Omega f(x)\,dx,$$

$$S_h(0) = \int_0^h f(x)\,dx - (i_1 f_0^h + i_2 f_1^h + \ldots) - \int_0^1 \Omega f(x)\,dx,$$

et par suite

$$(21) \qquad S_h(0) = S_k(0) + \int_k^h f(x)\,dx + (i_1 f_0^k + i_2 f_1^k + \ldots) - (i_1 f_0^h + i_2 f_1^h + \ldots).$$

La dernière parenthèse n'a qu'un nombre limité de termes dans le cas général et elle se réduit même à zéro quand la somme cherchée est convergente; il est donc certain que l'avant-dernière parenthèse n'aura qu'une valeur très faible pour k suffisamment grand et qu'elle pourra se calculer au moyen d'un petit nombre de termes.

Comme application, calculons $\zeta(3)$, c'est-à-dire la somme des inverses des cubes des nombres entiers. On a ici

$$f = \frac{1}{(x+1)^3}, \qquad \varphi = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2},$$

et en prenant par exemple $k = 10$ on trouve

$$s_k = 1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{9^3} = 1,19653199,$$

$$\frac{1}{20} + i_1 \frac{1}{\overline{10}^3} + i_2 \Delta \frac{1}{\overline{10}^3} + i_3 \Delta_2 \frac{1}{\overline{10}^3} = 0,0055239o,$$

soit pour ζ_3 la valeur approchée $1,202056$.

14. Lorsque les trois expressions

$$S_h(0), \quad \int_0^h f\,dx, \quad \int_0^1 \Omega f(x+h)\,dx$$

ou tout au moins la première et l'une des deux autres grandissent indéfiniment avec h les formules (12) et (21) peuvent être utilisées pour des calculs de limite comme on le voit par les exemples suivants :

a. Prenons la fonction $\frac{1}{1+x}$. On a ici

$$S_h(0) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{h}, \qquad \int_0^h \frac{dx}{1+x} = \log(1+h),$$

$$f_0^h = f_1^h = \ldots = 0,$$

$$-\Omega\frac{1}{1+x} = \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \ldots.$$

La formule (12) nous donne

$$\lim\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{h} - \log(1+h)\right] = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

et la formule (12 *bis*) donne pour la même limite la série

$$i_1 + \frac{i_2}{2} + \frac{i_3}{3} + \ldots = C, \tag{22}$$

C étant la constante d'Euler.

D'autre part la seconde méthode conduit au résultat suivant :

$$\varphi = -l_1X_1 - l_2X_2 - l_3X_3 - \ldots,$$

$$C = -\frac{l_1}{2} - \frac{l_2}{3} - \frac{l_3}{4} - \ldots. \tag{23}$$

Les deux séries trouvées pour C peuvent d'ailleurs se ramener l'une à l'autre au moyen des relations [Chap. I, éq. (27)].

b. Prenons la fonction $\log(1+x)$:

$$S_h(0) = \log h!, \qquad \int_0^h f\,dx = (h+1)\log(h+1) - h,$$

$$\Omega f = -\log\Gamma(x+1) = -l_1X_2 - l_2X_3 - l_3X_4 - \ldots,$$

$$f_0^h = \log(h+1), \qquad f_1^h = f_2^h = \ldots = 0,$$

la formule (12) donne comme expression de la limite :

$$\lim\left[\log h! - (h+1)\log(h+1) + h + \frac{1}{2}\log(h+1)\right] = \int_0^1 \log\Gamma(x+1)\,dx$$

et la formule (12 *bis*) exprime cette valeur par la série

$$i_2 l_1 + i_3 l_2 + i_4 l_3 + \ldots = \log\sqrt{2\pi} - 1, \tag{24}$$

d'après la formule de Stirling.

La deuxième méthode conduit à des résultats analogues. En appliquant la formule (32) du Chapitre I, on trouve, en effet :

$$\begin{aligned}\int_0^x f(x)\,dx &= (x+1)\log(x+1) - x \\ &= -(2l_1+1)X_1 + (3l_2 - 2l_1)X_2 + (4l_3 - 3l_2)X_3 + \ldots\end{aligned}$$

et finalement, en tenant compte du résultat précédent,

$$\frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{4} + \frac{l_3}{5} + \ldots = -\log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}. \tag{25}$$

Les relations (28) du Chapitre I ramènent ces deux résultats l'un à l'autre et l'on trouve aussi après un calcul facile :

$$i_2 + \frac{i_3}{2} + \frac{i_4}{3} + \ldots = \log\sqrt{2\pi} - \frac{C+1}{2}. \tag{26}$$

c. Considérons maintenant le cas de la fonction $(x+1)^p$, p étant cette fois un nombre positif compris entre deux entiers m et $m+1$. Le développement en série de Newton,

$$(x+1)^p = \pi_0 - \pi_1 X_1 - \pi_2 X_2 - \ldots, \tag{27}$$

a ses coefficients qui décroissent indéfiniment (§ 6).

Nous aurons à conserver les $m+1$ coefficients

$$f_0^h = (h+1)^p, \qquad f_1^h = (h+1)^p - (h+2)^p, \qquad f_2^h = \ldots.$$

Nous aurons d'autre part

$$\int_0^h (x+1)^p\,dx = \frac{(h+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

Dans ces conditions nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}\lim\left[S_h(0) - \frac{(h+1)^{p+1}}{p+1} + i_1 f_0^h + i_2 f_1^h + \ldots + i_m f_m^h\right] \\ = -\frac{1}{p+1} + i_1\pi_0 + i_2\pi_1 + i_3\pi_2 + \ldots.\end{aligned} \tag{28}$$

Sous cette forme le deuxième membre est identique au deuxième membre de la formule (17) où l'on aurait fait $s = -p$. On pourra donc définir la fonction $\zeta(-p)$ comme étant la limite pour h infini du premier membre et le deuxième membre en fournit une première expression.

Nous en aurons une deuxième par l'emploi de la deuxième méthode et nous trouverons après un calcul sans difficulté

$$(29)\quad \lim\left[1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + h^{p-1} - \frac{1}{p}\left(f_0^h + \frac{f_1^h}{2} + \ldots + \frac{f_m^h}{m+1}\right)\right] = -\frac{1}{p}\left(\pi_0 + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} + \ldots\right),$$

ce qui correspond à la formule (20).

Nous devons faire toutefois au sujet des formules qui précèdent une remarque importante; nous avons eu soin de faire passer dans le second membre le terme $\frac{1}{p+1}$ qui correspond à l'expression φ_0 des formules générales. Cette précaution était indispensable pour assurer la continuité entre les formules (28) et (17) d'une part et (29) et (20) d'autre part.

d. Prenons maintenant la fonction x^p dont le développement en série de Newton, que nous avons d'ailleurs déjà rencontré pour le cas de p entier, peut s'écrire :

$$(30)\qquad x^p = \pi_0 X_1 + (\pi_0 + \pi_1) X_2 + (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) X_3 + \ldots,$$

les coefficicnts π étant ceux de (27) comme on le vérifierait en remarquant que

$$x^p - \Delta x^p = (x+1)^p.$$

Nous aurons ici (en mettant $h+1$ au lieu de h)

$$(31)\quad \lim\left[1^p + 2^p + \ldots + h^p - \frac{(h+1)^{p+1}}{p+1} + i_1 f_0^{h+1} + \ldots + i_m f_m^{h+1}\right] = -[i_1\pi_0 + i_2(\pi_0+\pi_1) + i_3(\pi_0+\pi_1+\pi_2) + \ldots]$$

ou encore

$$\lim\left[1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + h^{p-1} - \frac{(h+1)^p}{p} + f_0^{h+1} + \frac{1}{2} f_1^{h+1} + \ldots + \frac{1}{m+1} f_m^{h+1}\right] = -\left[\pi_0 + \frac{\pi_0+\pi_1}{2} + \frac{\pi_0+\pi_1+\pi_2}{3} + \ldots\right].$$

15. La notation φ_0 se justifie non seulement par la forme des formules (13) et (19) mais encore par les considérations suivantes. La fonction réciproque de f peut s'écrire :

$$f_x = f(0) - f(1)X_1 - f(2)X_2 - \ldots$$

et si $S_h(0)$ est convergent, on a pour $x = -1$

$$f_{-1} = S_h(0) = -\varphi_0 + i_1 f_0 + i_2 f_1 + i_3 f_2 + \ldots$$

et l'on peut écrire

$$\varphi_0 = i_0 f_{-1} + i_1 f_0 + i_2 f_1 + \ldots,$$

formule qui prolonge le groupe général [Chapitre I, (27)]

$$\varphi_n = i_0 f_{n-1} + i_1 f_n + i_2 f_{n+1} + \ldots.$$

On peut d'ailleurs utiliser la forme f_{-1} pour le calcul de certaines sommes. Par exemple si l'on prend

$$f = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}, \qquad \mathrm{R}f = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{1}{x+n}.$$

On trouve

$$\frac{1}{(n-1)!(n-1)} = \frac{1}{1.2\ldots n} + \frac{1}{2.3\ldots(n+1)} + \frac{1}{3.4\ldots(n+2)} + \ldots.$$

Il peut arriver que certaines formes de f_{-1}, dépendant d'un paramètre a, gardent une valeur finie lorsque, a quittant l'intervalle où la somme était finie, le développement auquel il correspond devient infini. Pour $f = a^x$

$$f_x = (1-a)^x, \qquad f_{-1} = \frac{1}{1-a}$$

et cette valeur reste finie même lorsque a est plus grand que un.

16. On voit par ce qui précède que, le terme φ_0 mis à part, toutes les limites dépendent de la somme

$$-\int_0^1 \Omega f\,dx = i_1 f_0 + i_2 f_1 + i_3 f_3,$$

dont la valeur s'obtient très simplement en remplaçant dans la série de Newton X_m par i_{m+1}.

En général cette substitution conduit à des formules peu convergentes mais on peut, pour faciliter le calcul, utiliser l'égalité

$$-\int_0^1 \Omega f\,dx = S_k(0) - \int_0^1 f\,dx + i_1 f_0^k + i_2 f_1^k + \ldots,$$

en prenant k assez grand pour que les termes f_0^k et suivants décroissent rapidement.

Supposons que nous ayons à calculer

$$-\int_0^1 \Omega\,\frac{\log(1+x)}{1+x} = \lim\left(\frac{\log^2 2}{2} + \ldots + \frac{\log^2 h}{h} - \frac{1}{2}\log^2(h+1)\right].$$

Le développement indiqué au Chapitre VII est peu avantageux mais par la méthode indiquée ici et en faisant seulement $k = 9$ nous aurons

$$\begin{aligned}
&\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \ldots + \frac{\log 9}{9} &&= 2{,}46192,\\
&i_1\,\frac{\log 9}{9} + i_2\Delta\,\frac{\log 9}{9} + i_3\Delta^2\,\frac{\log 9}{9} &&= \underline{0{,}11621}\\
& &&\ 2{,}57813\\
&\frac{1}{2}\log^2 10 &&= 2{,}65095,
\end{aligned}$$

ce qui donne déjà la valeur 0,07282 au lieu de 0,0728158.

Il est naturel d'essayer d'utiliser les résultats précédents pour la détermination d'une valeur qui correspondrait utilement à la somme illimitée $S_h(0)$ lorsque cette dernière est divergente. L'adoption d'une des deux expressions

$$-\varphi_0 - \int_0^1 \Omega f\,dx$$

ou

$$-\varphi_0 - [\Omega\varphi]'_{x=0}$$

paraît logique mais renferment toutes deux le terme φ_0 qui reste à préciser. Dans la pratique on peut le déterminer quelquefois par continuité, par exemple, comme nous l'avons vu, lorqu'il est fonction d'un paramètre a et que l'intégrale (13) est finie dans un certain intervalle de variation de ce paramètre; φ_0 prend alors une valeur qui peut rester finie même pour les valeurs de a qui rendraient l'intégrale infinie. Il paraît douteux qu'on puisse sans convention artificielle aller plus loin dans le cas général.

Une autre difficulté résulte du choix de la fonction $f(x)$ dont les valeurs, pour les nombres entiers consécutifs, reproduiront la suite divergente donnée. Si, l'on considère par exemple la succession 1^3, 2^3, 3^3, ..., on voit par les exemples qui précèdent (**14**, c et d) que le choix de la fonction

$$(x+1)^3 = 1 + 7X_1 - 12X_2 + 6X_3,$$

ou celui de la fonction

$$x^3 = X_1 - 6X_2 + 6X_3,$$

qui correspond à la suite 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, ..., équivalente en apparence à la première, conduisent non seulement à deux expressions différentes mais à deux expressions auxquelles il faudra appliquer des modes de calculs différents.

CHAPITRE V.

SOMMES ALTERNÉES.

1. Nous avons utilisé l'opération Ωf pour l'étude des sommes ordinaires. Nous allons nous servir dans des conditions analogues de l'opération $\Omega \cos \pi x f(x)$ définie au Chapitre II et plus particulièrement de la fonction $\Theta f(x)$ pour l'étude des sommes alternées

$$f(x) - f(x+1) + f(x+2) - \ldots.$$

Nous appellerons d'abord pour simplifier la fonction $\Theta f(x)$ la somme alternée *réduite* de la fonction f.

Nous avons trouvé que cette fonction

$$\Theta f(x) = t_0 - t_1 X_1 - t_2 X_2 - \ldots \tag{1}$$

avait pour coefficients

$$t_n = \frac{f_n}{2} + \frac{f_{n+1}}{2^2} + \frac{f_{n+2}}{2^3} + \ldots \tag{2}$$

ou encore

$$t_n = 2 t_{n+1} - f_n = 2^n t_0 - 2^{n-1} f_0 - \ldots - 2^0 f_{n-1}$$

et qu'elle pouvait être définie par l'équation fonctionnelle

$$2\Theta f(x) - \Delta\Theta f(x) = f(x) = [\Theta f](x) + [\Theta f](x+1). \tag{3}$$

On peut remarquer dès à présent que l'opération Θ est susceptible du même calcul formel que l'opération Ω. On a par exemple :

$$\Theta' f = \Theta f', \qquad \Delta\Theta f = \Theta \Delta f. \tag{4}$$

Considérons maintenant la somme alternée directe et arrêtée à un terme très grand

$$T_h f(x) = f(x) - f(x+1) + \ldots + (-1)^{h-1} f(x+h-1), \tag{5}$$

qui satisfait à une équation analogue à (3)

(6) $$2T_h - \Delta T_h = f(x) + (-1)^h f(x+h).$$

Lorsque $f(x+h)$ tend vers zéro les deux équations fonctionnelles coïncident et en écartant la solution périodique qui correspond à $2\Theta - \Delta\Theta = 0$, on voit que $\Theta f(x)$ est la limite de $T_h f(x)$.

2. On trouve dans ce cas, pour $x = 0$,

(7) $$\begin{aligned} \lim T_h f(x)_{x=0} &= f(0) - f(1) + f(2) - \ldots \\ &= \frac{f_0}{2} + \frac{f_1}{2^2} + \frac{f_2}{2^3} + \ldots = t_0. \end{aligned}$$

Il n'est pas possible de vérifier cette égalité importante par un calcul formel au moyen des relations fondamentales du Chapitre I, car en réalité l'égalité susceptible d'être appliquée à tous les cas est celle que nous retrouverons plus loin (30). On peut cependant l'établir, sous certaines conditions, au moyen des considérations suivantes.

Prenons les deux développements :

$$\begin{aligned} f &= -f_0 X_0 - f_1 X_1 - f_2 X_2 - \ldots, \\ \varphi &= -f_0 X_0 + f_1 X_1 - f_2 X_2 + \ldots, \\ \varphi_{2n} &= f_{2n}, \qquad \varphi_{2n+1} = -f_{2n+1}. \end{aligned}$$

Les deux combinaisons

$$2^{-x}(f+\varphi), \qquad 2^{-x}(f-\varphi)$$

sont autoréciproques, l'une positivement, l'autre négativement, de sorte que l'on peut écrire

(8) $$2^{-x}(f+\varphi) = -\frac{f(0)+\varphi(0)}{2^0} X_0 - \frac{f(1)+\varphi(1)}{2^1} X_1 - \ldots,$$

(9) $$2^{-x}(f-\varphi) = \frac{f(0)-\varphi(0)}{2^0} X_0 + \frac{f(1)-\varphi(1)}{2^1} X_1 + \ldots$$

et l'on a par suite

(10) $$\varphi(x) = -2^{-x}\left[f(0)X_0 + \frac{f(1)}{2} X_1 + \frac{f(2)}{2^2} X_2 + \ldots\right].$$

Si l'on compare maintenant les deux valeurs de φ pour $x = -1$, on trouve

$$(11) \qquad f_0 - f_1 + f_2 - \ldots = \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2^2} + \frac{f(2)}{2^3} + \ldots,$$

ce qui revient à la relation (7).

La formule (11) est d'ailleurs susceptible de nombreuses applications.

a. Examinons quelques exemples simples où la vérification directe de (10) peut se faire aisément. Dans le cas de $f = \frac{1}{1+x}$ elle se traduit par

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = 1 . \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \ldots$$

ou encore

$$\log 2 = -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

La même vérification conduirait pour les fonctions λ du Chapitre III à l'égalité évidente :

$$\log^n 2 = (-1)^n \log\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

b. Prenons encore la fonction [Chap. I (37)]

$$i_{x+2} = i_2 - i_3 X_1 - i_4 X_2 - \ldots.$$

Nous aurons à vérifier

$$(12) \qquad i_2 - i_3 + i_4 - \ldots = \frac{i_2}{2} + \frac{i_3}{4} + \frac{i_4}{8} + \ldots.$$

Or si dans le développement

$$\frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2} = i_2 z + i_3 z^2 + i_4 z^3 + \ldots,$$

nous donnons successivement à z les valeurs -1 et $\frac{1}{2}$ nous retrouvons l'égalité dont il s'agit.

c. Pour $f = a^x$ la relation correspond à

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1-a}{4} + \frac{(1-a)^2}{8} + \ldots$$

ou encore

$$\frac{1}{1+a} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-a}{2}\right)^{-1},$$

égalité évidente.

3. La formule (10) du Chapitre précédent s'applique tout particulièrement au produit $\cos \pi x f(x)$.

En partant de

$$\Omega \cos \pi x f(x) = - t_0 + \cos \pi x \Theta f(x),$$

on a pour toute valeur entière de h :

$$(13) \qquad \begin{aligned} \mathrm{T}_h(0) &= f(0) - f(1) + \ldots + (-1)^{h-1} f(h-1) \\ &= -[\Omega \cos \pi x f(x)]_{x=h} = t_0 - \cos \pi h [\Theta f(x)]_{x=h}. \end{aligned}$$

Les substitutions successives $h = i$, 2, 3, ... ne font, d'ailleurs, que redonner des relations déjà connues (2).

Le dernier membre de (13) se compose de deux parties, l'une fixe et l'autre variable avec h. Les variations de ce terme dépendent de la nature de f. Dans l'hypothèse simple où f est toujours positif et décroissant, la série du premier membre est convergente et tend vers t_0; Θ tend vers zéro pour h infini. Lorsque, au contraire, la suite alternée est divergente, t_0 restant convergent, Θ tend vers l'infini.

On peut vérifier la formule (13) sur des exemples simples.

Soit $f = x$; on a ici

$$0 - 1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^{h-1}(h-1) = -\frac{1}{4} + \cos \pi h \left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right)$$

et des formules analogues pour $f = \mathrm{X}_n$.

Pour $f = a^x$, on obtient

$$(14) \qquad 1 - a + a^2 - \ldots + (-1)^{h-1} a^{h-1} = \frac{1}{1+a} - \cos \pi h \frac{a^h}{1+a}.$$

4. La formule (3) donne un moyen d'établir formellement le développement de Θ en série de Newton. D'autre part, lorsqne T est convergent et coïncide, par conséquent avec Θ, il est souvent possible de le former directement.

Par exemple pour $f = \frac{1}{x+1}$, nous avons immédiatement

$$(15) \qquad \begin{aligned} T &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \ldots \\ &= \log 2 - \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On n'a plus qu'à égaler ces séries avec la série de Newton obtenue par la formule (3) :

$$(16) \qquad \begin{aligned} \Theta = \log 2 - (2\log 2 - 1)X_1 - \left(4\log 2 - 1 - \frac{1}{2}\right)X_2 \\ - \left(2^n \log 2 - 2^{n-1} - 2^{n-2}\frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right)X_n - \ldots. \end{aligned}$$

Les valeurs numériques

$$t_0 = \log 2, \qquad t_1 = 2\log 2 - 1, \qquad t_2 = 4\log 2 - \frac{5}{2},$$

$$t_3 = 8\log 2 - \frac{16}{3}, \qquad t_4 = 16\log 2 - \frac{131}{12}, \qquad t_5 = 32\log 2 - \frac{661}{30}, \qquad \ldots$$

sont faiblement décroissantes, car $\Theta(-1)$ est infini.

En intégrant la formule (15) de 0 à 1, on retrouve d'ailleurs la formule de Wallis :

$$(17) \qquad \log \frac{2}{1}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{4} - \ldots = \log 2 + 2\log\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \log\frac{\pi}{2}.$$

5. Cette même inégalité permet de calculer les différentes valeurs de $\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}$ pour $x = 2^m$.

On a d'abord, en faisant $x = 1$:

$$\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)} = 2 - 2\log 2 - C = 0{,}03649\ldots$$

Ensuite, en faisant $x = \frac{1}{2}$, et remarquant que

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots = 1 - \frac{\pi}{4},$$

on trouve

$$\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 4 - \frac{\pi}{2} - 3\log 2 - C = -0{,}22745\ldots.$$

Pour $x = \frac{1}{4}$, on a à calculer :

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \ldots = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\pi + \log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{8}\right)} = 8 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pi + \log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) - 4\log 2 - \frac{\pi}{2} - C = -0{,}3875\ldots.$$

La suite du calcul conduit aux évaluations successives des intégrales de la forme

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

que l'on peut théoriquement exprimer sous forme finie.

6. Nous pouvons obtenir une autre forme de la fonction Θ relative à $\frac{1}{1+x}$ de la manière suivante :

Partons de l'équation

$$V = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{Y_1}{x+2} - \frac{Y_2}{x+3} - \ldots.$$

Formons directement la somme alternée par rapport à y :

$$V(x, 0) - V(x, 1) + V(x, 2) - \ldots$$

en remarquant que

$$V(x, m) = \frac{m!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m+1)} = \xi_m,$$

ce qui donne, par suite,

$$T = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \ldots,$$

D'autre part, d'après la formule générale, nous aurons aussi :

$$\Theta = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2^2(x+2)} + \frac{1}{2^3(x+3)} + \ldots,$$

ce qui nous conduit à la relation

$$(18) \qquad \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \ldots = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{8(x+3)} - \ldots$$

et en intégrant de 0 à 1,

$$(19) \qquad -l_1 + l_2 - l_3 + \ldots = \left(\frac{\log 2}{2^2} + \frac{\log 3}{2^3} + \frac{\log 4}{2^4} - \ldots\right).$$

Si, maintenant, nous prenons la réciproque des deux membres, nous avons finalement

$$(20) \qquad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \ldots = \frac{\xi_1}{2} + \frac{\xi_1}{2^2} + \frac{\xi_2}{2^3} - \ldots$$

et en intégrant de 0 à 1,

$$(21) \qquad \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{4} + \frac{l_3}{8} + \frac{l_4}{16} + \ldots = \log\frac{2}{\pi}.$$

7. La méthode suivante permet, dans un certain nombre de cas, de former $T(x)$. Écrivons d'abord :

$$T_{2h}(x) = f(x) - f(x+1) + \ldots - f(x+2h-1)$$

et ensuite, d'après la formule (3) du Chapitre IV,

$$f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+2h-1) = \Omega f + S_{2h}(0) - \Omega f(x+2h).$$

Si nous retranchons la deuxième équation de la première, nous aurons à évaluer la somme

$$f(x+1) + f(x+3) + \ldots + f(x+2h-1),$$

ce qui se fera, d'après la même formule, en posant

$$2x' = x, \qquad f(x+1) = f(2x'+1) = \varphi(x'),$$

de sorte que nous aurons

$$\varphi(x') + \varphi(x'+1) + \ldots + \varphi(x'+h-1) = \Omega\varphi + \sigma_h(0) - \Omega\varphi(x'+h).$$

La formule cherchée est donc

$$(22)\qquad T_{2h}f(x) = S_{2h}(o) - 2\sigma_h(o) + \Omega\left[f(x) - 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$
$$- \Omega\left[f(x+2h) - 2\varphi\left(\frac{x}{2}+h\right)\right],$$

Comme exemple simple, reprenons le cas de $\frac{1}{1+x}\cdot$ Nous aurons d'abord

$$S_{2h}(o) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2h}, \qquad -\Omega f = \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C.$$

D'autre part,

$$f(x+1) = \frac{1}{2(x'+1)}, \qquad \varphi(x') = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$$

et, par suite,

$$2\sigma_h = S_h, \qquad -\Omega\varphi = \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)} + C.$$

Il ne reste plus qu'à calculer

$$\lim_{h=\infty}\left[\frac{\Gamma'(1+2h)}{\Gamma(1+2h)} - \frac{\Gamma'(1+h)}{\Gamma(1+h)}\right] = (\log 2h - C) - (\log h - C) = \log 2$$

et nous retrouvons finalement la formule (15).

8. Nous avons supposé jusqu'ici que $T(x)$ était convergent. Prenons maintenant le cas général où, pour h très grand, f croît indéfiniment; on aura alors une relation de la forme

$$f(x+h) = f_0^h - f_1^h X_1 - \ldots f_m^h X_m,$$

le nombre $m+1$ des coefficients étant en général limité.

Supposons d'abord que f_0 soit le seul coefficient non nul. La suite

$$T - T_0 = [f(x) - f(o)] - [f(x+1) - f(1)] + \ldots$$
$$+ (-1)^{h-1}[f(x+h-1) - f(h-1)]$$

est convergente, et l'on a

$$\lim[T_h(x) - T_h(o)] = \Theta - t_0.$$

Formons les deux expressions

$$2(T - T_0) - \Delta(T - T_0) = f(x) - 2T_0 + (-1)^h f(x+h),$$
$$2(\Theta - t_0) - \Delta(\Theta - t_0) = f(x) - 2t_0.$$

En égalant les deuxièmes membres, et en remplaçant $f(x+h)$ par $f(h)$, nous obtiendrons la relation

$$(23) \qquad t_0 = \lim \left[T_h(0) + (-1)^{h+1} \frac{f(h)}{2} \right],$$

formule qui coïncide avec (10) lorsque $f(h)$ tend vers zéro.

Remarquons que si $T - T_0$ est connu directement, on peut déterminer t_0 au moyen de la relation

$$T(1) - T(0) - \Theta(1) - t_0 = -t_1 = f_0 - 2t_0,$$

ce qui donne

$$(24) \qquad t_0 = f_0 + \frac{T(0) - T(1)}{2}.$$

Comme application, formons au moyen du procédé indiqué plus haut (§ 7) :

$$(25) \qquad T_h(x) - T_h(0) = \log\left(1 + \frac{x}{1}\right) - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \ldots + (-1)^{h-1} \log\left(1 + \frac{x}{h}\right).$$

Nous aurons successivemeut

$$\log\left(1 + \frac{x}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \ldots + \log\left(1 + \frac{x}{2h-1}\right) = \log\Gamma(1+x) - x\log 2h,$$

$$\log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{x}{4}\right) + \ldots + \log\left(1 + \frac{x}{2h-2}\right) = \log\Gamma\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\log h.$$

D'où, finalement,

$$T - T_0 = x\log 2 - \log\Gamma(x+1) + 2\log\Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right).$$

En remarquant maintenant que

$$T(0) - T(1) = -\log 2 - 2\log\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \log\frac{2}{\pi},$$

on obtient la valeur de

$$(26) \qquad \Theta\log(1+x) = \frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi} + x\log 2 - \log\Gamma(1+x) + 2\log\Gamma\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

On peut déduire de cette formule une propriété bien connue de la fonction Γ. Il suffit d'appliquer la relation fondamentale (3), et l'on trouve une expression logarithmique qui correspond à

$$\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{x+1}{2}\right)=2^{-x}\frac{x+1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x+1),$$

ou, plus simplement,

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=2^{1-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x). \tag{27}$$

C'est la formule bien connue de Legendre.

9. Prenons ensuite le cas moins simple, où, pour h très grand, on peut écrire

$$f(x+h)=f_0^h-\mathrm{X}f_1^h=f(h)-[f(h)-f(h+1)]\mathrm{X}_1.$$

La série

$$\mathrm{T}_h(x)-\mathrm{T}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{X},\qquad \mathrm{T}_1=2\mathrm{T}_0-f_0+(-1)^h f(h)$$

est alors convergente. Opérons comme précédemment, et formons

$$\begin{aligned}&2[\mathrm{T}-\mathrm{T}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{X}]-\Delta[\mathrm{T}-\mathrm{T}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{X}]\\&\quad=f(x)+(-1)^h[f_0^h+2\mathrm{X}_1\mathrm{T}_1-f_1^h\mathrm{X}_1],\end{aligned}$$

en remplaçant $f(x+h)$ par sa valeur équivalente.

D'autre part,

$$2(\Theta-t_0+t_1\mathrm{X}_1]-\Delta(\Theta-t_0-t_1\mathrm{X}_1)=f(x)+t_1-2t_0+2\mathrm{X}_1t_0.$$

de sorte qu'on a les deux relations

$$\left\{\begin{aligned}&t_1-2t_0=\mathrm{T}_1-2\mathrm{T}_0+(-1)^h f_0^h,\\&2t_1=2\mathrm{T}_1+(-1)^{h+1}f_1^h,\end{aligned}\right. \tag{28}$$

d'où l'on tire

$$t_0=\mathrm{T}_0+(-1)^{h+1}\left[\frac{f_0^h}{2}+\frac{f_1^h}{2^2}\right]. \tag{29}$$

10. Le calcul se complique rapidement, et l'on arrive en fin de

compte à la formule générale

$$(30)\quad \frac{f_0}{2}+\frac{f_1}{2^2}+\frac{f_2}{2^3}+\ldots=\lim\Big[f(0)-f(1)+\ldots+(-1)^h f(h)$$
$$+(-1)^{h+1}\Big[\frac{f(h)}{2}+\frac{f(h)-f(h+1)}{2^2}$$
$$+\frac{f(h)-2f(h+1)+f(h+2)}{2^3}+\ldots\Big],$$

dont la vérification formelle directe n'est pas apparemment impossible.

11. La formule (30) présente un réel intérêt par ce qu'elle fait correspondre d'une manière logique une série supposée convergente t_0 à une suite T_0 qui ne l'est pas.

Nous avons déjà trouvé quelques valeurs numériques de t_0 pour des fonctions simples :

$$t_0(X_m)=-\frac{1}{2^{m+1}},\qquad t_0(y^x)=\frac{1}{1+y},$$
$$t_0[\log(1+x)]=\frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi}.$$

Prenons maintenant la série de Newton :

$$(x+1)^{-s}=\sigma_0-\sigma_1 X_1-\sigma_2 X_2-\ldots.$$

Nous aurons, d'une part, par un calcul direct, et, d'autre part, par la formule (2) :

$$(31)\qquad t_0[(x+1)^{-s}]=\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)=\frac{\sigma_0}{2}+\frac{\sigma_1}{2^2}+\frac{\sigma_2}{2^3}+\ldots,$$

ce qui donne un nouveau développement de $\zeta(s)$.

En remarquant que

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+C+C'(s-1)+\ldots,$$
$$1-\frac{1}{2^{s-1}}=(s-1)\log 2-\frac{(s-1)^2}{2^2}\log^2 2+\ldots,$$

nous aurons le développement

$$t_0[(x+1)^{-s}]=\log 2+(s-1)\left[C\log 2-\frac{\log^2 2}{2}\right]$$
$$+(s-1)^2\left[\frac{\log^2 2}{6}+C\frac{\log^2 2}{2}+C'\log 2\right]$$

et par suite, des égalités telles que

$$\frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} - \ldots = C \log 2 - \frac{\log^2 2}{2},$$

$$\frac{\log^2 2}{2} - \frac{\log^2 3}{3} + \frac{\log^3 4}{4} - \ldots = \frac{\log^3 2}{3} + C \log^2 2 + 2 C' \log 2.$$

12. La formule générale (4) permet de déduire de l'expression t_0, relative à une fonctiou, celle qui est relative à sa différence :

$$\Theta \Delta f = 2\Theta - f.$$

On a, par suite,

$$t_0[\Delta f] = t_1 = 2 t_0 - f_0,$$

$$t_0[\Delta^n f] = t_n = 2^n t_0 - 2^{n-1} f_0 - \ldots - f_{n-1}.$$

Par exemple,

$$t_0(\xi_1) = \log 2, \qquad t_0(\xi_2) = 2 \log 2 - 1, \qquad t_0(\xi_3) = 4 \log 2 - \frac{5}{2}$$

et encore

$$t_0[\log(1+x)] = \frac{1}{2} \log \frac{2}{\pi}, \qquad t_0\left[\log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)\right] = \log \frac{2}{\pi}.$$

On peut aussi opérer par dérivation,

$$t_0(y^x) = \frac{1}{1+y}, \qquad t_0[X_m y^x] = (-1)^m (1+y)^{-m},$$

ou par intégration

$$t_0\left[\frac{y^x}{x+1}\right] = \log(1+y).$$

13. Considérons la série

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots.$$

Elle définit une fonction f dans la région de x oú elle est convergente. Si nous donnons à x une valeur s non située dans cette région, la relation

$$f(s) = a_0 - a_1 s + a_2 s^2 - \ldots$$

sera purement formelle. D'autre part, le symbole

$$t_0(a_x x^s)$$

définit au moyen d'une des méthodes que nous avons indiquées une fonction qui coïncidera en général avec la fonction f dans sa région de convergence, mais qui ne sera pas forcément illusoire en dehors de cette région, de sorte qu'on pourra le considérer comme un prolongement de la fonction f.

Nous avons rencontré plusieurs exemples de ce prolongement :

$$t_0(s^x) = \frac{1}{1+s}, \qquad t_0\left(\frac{s^x}{x+1}\right) = \log(1+s,$$

$$t_0[(x+1)^{-s}] = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_1}{4} + \frac{\sigma_2}{8}.$$

Ce résultat doit, d'ailleurs, pouvoir se justifier dans chaque cas par un calcul de limite, dont les diverses formules indiquées dans ce chapitre fournissent les éléments.

CHAPITRE VI.

LES FACULTÉS ORDINAIRES ET SUPÉRIEURES.

1. Les facultés ordinaires, qui sont les différences successives de $\frac{1}{x+1}$, s'expriment facilement en séries de Newton, mais la forme simple sous laquelle elles sont définies est elle-même susceptible d'un calcul direct formel qui utilise d'ailleurs aussi les mêmes nombres généraux α et β et aussi les nombres particuliers i et l. Si nous posons

$$(1) \qquad \xi_n = \frac{(n-1)!}{(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{1}{n} - \frac{X_1}{n+1} - \frac{X_2}{n+2} - \ldots,$$

nous obtenons immédiatement un grand nombre de formules dont nous n'écrirons que les principales :

$$(2) \qquad \Delta\xi_n = \xi_{n+1}, \qquad \Omega\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{1}{n},$$

$$(3) \qquad x\xi_n = (n-1)\xi_{n-1} - n\xi_n,$$

$$(4) \qquad \frac{\xi_n}{x+1} = \frac{\xi_{n+1}}{n} + \frac{\xi_{n+2}}{n+1} + \frac{\xi_{n+3}}{n+2} + \ldots,$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}} = \alpha_0(n)\xi_{n+1} + \alpha_1(n)\xi_{n+2} + \alpha_2(n)\xi_{n+3} + \ldots, \\ \xi_{n+1} = \beta_0(n)\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}} - \beta_1(n)\dfrac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}} + \beta_2(n)\dfrac{(n+2)!}{(x+1)^{n+3}} - \ldots \end{cases}$$

et, en particulier,

$$(6) \qquad -\xi'_n = \xi_{n+1} + \frac{1}{2}\xi_{n+2} + \frac{1}{3}\xi_{n+3} + \ldots,$$

$$(7) \qquad \xi_{n+1} = i_0\xi'_n + i_1\xi'_{n+1} + i_2\xi'_{n+2} + \ldots.$$

Il faut y ajouter l'avantage qui résulte de la forme simple des fonctions réciproques des facultés

$$R_x\xi_n = \frac{1}{\alpha+n}.$$

2. On peut considérer ξ_n comme fonction de son indice. Si l'on donne à ce dernier une valeur quelconque y, ξ_{y+1} devient une fonction symétrique en x et y :

$$\xi_{y+1} = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}. \tag{8}$$

On trouve directement

$$\Delta_x \xi_{y+1} = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+2)}{\Gamma(x+y+3)},$$

$$\Omega_x \xi_{y+1} = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} - \frac{1}{y},$$

formules identiques à celles déjà trouvées pour le cas de y entier. La dernière peut servir, au moyen d'un calcul de limite très simple, à déterminer la valeur pour $y = 0$ de

$$\Omega \xi_1 = -\left[\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C\right] \tag{9}$$

et d'autres valeurs du même genre, mais nous ne nous y attarderons pas, devant rencontrer ces résultats par une voie plus simple.

Il est facile de généraliser pour y quelconque toutes les formules obtenues pour y entier. On peut aussi en obtenir de plus étendues. Par exemple, en nous reportant à la formule sommatoire (10) du Chapitre IV, nous obtenons

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_y = \frac{1}{x} - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}.$$

Il est bien évident aussi que l'on peut utiliser la relation générale (5) du Chapitre III.

En particulier, on en déduit le développement des facultés en séries des puissances de x :

$$\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = R\frac{1}{y+1} - xR\frac{1}{(y+1)^2} + x^2R\frac{1}{(y+1)^3} - \ldots,$$

$$R\frac{1}{(y+1)^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{Y_1}{2^s} - \frac{Y_2}{3^s} - \frac{Y_3}{4^6} - \ldots.$$

Ces dernières séries n'ont qu'un nombre fini de termes pour les valeurs entières de y. On trouve ainsi :

$$(10)\quad \begin{cases} \xi_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{15}{16}x^3 + \ldots, \\ \xi_2 = \frac{1}{3} - \frac{11}{18}x + \frac{85}{108}x^2 - \frac{575}{648}x^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

3. Les calculs de la série de facultés

$$f(x) = a_0 \xi_1 + a_1 \xi_2 + a_2 \xi_3 + \ldots$$

s'effectuent au moyen des formules indiquées plus haut. Par exemple,

$$(11)\quad \begin{cases} -f'_x = a_0 \xi_1 + \left(\frac{a_0}{2} + a_1\right)\xi_2 + \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + a_2\right)\xi_4 + \ldots, \\ f''_{x^2} = a_0 \xi_1 + (a_0 + a_1)\xi_2 + \left(\frac{11}{12}a_0 + a_1 + a_2\right)\xi_3 + \ldots \end{cases}$$

et ainsi de suite, les dérivées successives se formant à l'aide des coefficients α du tableau.

La somme ordonnée a pour expression

$$\Omega f = -a_0\left[\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C\right] + a_1(\xi_1 - 1) + a_2\left(\xi_2 - \frac{1}{2}\right) + \ldots,$$

et si a_0 est nul,

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots.$$

Si a_0 n'est pas nul, la série

$$\frac{a_0 + a_2}{2} + \frac{a_0 + a_3}{3} + \frac{a_0 + a_4}{4} + \ldots$$

est, en général, divergente.

4. On peut mettre une série de facultés sous la forme

$$\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{x+2} + \frac{b_2}{x+3} + \ldots$$

et inversement à l'aide de la formule (1) et de sa réciproque.

Nous rencontrerons un certain nombre de séries de ce type.

Notons, en passant, la formule

$$\frac{1}{(x+y)}\left[\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}-\frac{\Gamma'(1+y)}{\Gamma(1+y)}\right]$$
$$=\frac{1}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{(x+2)(y+2)}+\ldots,$$

dans laquelle on peut faire varier y, ce qui permet d'obtenir des relations telles que

$$\gamma_0 = x\mathrm{R}(\gamma'_1), \qquad 1+\gamma_2=(1-x)\mathrm{R}(\gamma_1-\gamma'_1),$$

γ_0 et γ_1 désignant les facultés supérieures qui seront définies plus loin.

Quant aux séries de facultés autoréciproques, elles seront évidemment des sommes linéaires des combinaisons indiquées au chapitre III, (9) et (10).

5. L'intégration de la faculté ξ_1 introduit naturellement la fonction $\log(1+x)$ dont nous avons déjà défini les coefficients l [Chap. II, éq. (1)]. Si nous posons d'une manière générale :

$$\int_0^x \xi_n\,dx = \mathrm{L}_{n-1} - l_{n-1}, \tag{12}$$

nous aurons en formant la différence $n^{\text{ième}}$ de $\log(1+x)$

$$\mathrm{L}_n = l_n - \mathrm{X}_1 l_{n+1} - \mathrm{X}_2 l_{n+2} - \ldots,$$
$$\log(x+y+1) = \mathrm{L}_0 - \mathrm{Y}_1\mathrm{L}_1 - \mathrm{Y}_2\mathrm{L}_2 - \ldots \tag{13}$$

et aussi par simple intégration de (6) et (7)

$$-\xi_n = \mathrm{L}_n + \frac{\mathrm{L}_{n+1}}{2} + \frac{\mathrm{L}_{n+2}}{3} + \ldots, \tag{14}$$
$$\mathrm{L}_n = i_0\xi_n + i_1\xi_{n-1} + i_2\xi_{n-2} + \ldots,$$

sauf pour $n=0$. Nous aurons aussi, bien entendu,

$$\Delta\mathrm{L}_n = \mathrm{L}_{n-1}, \qquad \Omega\mathrm{L}_n = \mathrm{L}_{n-1} - l_{n-1}.$$

D'autre part, nous pouvons former

$$\int_0^x \mathrm{L}_n\,dx = (x+n+1)\mathrm{L}_n - n\mathrm{L}_{n-1} - (n-1)\,l_n + nl_{n-1}$$

et en déduire par un calcul facile

$$\begin{aligned} i_1 L_n + i_2 L_{n+1} + \ldots &= (x + n + 1) L_n - (n - 1) L_{n-1}, \\ i_1 l_n + i_2 l_2 \quad + \ldots &= (n + 1) l_n - (n - 1) l_{n-1}. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$ le deuxième membre de cette dernière équation se réduit à $2 l_1 + 1$ et pour $n = 0$, on a, comme nous le verrons,

$$i_2 l_1 + i_3 l_2 + i_4 l_3 + \ldots = \log \sqrt{2\pi} - 1.$$

6. Les sommes successives de ξ_1 ne sont plus des facultés proprement dites. Nous les appellerons facultés supérieures et les désignerons suivant leur rang par la notation $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Nous avons déjà rencontré [Chap. IV, éq. (5)] la première d'entre elles γ_0 qui a pour expression

$$(15) \qquad \gamma_0 = -\left[\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C\right] = -X_1 - \frac{X_2}{2} - \frac{X_3}{3} - \ldots.$$

Le développement de γ_n en série de Newton résulte immédiatement de l'équation précédente mais on peut le mettre sous une forme plus réduite. La méthode la plus simple consiste à utiliser la relation

$$\Omega^2 \frac{1}{1+x} + x\Omega \frac{1}{1+x} = \Omega(1),$$

ce qui nous donne, en opérant de proche en proche,

$$(16) \qquad \gamma_{n-1} = -X_{n-1}\left(\gamma_0 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right).$$

On a d'ailleurs les relations générales

$$\begin{aligned} X_n &= i_0 \gamma_0 + i_1 \gamma_1 + i_2 \gamma_2 + \ldots, \\ \xi_n &= i_1 \xi_{n-1} + \ldots + i_{n-1} \xi_1 + i_n \gamma_0 + i_{n+1} \gamma_1 + \ldots. \end{aligned}$$

Les facultés

$$\ldots, \quad \gamma_2, \quad \gamma_1, \quad \gamma_0, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots$$

forment une suite illimitée dans les deux sens, qui se continue en allant de gauche à droite par différences successives.

7. Nous avons laissé de côté la faculté singulière $\frac{1}{x}$. Ses différences se forment immédiatement mais pour sa somme ordonnée

une difficulté se présente. La méthode employée pour ξ, ne peut être utilisée car la suite

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots$$

ne peut pas être rendue nulle pour $x = 0$ par l'adjonction d'une simple constante.

On peut avoir recours aux formules (5 *bis*) du Chapitre I appliquées à la fonction $f = \xi$. Nous aurons ici

$$f[-(x+1)] = -\frac{1}{x}, \qquad \Omega f[-(x+1)] = [\Omega f(x)]_{x=-x},$$

$$\Omega \frac{1}{x} = \gamma(-x) = -\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} - c. \tag{17}$$

Par suite,

$$\Omega\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \gamma_0(-x) - \gamma_0(x) = -\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \gamma^2}.$$

On voit donc que la somme ordonnée de $\frac{1}{x(x+1)}$ n'est pas $\frac{1}{x}$ mais bien

$$\frac{1}{x} - \pi \operatorname{cotg} \pi x.$$

C'est un exemple frappant du rôle que peut jouer une fonction de période 1 dans un cas particulier : mais par contre les formules sommatoires des Chapitres IV et V deviennent inutilisables.

8. Les intégrales des facultés supérieures forment également une suite continue, les fonctions logarithmiques se prolongeant à gauche par d'autres fonctions dont la première et la plus importante est $\log(x)$. On peut ainsi constituer une suite de fonctions qui se déduisent l'une de l'autre en allant de gauche à droite par simple différence.

Nous nous bornerons à introduire les constantes

$$c_{n-1} = -\int_0^1 \gamma_{n-1}\, dx = i_n + \frac{i_{n-1}}{2} + \frac{i_{n-2}}{2} + \ldots, \tag{18}$$

dont la première est la constante d'Euler [IV (22)] et la deuxième a la valeur indiquée [IV (26)]. Les suivantes se rattachent aux valeurs de $\zeta(s)$ pour s entier et impair et de ζ' pour s entier et pair. Par exemple

$$(19) \qquad \zeta_3 = 4\pi^2(2c_3 - c_2), \qquad 6\zeta'_2 = -\pi^2\left(12c_2 - 2c_1 - c_0 + \frac{1}{2}\right).$$

L'équation qui définit les c peut d'ailleurs, en raison du fait qu'elle se rattache au type (6) du Chapitre I, se mettre aussi sous la forme

$$c_n - i_n = i_1 c_{n+1} + i_2 c_{n+2} + i_3 c_{n+3} + \ldots.$$

On retrouve aussi ces constantes en formant la série de Newton de la dérivée de la fonction

$$V = \int_0^1 \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}dy = -i_0 + i_1 X_1 + i_3 X_3 + \ldots,$$

$$V'_x = c_0 - c_1 X_1 - c_2 X_2 - \ldots.$$

On a aussi

$$(i_{x+2})'_x = c_2 - c_3 X_1 - c_4 X_2 - \ldots.$$

Les premières constantes c ont pour valeurs :

$$c_0 = 0{,}57721566, \qquad c_3 = 0{,}05305,$$
$$c_1 = 0{,}13033070, \qquad c_4 = 0{,}04070,$$
$$c_3 = 0{,}07565317, \qquad c_5 = 0{,}03292,$$

La série qu'elles formeraient est d'ailleurs divergente. Par contre les sommes

$$c_n + \frac{c_{n+1}}{2} + \frac{c_{n+2}}{3} + \ldots$$

qui correspondent aux développements en série de Newton de V''_{x^2} sont convergentes.

On peut obtenir facilement l'expression du carré des constantes c en fonction des nombres i et l. Effectuons le calcul pour la constante d'Euler. En partant des deux relations

$$c_0 = C = i_1 + \frac{i_2}{2} + \frac{i_3}{3} + \ldots, \qquad l_n = \frac{i_0}{n} + \frac{i_2}{n+2} + \ldots,$$

nous formerons le système

$$\frac{1}{n}\left(C - \frac{1}{n} - l_n\right) = \frac{i_1}{1(n+1)} + \frac{i_2}{2(n+2)} + \frac{i_3}{3(n+3)} + \ldots$$

dont nous multiplierons respectivement chaque équation par i_n. En additionnant nous obtiendrons

$$(20)\qquad \frac{C^2}{2} = i_1 + \frac{i_2}{2^2} + \frac{i_3}{3^2} + \ldots + i_1 l_1 + \frac{i_2 l_2}{2} + \frac{i_3 l_3}{3} + \ldots$$

(*cf.* Appell, *Nouv. Ann. Math.*, 1923).

On obtiendra des formules analogues pour les carrés c_n^2 ou les produits $c_n c_p$.

Voici encore un groupe d'autres formules dont la première surtout est d'une symétrie remarquable.

Considérons la série de facultés

$$\psi = l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + l_3 \xi_3 + \ldots.$$

Développons-la en série de Newton :

$$\psi = q_0 - q_1 X_1 - q_2 X_2 - q_3 X_3 - \ldots.$$

Les coefficients ont pour valeur

$$q_0 = -1, \qquad q_1 = C,$$

$$q_n = \frac{l_1}{n+1} + \frac{l_2}{n+2} + \frac{l_3}{n+3} + \ldots.$$

Reportons-nous maintenant aux relations (27) et (28) du Chapitre I appliquées aux deux fonctions

$$\frac{1}{1+x}, \qquad \varphi = \log(1+x),$$

nous aurons, d'après les notations adoptées,

$$f_n = \frac{1}{n+1}, \qquad \varphi_n = l_n,$$

$$p_n = c_{n-1}, \qquad q_n = \frac{l_1}{n+1} + \frac{l_2}{n+2} + \ldots$$

et, par suite,

$$-q_1 = c_0, \qquad c_0 = i_0 q_1$$

$$-q_2 = \frac{c_0}{2} + c_1, \qquad c_1 = i_0 q_2 + i_1 q_1,$$

$$-q_3 = \frac{c_0}{3} + \frac{c_1}{2} + c_2, \qquad c_2 = i_0 q_3 + i_1 q_2 + i_2 q_1.$$

De sorte que la fonction ψ a aussi pour troisième expression

$$\psi = -(1 + c_0\gamma_0 + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots).$$

En intégrant maintenant de 0 à 1 ces trois expressions on trouve d'abord

$$\Sigma\, l^2 = 1 - \Sigma\, c^2 = \Sigma\, i_n q_n. \tag{21}$$

On peut ensuite intégrer de 0 à 1 les différences successives des trois équations, ce qui donnera

$$l_1 l_{n+1} + l_2 l_{n+2} + \ldots = i_0 q_n + i_1 q_{n+1} + \ldots,$$
$$c_0 c_n + c_1 c_{n+1} + \ldots = -(l_1 c_{n-1} + \ldots + l_n c_n) + l_1 l_n + l_2 l_{n+1} + \ldots.$$

CHAPITRE VII.

LES FONCTIONS EULÉRIENNES ET LE LOGARITHME INTÉGRAL.

1. Partons de la série

$$(1) \qquad \frac{1}{x+y+1} = \xi_1 - Y_1 \xi_2 - Y_2 \xi_3 - \ldots.$$

La somme ordonnée par rapport à y est une fonction de $x+y+1$ puisque les variations de y et de $x+y+1$ sont les mêmes. On peut donc définir une fonction par la relation

$$(2) \qquad \frac{\Gamma'(x+y+1)}{\Gamma(x+y+1)} - \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_2 Y_3 + \ldots.$$

a. Intégrons de o à x nous obtenons

$$(3) \qquad \log \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)} = Y_1 L_0 + Y_2 L_1 + Y_3 L_2,$$

les fonctions L étant celles qui ont été définies (Chap. VI). En dérivant par rapport à y et faisant $y = 0$ nous trouvons d'abord

$$(4) \qquad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = L_0 + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{3} + \ldots$$

et ensuite en tenant compte des relations du Chapitre VI (5). et de la formule (25) du Chapitre IV,

$$(5) \quad \log \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}} = x\left[1 - \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right] - \frac{1}{2} + \frac{L_0}{2} + \frac{L_1}{3} + \frac{L_2}{4} + \ldots.$$

b. Intégrons cette fois de o à 1 par rapport à y,

$$(6) \qquad \log(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} + i_1 \xi_1 + i_2 \xi_2 + i_3 \xi_3 + \ldots.$$

En prenant maintenant la somme ordonnée des deux membres et en remplaçant la somme ordonnée de γ_0 par l'expression en série de Newton [Chap. VI, (6)] nous obtenons un développement qui ne contient pas d'autre irrationnelle que c et 2π :

$$(7) \qquad \log \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x+1)} = \frac{C+1}{2} + \left(\frac{1}{2} - c\right) X_1 + X_2 + \frac{X_3}{2} + \frac{X_4}{3} + \ldots$$
$$+ i_2 \xi_1 + i_3 \xi_2 + i_4 \xi_3 + \ldots.$$

c. En intégrant de o à x l'équation (6) et en tenant compte de la relation (26) du Chapitre IV, on obtient une troisième forme qui met en évidence la partie asymptotique :

$$(8) \qquad \log \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}} = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log(x+1) - (x+1) - \rho(x).$$

Le terme $\rho(x)$ en effet tend vers zéro lorsque x grandit indéfiniment. En développant ce terme en série de facultés on trouve

$$(9) \qquad \rho(x) = i_2 L_1 + i_3 L_2 + i_4 L_3 + \ldots$$

ou encore, d'après les relations (14) du Chapitre VI,

$$\rho(x) \; \rho(x) \Sigma i_n (i_0 \xi_n + i_1 \xi_{n+1} + i_2 \xi_{n+2} + \ldots).$$

On peut remarquer que le coefficient de ξ_n est le même que celui de z^{n-1} dans

$$\frac{1}{\log(1-z)} \left[\frac{1}{\log(1-z)} - \frac{i_0}{z} - i_1 \right]$$

et l'on obtient finalement

$$(10) \qquad \rho(x) = \frac{1}{2} \Sigma [(2n+2) i_{n+1} - (2n-1) i_n] \xi_n$$
$$= -\frac{\xi_1}{12} + \frac{\xi_3}{720} + \frac{\xi_4}{720} + \frac{10\,\xi_5}{8064} + \frac{11\,\xi_6}{10\,080} + \frac{3\,499\,\xi_7}{3\,628\,800} + \ldots.$$

Le calcul des valeurs de Γ au moyen de cette formule n'est pas impraticable. Par exemple pour obtenir $\Gamma(10)$ nous formerons

$$\begin{array}{rll}
\dfrac{19 \log 10}{2} - 10 = & 11,8745\,5838 & \\
\log \sqrt{2\pi} = & 0,9189\,3853 & \\
\dfrac{1}{12} \xi_1 = & 0,0083\,3333 & 12,8018\,3024 \\
\dfrac{1}{720} \xi_3 = & 0,0000\,0210 & \\
\dfrac{1}{720} \xi_4 = & 0,0000\,0049 & \\
\dfrac{10}{8\,064} \xi_5 = & 0,0000\,0012 & 0,0000\,0271 \\
\hline
\text{d'où la valeur} \ldots\ldots\ldots & & 12,8018\,2753 \\
\text{au lieu de} \ldots\ldots\ldots\ldots & & 12,8018\,2748
\end{array}$$

2. Posons

$$\text{(11)} \qquad \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = u_0 - u_1 X_1 - u_2 X_2 - \ldots.$$

Les polynomes u sont en relation évidente avec les polynomes de Laguerre. La relation de récurrence est facile à former en écrivant

$$\Delta_x \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = \left(1 - \frac{y}{x+2}\right) \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = u_1 - u_2 X_1 - u_3 X_2 - \ldots$$

et, par suite,

$$u_0 = y, \qquad u_1 = y - \frac{y^2}{2},$$

$$\text{(12)} \qquad (m+2)\, u_{m+1} + (y - 2m - 1)\, u_m + m u_{m-1} = 0.$$

D'autre part,

$$\Delta x \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} = \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)} - \int_0^y \frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)}\, dy,$$

ce qui donne

$$\text{(13)} \qquad u_n = u'_n - u'_{n+1} - u'_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Enfin on vérifie facilement que

$$\text{(14)} \qquad e^{\frac{hy}{h-1}} = 1 - u_0 h - u_1 h^2 - u_2 h^3 - \ldots,$$

Si nous posons maintenant $\Omega u_n = v_n$ nous aurons

$$\Omega_y e^{\frac{hy}{h-1}} = \left(e^{\frac{hy}{h-1}} - 1\right)\left(1 - e^{\frac{h}{1-h}}\right)^{-1},$$

ce qui conduit à la formule

$$(y + h v_0 + h^2 v_1 + \ldots)\,[u_0(1) + h u_1(1) + h^2 u_2(1) + \ldots]$$
$$= u_0 + h u_1 + h^2 u_2 + \ldots$$

et en dérivant par rapport à y et faisant $y = 0$

$$(1 - h)(1 + h v'_0 + h^2 v'_1 + \ldots) = u_0(1) + h u_1(1) + h^2 u_2(1) + \ldots,$$

ce qui permet de déterminer de proche en proche les coefficients v'; d'ailleurs en prenant la somme ordonnée de (11) par rapport à y puis dérivant et faisant $y = 0$ on trouve

$$\text{(15)} \qquad \frac{\zeta(-x)}{\Gamma(x+1)}\, v'_0 - v'_1 X_1 - v'_2 X_2 - \ldots,$$

la fonction ζ étant la fonction de Riemann.

3. Les différences de Γ s'expriment très simplement par la formule

$$\frac{\Delta_n \Gamma(x)}{\Gamma(x)} = 1 - N_1 x - N_2 x(1+x) - N_3 x(1+x)(2+x) - \ldots.$$

Pour exprimer la somme ordonnée, posons

$$\Omega\Gamma(x+1) = \varphi\Gamma(x+1),$$

la fonction arbitraire φ satisfait à l'équation fonctionnelle simple

$$\varphi - (x+1)\varphi(x+1) = 1$$

et les coefficients de son développement en série de Newton sont déterminés par voie de récurrence :

$$(16) \qquad -\varphi_{n-1} + 2\varphi_n - \varphi_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1}}{n},$$

ce qui donne

$$(17) \qquad -\varphi = X_1 + X_2 + \frac{2}{3}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \frac{2}{15}X_5 + \ldots.$$

On obtient une forme plus simple en formant $\varphi(x+2)$ dont les coefficients, d'après la formule (16), décroissent plus rapidement et l'on trouve après une légère modification

$$\frac{1}{x+1} - \frac{\Omega\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+3)} = 1 - \frac{X_1}{3} - \frac{X_2}{12} + \frac{X_3}{30} + \frac{31}{360}X_4 + \ldots,$$

ce qui correspond pour h entier à la formule

$$1 + 1! + 2! + \ldots + (h+1)! = (h+2)!\left[1 - \frac{H_1}{3} - \frac{H_2}{12} + \frac{H_3}{30} + \ldots\right].$$

4. La fonction Θ relative à Γ se forme d'une manière analogue; poussons le calcul un peu loin ; en mettant Θ sous la forme $g(x)\Gamma(x+1)$ nous aurons, d'après l'équation caractéristique habituelle de Θ,

$$(18) \qquad g(x) + (x+1)g(x+1) = 1$$

et les relations entre les coefficients de g supposée développée en série de Newton s'obtiennent par la récurrence

$$(19) \qquad mg_{m-1} - 2(m+1)g_m + (m+1)g_{m+1} = 0.$$

On peut remarquer tout de suite que les coefficients g_m sont de la forme $a_m g_0 - b_m$. Les suites a et b se forment très facilement au moyen du tableau des différences. Les nombres de la troisième colonne étant égaux à ceux de la première multipliés respectivement par $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, il suffit de connaître les trois premiers nombres de cette première colonne pour déterminer les trois premiers de la troisième et prolonger la première, et ce procédé se continue ainsi indéfiniment.

Les coefficients a correspondent d'ailleurs à

$$a(x) + (x+1)\,a(x+1) = 0,$$

équation qui est satisfaite par la suite $(-1)^n \frac{1}{n!}$ et ce sont par conséquent les nombres réciproques de cette suite et leurs premières valeurs s'obtiennent d'ailleurs facilement par le procédé indiqué plus haut; on a ainsi la série

$$1,\quad \frac{2}{1!},\quad \frac{7}{2!},\quad \frac{34}{3!},\quad \frac{209}{4!},\quad \frac{1546}{5!},\quad \frac{13327}{6!},\quad \frac{130\,922}{7!},\quad \ldots.$$

Les coefficients b correspondent à l'hypothèse $g_0 = 0$ et la fonction qui correspond à cette hypothèse prend les valeurs

$$b(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m-1)} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m!}. \tag{20}$$

Voici la série des premiers nombres b :

$$0,\quad \frac{1}{1!},\quad \frac{4}{2!},\quad \frac{20}{3!},\quad \frac{124}{4!},\quad \frac{920}{5!},\quad \frac{7940}{6!},\quad \frac{78\,040}{7!}.$$

La suite des rapports $\frac{b}{a}$,

$$0{,}5\ldots,\quad 0{,}57\ldots,\quad \ldots,\quad 0{,}5961\ldots,$$

tend vers la constante bien connue

$$g_0 = 0{,}5963\;4736\;2323\;194\ldots.$$

5. La formule (5) du Chapitre VI s'étend au cas où m que nous avions considéré comme entier prend une valeur quelconque s. Il

suffit de faire les généralisations

$$n\,! = \Gamma(s+1), \qquad \xi_n = \frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(x+s+2)}.$$

On obtient ainsi

$$\text{(21)}\quad \frac{\Gamma(x+s+1)}{(x+1)^{s+1}\,\Gamma(x+1)} = \frac{\alpha_0(s)}{x+s+1} + \frac{(s+1)\,\alpha_1(s)}{(x+s+1)(x+s+2)} + \frac{(s+1)(s+2)\,\alpha_2(s)}{(x+s+1)(x+s+2)(x+s+3)} + \ldots$$

et pour $x = 0$

$$\text{(22)}\quad \Gamma(s+1) = \frac{\alpha_0(s)}{s+1} + \frac{\alpha_1(s)}{s+2} + \frac{\alpha_2(s)}{s+3} + \ldots = \int_0^1 \log\,\frac{1}{1-z}\,dz.$$

Si nous remplaçons les polynomes $\alpha(s)$ par leurs développements et effectuons les divisions, nous voyons que le deuxième membre de (22) peut se diviser en deux parties, l'une méromorphe F et l'autre entière E; la première a pour expression

$$\text{(23)}\qquad F(s+1) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{1\,!\,(s+2)} + \frac{1}{2\,!\,(s+3)} - \ldots$$

comme cela résulte de

$$\alpha_n(-n-1) = (-1)^n\,\frac{1}{n\,!}.$$

On vérifie immédiatement d'après cette forme de F que

$$\text{(24)}\qquad F(s+2) = (s+1)\,F(s+1) - \frac{1}{e}.$$

On peut aussi écrire en développant les fractions en séries de facultés

$$e\,F(s+1) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \ldots$$

ou encore

$$e\,F(s+1) = \Omega\,\frac{1}{\Gamma(s+2)} + e - 1.$$

Quant aux valeurs de F pour n entiers, elles sont de la forme

$$F(n+1) = n\,! - \frac{r_n}{e}.$$

Les nombres r

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 16, \quad 65, \quad \ldots$$

sont, pris tous positivement, les réciproques de la suite $(-1)^n n!$ et le nombre e est la limite de $\frac{r_n}{n!}$.

La fonction réciproque de F a pour équation

$$(25)\qquad R = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} - \dots$$

et l'on voit tout de suite que c'est la fonction

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} \Theta \frac{1}{\Gamma(s+2)}$$

et l'on en déduit l'équation fonctionnelle de R

$$(26)\qquad R(s+1) = 1 - (s+1)R(s).$$

Un calcul facile montre que l'on a aussi

$$eR = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{1!\,s+2} + \frac{1}{2!\,s+3} + \dots = \int_0^1 t^s e^t\,dt.$$

6. Prenons maintenant l'équation de E. Les premiers coefficients calculés au moyen de $\alpha(s)$ sont déjà compliqués et le développement

$$(27)\qquad \frac{1}{2} + \frac{3s-4}{24} + \frac{s^2+s+2}{48} + \frac{15s^3+75s^2+110s-48}{5760} + \dots,$$

quoique convergent, se présente sous une forme difficilement utilisable.

Comme $E + F = \Gamma(s+1)$, on voit que E prend pour n la valeur r_n et par suite grandit rapidement comme il fallait s'y attendre.

L'équation fonctionnelle

$$E(s+2) = (s+1)E(s+1) + \frac{1}{e}$$

donnerait par la méthode des coefficients indéterminés la série de Newton

$$(28)\qquad eE(s+1) = -S_0 + 1!\,S_1 - 2!\,S_2 + 3!\,S_3 - \dots,$$

qui est évidemment divergente, mais on peut écrire symboliquement

$$(29)\qquad eE(s+1) = \Theta\left[\frac{\Gamma(x-s)}{\Gamma(-s)}\right]$$

et cette notation n'est pas illusoire. Les coefficients u du développement

$$\frac{\Gamma(x-s)}{\Gamma(-s)} = u^0 - u_1 X_1 - u_2 X_2 - \ldots$$

sont des polynomes en s constituant la première ligne du tableau fondamental où la première colonne est formée des polynomes $(-1)^{n-1} n!\, S_n$, de sorte qu'en appliquant la formule générale on obtient la série suivante dont nous n'écrivons que les premiers termes :

$$(30) \qquad eE(s+1) = \frac{1}{2} + \frac{1+s}{2} + \frac{1+s+s^2}{2^3} + \frac{1+2s+s^3}{2^4} + \frac{1+5s^2-2s^3+s^4}{2^5} + \frac{1+9s-15s^2+15s^3-5s^4+s^5}{2^6} + \ldots$$

Il n'est pas impossible de retrouver dans ce développement les valeurs de E pour s entier. Dans ce cas en effet la première colonne du tableau des différences n'aura que $s+1$ termes; le terme général $u(s)$ sera une fonction linéaire de son indice n de degré s seulement et l'on pourra calculer la somme $\Sigma 2^{-n} u_n$ au moyen de la formule (Chap. IV, **4**, b).

Par exemple pour $s=2$ on aura

$$eE(3) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{13}{2^4} + \ldots = \sum \frac{1+2N_1-N_2}{2^{n+1}} = 5.$$

Si l'on considère séparément chacun des polynomes u on vérifie ainsi qu'il prend pour la suite des nombres 0, 1, 2, ... des valeurs croissantes; il croît donc lui-même régulièrement (sauf peut-être accidentellement dans l'intervalle de deux nombres entiers). On peut admettre par suite que la série précédente croît régulièrement avec la variable ou tout au moins n'a pas de discontinuité, et comme elle est convergente pour les valeurs entières on peut la considérer comme toujours convergente.

7. D'ailleurs la formule (24) peut s'écrire en remplaçant $s+1$ par $-s$

$$(31) \qquad eE(-s) = \Theta_0 \frac{\Gamma(x+s+1)}{\Gamma(s+1)} = g(s),$$

$g(s)$ étant la fonction définie par la formule (18) à propos de $\Theta\Gamma(x+1)$ de sorte que nous aurons finalement

$$\begin{aligned}(32)\qquad \Gamma(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s+2} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s+3} + \ldots \\ + \frac{1}{e}\left[g_0 + \frac{2g_0-1}{1!}s + \frac{7g_0-4}{2!}\,\frac{s(s+1)}{2!}\right. \\ \left. + \frac{34g_0-20}{3!}\,\frac{s(s+1)(s+2)}{3!} + \ldots\right].\end{aligned}$$

La constante g_0 que nous avons définie par $\lim g_h = 0$ peut se calculer en faisant dans la formule qui précède $s=0$ et l'on a ainsi

$$(33)\qquad e^{-1}g_0 = -C + 1 - \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{3.3!} - \frac{1}{4.4!} + \ldots.$$

Voici les premières valeurs des coefficients g :

$$\begin{aligned} g_1 &= 0,1926\,4736, & g_6 &= 0,0104\,4625,\\ g_2 &= 0,0872\,1577, & g_7 &= 0,0069\,4234,\\ g_3 &= 0,0459\,6839, & g_8 &= 0,0047\,4420,\\ g_4 &= 0,0265\,2495, & g_9 &= 0,0033\,1744,\\ g_5 &= 0,0162\,7518, & g_{10} &= 0,0023\,6511.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs les relations évidentes

$$\Sigma g_n = 1, \qquad \sum \frac{g_n}{n+2} = 1 - g_0.$$

8. On peut généraliser ce qui précède et poser

$$(34)\qquad y^{-s}\,\Gamma(s+1) = \Phi(y, s) + \mathrm{H}(y, s).$$

La fonction Φ prend l'une des formes

$$\begin{aligned}(35)\qquad \frac{y}{s+1} - \frac{y^2}{1!(s+2)} + \frac{y^3}{2!(s+3)} - \ldots \\ = e^{-y}\left[\frac{y}{s-1} + \frac{y^2}{(s+1)(s+2)} + \ldots\right]\end{aligned}$$

et satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(36)\qquad \Phi(y, s+1) = \frac{s+1}{y}\,\Phi(y, s) - e^{-y}.$$

Celle de H est de même

$$(37)\qquad \mathrm{H}(y, s+1) = \frac{s+1}{y}\,\mathrm{H}(y, s) + e^{-y}$$

et correspond à la série divergente

$$e^{y}\mathrm{H} = -\,\mathrm{S}_0 + 1\,!\,\frac{\mathrm{S}_1}{y} - 2\,!\,\frac{\mathrm{S}_2}{y_2} + \ldots. \tag{38}$$

On peut la remplacer dans les mêmes conditions que nous l'avons fait pour E par une série convergente. Nous déterminerons d'abord une fonction $g(y, s)$ par l'équation fonctionnelle

$$g(s, y) + \frac{s+1}{y}\, g(y, s+1) = 1.$$

La série de Newton correspondante a des coefficients de la forme $a_n g_0 - b_n$, les suites des coefficients a_n et b_n étant des polynomes en y qui sont respectivement les réciproques des deux suites

$$(-1)^n \frac{y^n}{n\,!}, \qquad \frac{y}{n} - \frac{y^2}{n(n-1)} + \frac{y^3}{n(n-1)(n-2)} + \ldots.$$

Nous aurons finalement par un calcul identique à celui du paragraphe précédent

$$y^{1-s}\,\Gamma(s) = \frac{y}{s} - \frac{y^2}{1\,!}\,\frac{1}{s+1} + \frac{y^3}{2\,!}\,\frac{1}{1+2} - \ldots \tag{39}$$
$$+\, e^{-y}\left[g_0(y) + g_1(y)\frac{s}{1} + g_2(y)\frac{s(s+1)}{2\,!} + \ldots\right].$$

	1.	y.	y^2.	y^3.	y^4.	y^5.	y^6.	y^7.
$1\,!\,a_1$	1	1						
$2\,!\,a_2$	2	4	1					
$3\,!\,a_3$	6	18	9	1				
$4\,!\,a_4$	24	96	72	16	1			
$5\,!\,a_5$	120	600	600	200	25	1		
$6\,!\,a_6$	720	4320	5400	2400	450	36	1	
$7\,!\,a_7$	5040	35280	52920	29400	7350	2646	49	1
$1\,!\,b_1$	–	1						
$2\,!\,b_2$	–	3	1					
$3\,!\,b_3$	–	11	8	1				
$4\,!\,b_4$	–	50	58	15	1			
$5\,!\,b_5$	–	274	444	177	24	1		
$6\,!\,b_6$	–	1764	3708	2016	416	35	1	
$7\,!\,b_7$	–	13068	33984	23544	6560	835	48	1

9. L'expression du coefficient $g_0(y)$ se forme facilement en faisant $s = 0$ dans l'équation précédente, et l'on a ainsi

$$-\frac{e^{-y}}{y} g_0(y) = \log y + C - \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2.2!} - \frac{y^3}{3.3!} + \ldots.$$

Le second membre de cette équation définit le logarithme intégral $li(e^{-y})$ pour y positif.

Mais la méthode employée permet de considérer aussi ce logarithme intégral comme défini par la limite du rapport des polynomes b_h et a_h lorsque h croît indéfiniment.

La valeur de a_h est très simple

$$1 + hy + \frac{h(h-1)}{2!} \frac{y^2}{2!} + \frac{h(h-1)(h-2)}{3!} \frac{y^3}{3!} + \ldots$$

mais celle de b est beaucoup plus compliquée. On peut remarquer que le coefficient de y a pour valeur limite

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{h}\right) = \log h + C.$$

Le tableau ci-joint donne les sept premières valeurs numériques des coefficients de a et de b. Le rapport de b_7 à a_7 donne des valeurs assez approchées lorsque y est voisin de l'unité.

De la relation

$$g_0(y) + g_1(y) + g_2(y) + \ldots = 1$$

on peut déduire une autre expression de $g_0(y)$.

Enfin, en formant la somme ordonnée de $y^{-s}\Gamma(s+1)$ et en définissant une fonction Ψ, généralisation de (17) par la relation

$$\Psi(s, y) - \frac{s+1}{y} \Psi(s+1, y) = 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & y^{-s} e^y \Gamma(s+1) \Psi(s, y) \\ & \quad = \log y - li(e^y) - y \frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s} + \frac{y^2}{1} \frac{1}{s+1} \\ & \quad + \frac{y^3}{2} \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{y^4}{3} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \ldots \\ & \quad - \left[g_0(y) \frac{s}{1} + g_1(y) \frac{s(s+1)}{2!} + g_2(y) \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} + \ldots \right]. \end{aligned}$$

CHAPITRE VIII.

LES SÉRIES INTERMÉDIAIRES ET L'EXTRAPOLATION.

1. Les séries de facultés se développent immédiatement en séries de Newton. Examinons, au point de vue seulement formel, comment peut s'opérer le calcul inverse, c'est-à-dire la détermination des coefficients a de la série de facultés

$$f(x) = a_0\xi_1 + a_1\xi_2 + a_2\xi_3 + \ldots, \tag{1}$$

en fonction des coefficients f_n ou des valeurs $f(n)$.

En considérant la fonction réciproque de f, nous avons le système de relations en nombre infini

$$f_n = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n+2} + \frac{a_2}{n+3} + \ldots \tag{2}$$

qui théoriquement peut conduire à un développement formel pour les inconnues a, mais il est plus simple d'introduire le symbole auxiliaire

$$\chi_n = \mathrm{X}_n\xi_{n+1}, \qquad \chi_0 = -\xi_1.$$

Nous pouvons poser

$$\chi_n = \frac{\mu_1}{x+1} + \frac{\mu_2}{x+2} + \ldots + \frac{\mu_{n-1}}{x+n+1}, \tag{3}$$

les coefficients μ ayant pour valeur évidente

$$\mu_p = \lim_{x=-p}(x+p)\chi_p. \tag{4}$$

Remarquons que ces $n+1$ coefficients de χ_n peuvent être déterminés par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mu_1}{1} + \frac{\mu_2}{2} + \ldots + \frac{\mu_{n+1}}{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 &= \frac{\mu_1}{n} + \frac{\mu_2}{n+1} + \ldots + \frac{\mu_{n+1}}{2n},\\
(-1)^{n+1}\frac{(n\,!)^2}{(2n+1)\,!} &= \frac{\mu_1}{n+1} + \frac{\mu_2}{n+2} + \ldots + \frac{\mu_{n+1}}{2n+1},
\end{aligned}$$

qui est une simplification du système (2). Or si nous formons avec les combinaisons de ces équations (e_p désignant la $p^{\text{ième}}$)

$$e_1 - e_2, \quad e_1 - 2e_2 + e_3, \quad e_1 - 3e_2 + 3e_3 - e_4, \quad \ldots$$

un nouveau système, nous retombons sur celui que nous aurions obtenu en posant

$$(5) \qquad (-1)^n \chi_n = \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 + \ldots + \mu_{n+1} \xi_{n+1},$$

ce qui nous montre que les produits χ_n sont autoréciproques positivement pour n pair et négativement pour n impair. On peut donc les exprimer soit en fonction des inverses de $x+1$, $x+2$, ..., soit en fonction des facultés ξ_1, ξ_2, ..., les coefficients restant les mêmes avec un simple changement de signe pour n impair (Tableau I).

Les formules (3) et (4) donnent après un calcul facile

$$(6) \quad (-1)^n \chi_n = N_0 \xi_1 + \frac{1\,!}{(0\,!)^2}(N_1 - N_2)\,\xi_2 + \frac{3\,!}{(1\,!)^2}(N_2 - 2N_3 + N_4)\,\xi_3 + \ldots,$$

les coefficients des polynomes en N étant les coefficients binomiaux, ou encore (Chap. II, a)

$$(7) \quad (-1)^n \chi_n = \sum_p \frac{n(1-n)\ldots(p-1-n)\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p)}{(p\,!)^2}\,\xi_{p+1}$$

et inversement les ξ s'expriment en fonction des χ par la relation particulièrement simple (lignes du Tableau II)

$$(8) \qquad \xi_{n+1} = \Sigma_p (-1)^p (2p+1)\,\chi_p(n)\,\chi_p(x).$$

2. Sachant que les produits χ sont autoréciproques, on peut écrire immédiatement leur développement en série de Newton.

Par exemple

$$
(9)\quad \begin{cases}
\chi_1 = \dfrac{X_1}{2.3} + \dfrac{2X_2}{3.4} + \dfrac{3X_3}{4.5} + \ldots, \\[2ex]
-\chi_2 = \dfrac{1.2X_2}{3.4.5} + \dfrac{2.3X_3}{4.5.6} + \ldots, \\[2ex]
\chi_3 = \dfrac{1.2.3X_3}{4.5.6.7} + \ldots.
\end{cases}
$$

On retrouve les coefficients relatifs à χ_p pris tous positivement et multipliés par $2p+1$ dans la $p^{\text{ième}}$ colonne du Tableau II.

La résolution de ce système, c'est-à-dire l'expression des X en séries linéaires de χ, s'obtient par un simple calcul direct

$$
(10)\quad X_p = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{n\ldots(p-1-n)(n+1)\ldots(n+p)}{(p!)^2}(2n+1)\chi_n.
$$

L'examen du groupe d'équations ainsi obtenu montre que les coefficients de χ_n pour un indice n sont à un facteur près ceux que nous avons rencontrés dans le développement de χ_n en ξ.

Les séries en χ qui correspondent aux X se présentent évidemment, pour les valeurs non entières de x, sous formes divergentes et le problème consiste à former des combinaisons linéaires utilisables.

3. Portons les valeurs de X sans nous inquiéter de leur convergence dans l'équation de Newton $f(x)$ et écrivons le résultat sous la forme

$$
(11)\quad f(x) = \varpi_0\chi_0 + 3\varpi_1\chi_1 + \ldots + (2p+1)\varpi_p\chi_p + \ldots,
$$

que nous appellerons, pour simplifier, série intermédiaire.

Par réciprocité nous aurons aussi

$$
f_x = \varpi_0\chi_0 - 3\varpi_1\chi_1 + \ldots + (-1)^p(2p+1)\varpi_p\chi_p + \ldots
$$

et inversement par analogie avec les formules (7) et (8) les coefficients ϖ s'exprimeront en fonction des coefficients f_n de la même manière que les χ en fonction des ζ (Tableau I).

Les coefficients ϖ jouissent d'ailleurs d'une propriété qui correspond à l'autoréciprocité des χ. Ce sont en effet des invariants de réciprocité au sens défini au Chapitre III. On peut le vérifier de la manière suivante. Formons la réciproque de $f(x)$ en changeant de signe les ϖ d'indice impair, et revenons à la fonction primitive mais cette fois en remplaçant les coefficients f_n par les valeurs $f(n)$. Les nouveaux coefficients ϖ ainsi modifiés seront égaux aux anciens ou de signe contraire suivant la parité de n.

Il est évident par suite qu'une fonction autoréciproque aura seulement des termes en χ d'indice pair ou d'indice impair.

D'autre part, il y a lieu de faire une remarque importante. Les coefficients particuliers relatifs à une faculté ξ_p d'indice p seront nuls à partir du $p^{\text{ième}}$. On pourrait d'ailleurs construire le groupe du Tableau II en partant de cette propriété. Ce tableau donne par ligne les valeurs des $(2n+1)\varpi_n$ relatifs aux facultés.

4. Les calculs effectués sur les séries intermédiaires sont assez compliqués. La différence ordonnée s'effectue au moyen de la formule suivante :

$$\Delta\chi_n = \frac{n}{2(2n+1)}\chi_{n-1} + \frac{1}{2}\chi_n + \frac{n+1}{2(2n+1)}\chi_{n+1}. \tag{12}$$

La sommation s'effectue directement sur les expressions des χ en ξ. Pour une valeur h très grande de la variable x, la somme ordonnée prend la valeur

$$\begin{aligned} &\chi_n(0) + \chi_n(1) + \ldots + \chi_n(h) \\ &= -\left[\frac{\Gamma'(1+h)}{\Gamma(1+h)} + C\right] + 2\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{h}\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

La dérivation s'obtient aussi en opérant sur les développements de facultés, mais les dérivées à l'origine ont seules une forme relativement simple. Les formules relatives à l'intégration présentent un certain intérêt entre les limites 0 et 1. Si nous posons

$$\int_0^1 \chi_n\, dx = \lambda_n, \tag{14}$$

nous aurons immédiatement l'expression de ces valeurs en fonction des nombres l ou des nombres i par intégration de (7) ou de (9) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0{,}69315, & \lambda_2 &= 0{,}11778, \\ \lambda_3 &= -0{,}01355, & \lambda_4 &= 0{,}00484, \\ \lambda_5 &= -0{,}00236, & \lambda_6 &= 0{,}00135. \end{aligned}$$

La suite des nouveaux nombres ainsi obtenus est alternativement positive et négative et décroît peu rapidement.

On peut remarquer que les équations précédentes donnent pour les expressions de i en λ la même solution formelle que celle des polynomes X en χ. Par exemple

$$-i_0 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 + 7\lambda_4 + \ldots. \tag{15}$$

5. Comme exemple de série intermédiaire à forme simple, nous avons en particulier

$$\frac{1}{x+n+1} = \chi_0(n)\chi_0(x) + 3\chi_1(n)\chi_1(x) + 5\chi_2(n)\chi_2(x) + \ldots. \tag{16}$$

La réciproque par rapport à x pour les valeurs entières de n n'est autre que ξ_{n+1}, ce qui explique la formule (8).

En dérivant la série par rapport à n, nous obtenons

$$\frac{1}{(x+1)^2} = -\chi_0 - \left(1+\frac{1}{2}\right)\chi_1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\chi_2 - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\chi_3 - \ldots \tag{17}$$

et d'autres formules analogues. Par intégration nous aurons la série

$$\log\left(1+\frac{1}{1+x}\right) = \lambda_1\chi_0 + 3\lambda_2\chi_1 + 5\lambda_3\chi^2 + \ldots, \tag{18}$$

dont les coefficients λ sont ceux des formules (14).

Cherchons encore le développement en série intermédiaire de $(1-a)^x$ en posant

$$(1-a)^x = w_0 + 3w_1\chi_1 + 5w_2\chi_2 + \ldots.$$

En prenant la différence des deux membres et en utilisant la formule (12) on obtient par identification la relation de récurrence suivante entre les coefficients w :

$$\frac{n}{2}w_{n-1} + (2n+1)\left(\frac{1}{2}-a\right)w_n + \frac{n+1}{2}w_{n+1} = 0.$$

Elle se simplifie lorsque $a = 0$, 1 ou $\frac{1}{2}$:

$$(1-1)^x = -\chi_0 - 3\chi_1 - 5\chi_2 \ldots, \tag{19}$$

$$1^x = -\chi_0 + 3\chi_1 - 5\chi_2 + \ldots,$$

$$2^{-x} = -\chi_0 + \frac{1}{2}5\chi_2 - \frac{1.3}{2.4}9\chi_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}13\chi_6 - \ldots. \tag{20}$$

Le deuxième membre, malgré sa forme, spéciale est convergent pour toutes les valeurs positives de x.

6. Le passage d'une série de facultés (1) à la série intermédiaire correspondante est immédiat et les formules (8) donnent des expressions à forme convergente pour les coefficients ϖ.

Mais le problème inverse se présente sous un tout autre aspect et nous ne ferons ici que l'effleurer, de même que d'autres questions intéressantes qui se rattachent à l'étude des coefficients ϖ, nous réservant d'y revenir.

La substitution directe dans le développement de $f(x)$ en série intermédiaire des valeurs de χ en ξ qui résultent des formules (6), donne pour les expressions des coefficients à des développements formels presque identiques à ceux des équations (10)

$$(21) \qquad \begin{aligned} a_p = \frac{1}{(p\,!)^2}\Sigma_n(-1)^n\, n(1-n)\ldots \\ \times(p-1-n)(p+1)\ldots(p+n)(2n+1)\varpi_n. \end{aligned}$$

Ces formules sont divergentes comme le prouve l'exemple (17)

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 + \ldots,$$

puisque la formule qui précède nous donne par exemple pour la valeur de a_1

$$2\left(1+\frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + 12\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \ldots = 3 - 5 + 7 \ldots.$$

Pour tourner la difficulté on pourra quelquefois faire usage du procédé indiqué au Chapitre IV pour le calcul des valeurs qui remplacent les séries alternées non convergentes tout au moins quand le deuxième membre de (22) se présente sous cette forme. Dans l'exemple cité on aura d'abord

$$a_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n(n+1)}(-1)^n(2n+1).$$

Or le deuxième membre représente

$$\Theta_0(2n+1) = 1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

et le calcul se continue de la même manière pour les autres coefficients. Le terme sous le signe Θ_0,

$$\frac{N_p - P_1 N_{p+1} - \ldots + N_{2p}}{n(n+1)},$$

a sa somme alternée réduite telle que la valeur cherchée pour a se réduit à celle du numérateur pour $n = 0$, c'est-à-dire à $\frac{1}{p}$.

7. On peut transformer les formules (22) en introduisant la nouvelle combinaison

$$(22) \qquad -r_n = w_0 - 3w_1 + \ldots + (-1)^n(2n+1)w_n.$$

Le Tableau III donne les premières valeurs de r exprimées non en w, mais en $f(0)$, $f(1)$, ...

La valeur de a_0 est la limite de r lorsque n devient infini.

Les autres valeurs des a s'expriment aussi assez simplement en fonction des r

$$\frac{a_1}{2} = r_0 + 2r_1 + 3r_2 + 4r_3 + \ldots$$

$$-\frac{a_2}{6} = \qquad r_1 + 4r_2 + 10r_3 + \ldots,$$

$$(23) \qquad \frac{(p!)^2}{(2p)!} a_p = -\sum_{n=0}^{\infty} (N_{p-1} - P_1 N_p - \ldots - P_p N_{2p-1}) r_n$$

et l'on peut faire la remarque que les coefficients qui figurent dans les seconds membres relatifs à une valeur a d'indice p sont, au signe près, ceux que l'on trouve dans la colonne p du Tableau III multipliés par $\frac{2}{p}$.

Les développements ainsi obtenus pour les a sont toujours (sauf exceptionnellement pour les premiers indices) très rapidement divergents et l'on ne peut les utiliser sans artifice. On peut remarquer toutefois que l'on a

$$(24) \qquad a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots = 2\left[r_0 + \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{3} + \ldots\right],$$

ce qui donne une expression de la somme des valeurs $f(0)$, $f(1)$, ..., lorsque cette somme est convergente.

Tableau I.

$(-1)^n \chi_n$.	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
χ_n	$\frac{1}{x+1}$	$\frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{x+4}$	$\frac{1}{x+5}$	$\frac{1}{x+6}$	$\frac{1}{x+7}$	$\frac{1}{x+8}$
W_n......	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$
$(-1)^n W_n$.	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$n = 0$.....	-1							
1.....	-1	2						
2.....	-1	6	-6					
3.....	-1	12	-30	20				
4.....	-1	20	-90	140	-70			
5.....	-1	30	-210	560	-630	252		
6.....	-1	42	-420	1680	-3150	2772	-924	
7.....	-1	56	-756	4200	-11550	16632	-12012	3432

Tableau II.

$-f_u$.....	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
$-\xi_u$.....	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7
$n = 0$.....	1							
1.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2.....	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$					
3.....	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$				
4.....	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{70}$			
5.....	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{25}{84}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{252}$		
6.....	$\frac{1}{7}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{25}{84}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{154}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{924}$	
7.....	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{49}{264}$	$\frac{7}{88}$	$\frac{7}{312}$	$\frac{1}{264}$	$\frac{1}{3432}$

TABLEAU III.

r_n.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.
$n=0$...	1							
1...	—2	6						
2...	3	—24	30					
3...	—4	60	—180	140				
4...	5	—120	630	—1120	630			
5...	—6	210	—1680	5040	—6300	2772		
6...	7	—336	3780	—16800	34650	—33264	12012	
7...	—8	504	—7560	46200	—138600	216216	—168168	51480

TABLEAU IV.

$\frac{1}{2}S_h$.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.
$h=0$...	1							
1...	0	3						
2...	1	—5	10					
3...	0	10	—35	35				
4...	1	—14	91	—189	126			
5...	0	21	—189	651	—924	462		
6...	1	—27	351	—1749	4026	—4290	1716	
7...	0	36	—594	4026	—13299	22737	—19305	6435

8. Pour un polynome, les différences d'ordre supérieur à son degré sont nulles; nous avons vu qu'il en était de même pour les facultés en ce qui concerne les coefficients ϖ d'indice supérieur

à leur degré. Nous sommes donc amenés, par analogie avec les méthodes employées pour les approximations à l'aide des différences dans le cas des polynomes ou des fonctions assimilées, à utiliser les coefficients ϖ pour les calculs numériques relatifs aux séries de facultés, ou à d'autres séries susceptibles d'y être rattachées. Cette condition limite à l'avance le champ d'application des méthodes qui vont suivre.

Proposons-nous d'abord le problème simple de trouver la valeur approchée du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série dont nous connaissons seulement les n premiers. Si nous pouvons faire l'hypothèse que la série en question a l'allure numérique d'une série de facultés et notamment si les coefficients ϖ déterminés par les termes connus décroissent régulièrement, il est naturel d'appliquer la formule (11) dont le deuxième membre n'aura que $n+1$ termes. Nous aurons par conséquent comme expression de $f(n)$

$$f(n) = -c_0\varpi_0 + c_1\varpi_1 - \ldots + (-1)^{n-1}c_n\varpi_n,$$

les coefficients c étant ceux du Tableau II. On peut vérifier que c_n qui est égal à $(n!)^2\dfrac{1}{(2n)!}$ décroît très rapidement avec n. Par conséquent on pourra négliger le produit $c_n\varpi_n$ qui renferme le seul terme inconnu et prendre pour valeur de $f(n)$ celle qui résultera de la suppression de ce terme dans la formule.

Comme exemple numérique prenons la fonction (17) et supposons connus seulement les huit premiers inverses des carrés des nombres entiers. La formule nous donnera le neuvième avec une erreur égale à

$$\varpi_8\frac{8!}{16!} = \frac{1}{90}\,\frac{1}{12.870} = \frac{1}{1.158.300},$$

ce qui représente moins de la 14000^{e} partie de la valeur du terme lui-même.

Toutefois l'hypothèse que les coefficients ϖ sont négligeables à partir d'un certain rang ne peut être utilisée indéfiniment, en particulier si la somme des valeurs $f(n)$ est convergente. Cette hypothèse en effet conduit à remplacer la fonction $f(x)$ par une série de facultés où le coefficient a_0 de ξ_1 n'est pas nul.

9. Supposons la fonction f exprimée en série intermédiaire et

formons la somme $S_h(0)$ au moyen de la formule (13). Le coefficient du terme transcendant est r_h. Pour que la somme S_h ait une limite, il faut évidemment que r_h tende vers zéro pour h infini. L'expression de S est alors

$$\frac{S_h}{2} = -3\varpi_1 + 5\varpi_2\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 7\varpi_3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots$$

ou encore

$$\frac{S}{2} = r_0 + \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{3} + \ldots$$

et nous retombons sur la formule (24).

Si nous ne connaissons que les h premières valeurs de $f(x)$, nous aurons une valeur approchée de la somme limite en négligeant les valeurs des r d'indice supérieur à $h - 1$. La somme ainsi obtenue sera naturellement différente de celle que nous aurait donné l'addition des h valeurs connues. En fait tout se passera comme si nous avions remplacé la fonction inconnue f par une série de facultés

$$a_1\xi_2 + a_2\xi_3 + \ldots + a_h\xi_{h+1} \tag{25}$$

où le coefficient a serait nul, et les autres déterminés par les formules (23) limitées aux h premières valeurs des r.

On peut remarquer que si nous représentons f par une série intermédiaire où nous négligeons les coefficients ϖ d'indice supérieur à $h - 1$, elle a pour expression

$$-r_0\chi_0 + (r_1 - r_0)\chi_1 - \ldots + (-1)^h(r_{h-1} - r_{h-2})\chi_{h-1}.$$

La formule (25) correspond à l'adjonction à la somme précédente du terme $(-1)^h r_{h-1}\chi_h$ qui a pour effet de rendre nul le coefficient de ξ_1.

Le résultat obtenu pour la valeur de S_h ne peut être amélioré que si l'on fait des hypothèses sur l'allure des coefficients inconnus r. En particulier si les premiers coefficients r connus sont constamment alternés et décroissants et que l'on admette qu'il continue toujours d'en être ainsi, on en déduit immédiatement que deux sommes S_h et S_{h+1} relatives à deux valeurs consécutives comprennent entre elles la somme limite S.

Reprenons la fonction (17) en supposant toujours connues seulement les huit premières valeurs numériques : nous obtiendrons au moyen des Tableaux III ou IV les valeurs

$$S_6 = 1,662\ldots \qquad S_7 = 1,631\ldots$$

et en remarquant que les S d'indice pair décroissent alors que les S d'indice impair croissent, nous pouvons présumer que la valeur limite $(1,6449)$ est comprise entre les deux nombres précédents, résultat intéressant à côté de la faible approximation $(1,527\ldots)$ donnée par l'addition des huit termes connus.

La formule (24) donne une valeur approchée du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme en fonction des précédents par un calcul analogue à celui fait au paragraphe 8. Ici nous supposons non plus $w_n = 0$ mais $r_n = 0$ et dans l'exemple choisi le neuvième terme sera donné avec une erreur égale en valeur absolue à

$$\frac{r_8}{218790} = \frac{1}{9 \times 218790} = \frac{1}{1969110},$$

soit moins de la vingt-quatre millième partie du terme inconnu $\left(\frac{1}{81}\right)$.

Les formules (23) fournissent d'ailleurs les coefficients de la série de facultés qui correspond aux hypothèses faites. Pour la fonction (17) la coïncidence des nombres trouvés

$$a_1 = 0, \qquad \frac{2a_2}{2} = 36, \qquad \frac{3a_3}{2} = -594, \qquad \ldots$$

avec ceux de la huitième ligne du Tableau IV, est purement accidentelle et résulte de propriétés sur lesquelles il est inutile de s'étendre ici.

11. Les Tableaux III et IV donnent les premières valeurs de r et de S en fonction des seules valeurs $f(0)$, $f(1)$, ... Elles ont été calculées pour les r par la formule

$$(26)\qquad (-1)^{h-1} r_h = (\mathrm{H}_0 - \mathrm{H}_1) f(0) + \frac{3!}{1!^2}(\mathrm{H}_1 - 2\mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3) f(1) + \ldots.$$

Celles des S se déduisent facilement des précédentes. Leur expression est d'ailleurs

$$(27)\qquad \frac{\mathrm{S}_h}{2} = \sum_{n=0}^{h} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} f(n) \left[\Omega \cos \pi x \, \frac{\mathrm{X}_n - (n+1)\mathrm{X}_{n+1} - \ldots}{x+1}\right]_{x=h-1}.$$

Par exemple les coefficients de $f(1)$ ont pour valeurs

$$6\,\Omega \cos\pi x \, \frac{X_1 - 2X_2 + X_3}{x+1} = \cos\pi h \left[H_1 - H_2 - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2}.$$

Les nombres de ces tableaux croissent très vite et il convient de constater le caractère très spécial des méthodes exposées dans ce chapitre ou à la fin du chapitre précédent et qui rattache des approximations numériques au calcul de rapport ou de différence de très grands nombres.

12. Signalons sommairement, pour terminer, la transformation que l'on peut faire subir à l'expression de la somme S_h donnée par la formule (24) par l'application du procédé général qui résulte de la formule (7) du Chapitre IV.

Si nous définissons une suite de nombres ρ_n comme les réciproques de ceux de la suite $(-1)^n \frac{r_n}{n+1}$, les ρ s'exprimeront en fonction linéaire des valeurs $f(p)$ au moyen des coefficients du nouveau Tableau V et cela d'une manière très simple puisque dans la $p^{\text{ième}}$ colonne de ce tableau il n'y a que p coefficients non nuls qui sont ceux de la série de Newton correspondant à

$$\left[\frac{1}{(p-1)!}\right]^2 x(x-1)\ldots(x-p+2)(x+2)\ldots(x+p).$$

TABLEAU V.

ρ_n.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.	$f(8)$.
$n=0$...	1								
1...	0	3							
2...	0	—2	10						
3...	0	0	—15	35					
4...	0	0	6	—84	126				
5...	0	0	0	70	—420	462			
6...	0	0	0	—20	540	—1980	1716		
7...	0	0	0	0	—315	3465	—9009	6435	
8...	0	0	0	0	0	—3080	20020	—40040	24310

TABLEAU VI.

σ_n.	$f(0)$.	$f(1)$.	$f(2)$.	$f(3)$.	$f(4)$.	$f(5)$.	$f(6)$.	$f(7)$.	$f(8)$.
$n = 0\ldots$	1								
1...	1	$\frac{3}{2}$							
2...	1	1	$\frac{5}{2}$						
3...	1	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{35}{8}$					
4...	1	1	1	$-\frac{7}{8}$	$\frac{63}{8}$				
5...	1	1	1	$\frac{21}{16}$	$-\frac{84}{16}$	$\frac{231}{16}$			
6...	1	1	1	1	$\frac{51}{16}$	$-\frac{264}{16}$	$\frac{429}{16}$		
7...	1	1	1	1	$\frac{93}{128}$	$\frac{1353}{128}$	$-\frac{5577}{128}$	$\frac{6435}{128}$	
8...	1	1	1	1	1	$-\frac{187}{128}$	$\frac{4433}{128}$	$-\frac{13585}{128}$	$\frac{12155}{128}$

Les sommes S_h du Tableau IV seront remplacées par de nouvelles expressions

$$\sigma_h = \rho_0 + \frac{1}{2}\rho_1 + \ldots + \frac{1}{2^h}\rho_h$$

qui se calculeront au moyen du Tableau VI.

Si les valeurs trouvées pour les ρ sont toutes de même signe et décroissantes et si nous admettons qu'il doit continuer à en être ainsi, la série σ_h aura, pour h infini, une limite S comprise entre σ_h et $\sigma_h + \frac{\rho_h}{2^h}$.

Par exemple dans l'exemple cité en faisant $h = 7$ nous trouverons

$$1,643\ldots < S < 1,645\ldots.$$

Au fond, la transformation se justifie par l'emploi conventionnel d'hypothèses telles que

$$r_{h+1} = r_{h+2} = \ldots = 0, \qquad \rho_h = \rho_{h+1} = \ldots = \text{const.},$$

$$\frac{r_h}{h+1} = -\frac{r_{h+1}}{h+2} = \ldots = \text{const.}, \qquad \rho_{h+1} = \rho_{h+2} = \ldots = 0.$$

FIN.

ERRATA

Page.	Ligne.	*Au lieu de :*	*Lire :*
14	24	$\frac{n^{x-2}}{\Gamma(x+1)}$	$\frac{n^{x-2}}{\Gamma(x-1)}$
15	10	449 001 600	479 001 600
17	7	$2\frac{x^2}{1}$	$2\frac{x^2}{2!}$
29	9, 10, 12	e^{-x}	2^{-x}
34	20	indice pair	indice impair
41	11	$\frac{1}{h-1}$	$\frac{1}{h}$
41	18	2	$(-1)^{n+1}2$
57	11	x^{2n}	$x^{2^{2n}}$
69	21	$X_n = i_0\gamma_0 + \ldots$	$X_n = i_0\gamma_{n-1} + \ldots$
75	11	$\rho(x)\rho(x)$	$\rho(x) =$
76	8	$(y-2m-1)$	$(y-2m-2)$
82	11	0,19264736	0,19269472
86	19	$\frac{1}{(0!)^2}, \frac{3}{(1!)^2}$	$\frac{2}{(1!)^2}, \frac{4}{(2!)^2}$
87	3	$-\chi_2$	χ_2
87	14	divergentes	compliquées
88	25	λ_n	λ_{n+1}
89	20	W_0	$W_0\chi_0$
90	26 et 28	$(2n+1)$	$(2n+3)$
92	Tableau II	$-\xi_n$	$-\xi_{n+1}$

NOTES.

Page 41, la formule de la ligne 17 doit se lire :

$$-\left[\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{(h-1)(h-2)}{2}\frac{1}{2^{h-1}}\right] = -2 + \frac{h(h+1)+2}{2^h}.$$

SER. — *Les calculs formels des séries de factorielles.*

Page 53, après le premier alinéa, ajouter : les formules (7) et (30) peuvent aussi se vérifier en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{h} 2^{-n} f_n = \sum_{n=0}^{h} (-1)^n f(x) [\Omega\, 2^{-x} X_n]_{x=h},$$

et en utilisant la formule (16) du Chapitre III.

Page 75, *in fine*, ajouter : la suite des coefficients

$$0, \quad \frac{1}{720}, \quad \frac{1}{720}, \quad \frac{10}{8064}, \quad \frac{11}{10080}, \quad \dots$$

est autoréciproque négativement et a pour somme $\frac{1}{12}$.

Page 84, après le quatrième alinéa, ajouter : En supposant $g(s, y)$ développé en séries de facultés, on détermine facilement les coefficients par l'équation fonctionnelle et l'on obtient ensuite par réciprocité une expression de $g_n(y)$,

$$g_n(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \left[y - P_1 \frac{y^2}{1!} - P_2 \frac{y^3}{2!} - \dots - P_p \frac{y^{p+1}}{p!} \right] \frac{1}{n+p+1},$$

$$P_h = \frac{p(1-p)\dots(h-1-p)}{h!},$$

et pour $n = 0$,

$$-e^y li\, e^{-y} = \sum_{p=0}^{\infty} \left[1 - P_1 \frac{y}{1!} - P_2 \frac{y^2}{2!} - \dots - P_p \frac{y^p}{p!} \right] \frac{1}{p+1}.$$

les polynomes en y étant ceux de Laguerre.

Page 88, *in fine;* tous les λ, sauf le premier sont positifs et la suite $n\lambda_n$ est convergente.

TABLE DES MATIÈRES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
95770 Quai des Grands-Augustins, 55.

fr. 2 40 —

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

95770 Quai des Grands-Augustins, 55.

GAUTHIER-VILLARS

PARIS