

JRAM 226 (1967) → 2789
~~2794~~
~~2795~~
 277-8

C. Réduction de la relation de récurrence d'un dénombrant

La relation de récurrence que vérifie le dénombrant d'un polyèdre général rationnel s'obtient vite et sans peine, puisque sa détermination revient simplement à déterminer les dénominateurs des sommets. Pour calculer ce dénombrant il n'en est pas de même, car si $\Pi(d)$ est de degré α , pour appliquer la récurrence $\{\Pi(d)\} = 0$ il faut préalablement compter α valeurs initiales de d_n , et si l'on veut exprimer en fonction de n le polynôme mixte d_n , il faut en plus décomposer en éléments simples la fraction génératrice $\frac{f(t)}{\Pi(t)}$. Ces deux opérations peuvent être laborieuses si α est grand. D'où l'intérêt des propositions suivantes, qui permettent en général d'abaisser considérablement le degré de $\Pi(t)$. Le produit caractéristique simplifié $\omega(t)$ fournit une relation de récurrence eulérienne d'ordre inférieur $\{\omega(d)\} = 0$, qui est encore symétrique ou antisymétrique.

Proposition 4.3. *Le produit caractéristique simplifié d'un polyèdre général rationnel à k dimensions ne présente aucun facteur $1 - ct$ à une puissance supérieure à $k + 1$. Si le réseau est de mêmes dimensions que le polyèdre, $1 - t$ est le seul facteur qui figure à la puissance $k + 1$.*

Si la variété affine A à k dimensions, engendrée par un des simplexes constituants, est réticulaire, son dénombrant est de l'ordre de Vn^k quand n tend vers l'infini. Or un facteur $(1 - ct)^{k+2}$, par exemple, dans $\omega(t)$ ferait entrer dans le polynôme mixte dénombrant d_n un terme en n^{k+1} . Un facteur $(1 - ct)^{k+1}$, où $c \neq 1$, introduirait dans le coefficient de n^k un terme variable.

Si A n'est pas réticulaire, un facteur $(1 - ct)^{k+2}$ ne peut non plus se présenter, car d_n est alors périodiquement nul ou de l'ordre de Vn^k .

Corollaire 4.4. *Le produit caractéristique simplifié d'un polyèdre normal rationnel k -dimensionnel ne présente aucun facteur $1 - ct$ à une puissance supérieure à $k + 1$ pour i_n et j_n , à k pour p_n . Si le réseau est de mêmes dimensions que le polyèdre, $1 - t$ est le seul facteur qui figure à la puissance $k + 1$ pour i_n et j_n .*

Exemple. Calculer i_n pour le quadrilatère $(0, 1) (0, 0) (1, 0) \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ et trouver la relation de récurrence vérifiée par i_n .

Les sommets ayant pour dénominateurs 1, 1, 1, 6, le produit caractéristique simplifié, qui ne doit renfermer le facteur $1 - t$ qu'à la puissance 3, est

$$(1 - t)^2 (1 - t^6) = 1 - 2t + t^2 - t^6 + 2t^7 - t^8.$$

D'où

$$i_n - 2i_{n-1} + i_{n-2} - i_{n-6} + 2i_{n-7} - i_{n-8} = 0.$$

Pour n de 1 à 8 on compte $i_n = 0, 0, 1, 3, 6, 9, 13, 18$. On peut donc former la fraction génératrice, qui donne

$$i_n = \frac{5n^2}{12} - \frac{7n}{6} + \frac{67}{72} - \frac{(-1)^n}{24} - \frac{1}{9} \cos(2n - 1) \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \cos(n + 1) \frac{\pi}{3}$$

ou, en négligeant une partie inférieure à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue et en introduisant le symbole $\| a \|$, qui désigne l'entier le plus voisin de a ,

$$i_n = \left\| \frac{n(5n - 14)}{12} \right\| + 1.$$

2. *Cas général.* On peut supposer que O, A, B se suivent dans cet ordre sur OX . Alors $j_{AB}(n) = j_{OB}(n) - j_{OA}(n) + j_A(n)$, qui devient en remplaçant n par $(-n)$

$$j_{AB}(-n) = -i_{OB}(n) + i_{OA}(n) + j_A(n) = -i_{AB}(n).$$

Domaines réciproques. Soit un polyèdre normal P à k dimensions, rationnel dans un réseau G^k . Répartissons ses faces $(k-1)$ -dimensionnelles en deux catégories, dites rouges et vertes. Considérons le domaine obtenu en supprimant du polyèdre fermé les faces rouges avec les bords communs aux faces rouges et vertes. Si l'on supprime au contraire les faces vertes, bords compris, on obtient le domaine réciproque.

On sait que le dénombrant $d(n)$ d'un domaine est un polynôme mixte en n , ou un vrai polynôme si P est entier.

Loi de réciprocité. Les dénombrants de deux domaines k -dimensionnels réciproques sont liés par $d'(n) = (-1)^k d(-n)$.

Corollaires A. 1. La relation de récurrence eulérienne que vérifie le d_n d'un domaine polyédrique subsiste si l'on descend aux indices négatifs, en convenant que $d_{-r} = (-1)^k d'_r$.

2789

| n | d_n | d'_n |
|-----|-------|--------|
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 4 | 0 |
| 3 | 7 | 1 |
| 4 | 11 | 3 |
| 5 | 16 | 6 |
| 6 | 21 | 9 |
| 7 | 28 | 14 |
| 8 | 35 | 19 |

Exemple. Considérons le quadrilatère non convexe fermé $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), B(0, 1), O(0, 0), C(1, 0)$.

Soit d_n le dénombrant du domaine obtenu en le privant du côté fermé AB , et d'_n celui du domaine réciproque, obtenu en le privant de la ligne brisée fermée $ACOB$. Par dénombrement on obtient le tableau ci-contre.

Le produit caractéristique du quadrilatère étant $(1-t)^2(1-t^6)$, d_n et d'_n vérifient la relation de récurrence

$$d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2} - d_{n-6} + 2d_{n-7} - d_{n-8} = 0.$$

Pour $n = 8$, elle fournit la valeur conventionnelle $d_0 = 0$. Pour $n = 4$, par exemple, elle devient

$$d_4 - 2d_3 + d_2 - d_{-2} + 2d_{-3} - d_{-4} = 0,$$

que l'on vérifie facilement en remplaçant d_{-2}, d_{-3}, d_{-4} par d'_2, d'_3, d'_4 . On peut ainsi calculer tous les éléments de la troisième colonne du tableau par ceux de la seconde ou inversement.

2. *Propriété des congruences complémentaires:* Soit D le dénominateur du polyèdre. On sait que pour les entiers d'une congruence $n \equiv r, \text{ mod } D$, i_n est un polynôme $f(n)$ et pour les entiers $n' \equiv r' \text{ mod } D$, d'_n est un polynôme $g(n')$. Si $r + r' = D$, ces deux polynômes sont tels que $g(X) = (-1)^k f(-X)$.

En effet dans l'expression $(-1)^k i(-n')$ du polynôme mixte $j(n')$ le coefficient d'une puissance $(-n')^x$ est une somme de termes de la forme

$$A \cos \frac{2\pi}{a} p \cdot (-n') + B \sin \frac{2\pi}{a} p \cdot (-n'),$$

où a est le dénominateur d'un sommet du polyèdre, donc un diviseur de D . Comme $(-n')$ fait partie de la congruence $n \equiv r \text{ (mod } D)$, le coefficient de $(-n')^x$ dans $(-1)^k i(-n')$ est le même que celui de n^x dans $i(n)$.

Un cas particulier important de domaines réciproques est constitué par le couple polyèdre fermé — polyèdre ouvert, dont les dénombrants sont respectivement j_n et i_n .