LIBRARY PHOTODUPLICATION ORDER FORM

Date of request: 3-26-73

Requester's Order No. ~~MoKL-8~~ 2854

Supplier's Order No. ~~3048~~

Call-No. fac

3049

BELL TELEPHONE LABORATORIES
TECHNICAL LIBRARY
ROOM 1F-108
MURRAY HILL, NJ 07974

REPORTS:
NOT SENT BECAUSE:
- [ ] Not owned by Library
- [ ] File is incomplete
- [ ] In use
- [ ] Hold Placed
- [ ] Request again
- [ ] Publication not yet received
- [ ] Please verify your reference
- [ ] Other:
- [ ] Suggest you request of:

Estimated Cost of Microfilm ________
Photoprint ______

Please pay in advance
Please do not pay in advance

Author (or Periodical title, vol. and year)

Fold →

Akademiia Navuk BSSR, Minsk
Vestsi. Seryia Fizika-matematychnykh Navuk
#6, 1970

Title (with author and pages for periodical articles) (incl. edition, place and date)

"Enumeration of Euler Graphs" (Russian)
Liskovec, V.A.
Pages 38-46 Complete article desired.

- [ ] Any edition

Verified in (or Source of reference)

Math. Rev. Dec.1972 Page 1195#6557

Request - [ ] microfilm - [x] photoprint - [ ] Other Remarks: Vol 44

Linda Hall Library
Science and Technology
5109 Cherry Street
Kansas City, Missouri 64110

Please send cost estimate for
- [ ] microfilm
- [ ] photoprint

Go ahead with the order if it does not exceed: $________________

Special instructions:

Please send invoice.

NOTE: This material is requested in accordance with the A. L. A. recommendations concerning the photocopying of copyrighted materials.

ORDER AUTHORIZED BY:

3048

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1970
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

give the Math Rev reference

УДК 519.1

В. А. ЛИСКОВЕЦ

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЭЙЛЕРОВЫХ ГРАФОВ

Граф называется эйлеровым, если он обладает циклом, проходящим через каждую вершину и содержащим каждое ребро графа ровно по одному разу. Всюду в дальнейшем под графом понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Как известно (см. [3], стр. 56), граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

В настоящей работе выводится формула для числа попарно неизоморфных эйлеровых графов с заданным числом вершин и ребер. Это достигается обобщением метода, примененного Ридом [8] для подсчета эйлеровых графов с отмеченными (занумерованными) вершинами, в сочетании с техникой теории перечисления Пойа. Полученная формула содержит выражение, аналогичное циклическому индексу обычной группы ребер, но содержащее переменные двух типов. Эта формула несравненно более проста, нежели тривиальное выражение через количества графов с заданными степенями вершин. Подробнее о задаче подсчета эйлеровых графов см. [6], где она фигурирует в списке основных нерешенных задач перечисления графов (см. также [5]).

Подсчет эйлеровых графов естественно распадается на два этапа. Сначала находится число всех графов с четными степенями вершин, затем искомое число связных графов выражается через это число стандартным образом. Поэтому вся проблема сводится к решению первой задачи. Чтобы не вводить новых определений, эйлеровым графом будем называть впредь, следуя Риду, всякий граф с четными степенями вершин. Число неизоморфных эйлеровых графов с n вершинами и N ребрами обозначим $E_0(n, N)$, а число их с n вершинами — $E_0(n)$. Нахождение $E_0(n)$ оказывается значительно более простым делом, основанным на иных соображениях, и проводится отдельно *).

§ 1. Мы пользуемся терминологией и обозначениями статьи [2]. В качестве исходного множества вершин выступает множество $V = V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

По лемме Бернсайда (см. [1, 2, 6]), справедливо выражение

$$E_0(n, N) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} e_0(g, N), \tag{1}$$

где $e_0(g, N)$ — число всех инвариантных относительно заданной подстановки g эйлеровых графов на V_n с N ребрами, g пробегает множество всех подстановок на V_n. Так как для сопряженных подстановок g_1 и g_2 $e_0(g_1, N) =$

*) Примечание при корректуре. Недавно автору стало известно, что аналогичные результаты для $E_0(n)$ ранее получил Р. У. Робинсон.

$= e_0(g_2, N)$, то, обозначив их общее значение через $e_0(\tau, N)$, где τ — цикольный тип g_1 и g_2, это выражение можно записать в виде (см. [2])

$$E_0(n, N) = \sum_{|\tau|=n} \frac{1}{\tau!\,\pi(\tau)} e_0(\tau, N), \tag{2}$$

где $\tau = (1^{j_1} 2^{j_2} \dots n^{j_n})$ пробегает всевозможные разбиения n, т. е. $|\tau| \equiv \sum_{l=1}^{n} l j_l = n$, $j_l \geqslant 0$; $\tau! = \prod_l (j_l!)$, $\pi(\tau) = \prod_l l^{j_l}$.

Введя производящие многочлены $E_0(n, x) = \sum_{N=0}^{n(n-1)/2} E_0(n, N)\, x^N$ и $e_0(\tau, x) = \sum_N e_0(\tau, N)\, x^N$, получим из (2) выражение

$$E_0(n, x) = \sum_{\tau} \frac{1}{\tau!\,\pi(\tau)} e_0(\tau, x). \tag{3}$$

Для общего числа $P_0(n, N)$ неориентированных графов справедливы аналогичные формулы

$$P_0(n, N) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} p_0(g, N),$$

$$P_0(n, N) = \sum_{|\tau|=n} \frac{1}{\tau!\,\pi(\tau)} p_0(\tau, N),$$

$$P_0(n, x) = \sum_{\tau} \frac{1}{\tau!\,\pi(\tau)} p_0(\tau, x)$$

с соответствующим смыслом входящих величин.

Наконец, для числа $P_0(r, b, N)$ двудольных графов ([3], стр. 139) с r «красными» и b «синими» вершинами аналогичные выражения таковы:

$$P_0(r, b, N) = \sum_{\substack{|\sigma|=r \\ |\delta|=b}} \frac{1}{\sigma!\,\delta!\,\pi(\sigma+\delta)} p_0(\sigma, \delta, N),$$

$$P_0(r, b, x) = \sum_{\sigma, \delta} \frac{1}{\sigma!\,\delta!\,\pi(\sigma+\delta)} p_0(\sigma, \delta, x),$$

где $\sigma = (1^{i_1} \dots r^{i_r})$, $\delta = (1^{k_1} \dots b^{k_b})$, $\sigma + \delta = (1^{i_1+k_1} 2^{i_2+k_2} \dots)$.

Очевидна

Лемма 1. *Возможные наборы ребер, соединяющих вершины пары циклов подстановки g между собой, в графах, инвариантных относительно g, не зависят друг от друга для разных пар циклов.*

Пусть c_1 и c_2 — циклы g длин l и m соответственно, Γ — произвольный граф, инвариантный относительно g ($g(\Gamma) = \Gamma$), $N_{c_1, c_2}(\Gamma)$ — число ребер Γ, соединяющих вершины c_1 и c_2 между собой, $K(c_1, c_2) = \{N_{c_1, c_2}(\Gamma)\}_\Gamma$. Существенную роль в дальнейшем будет играть следующее простое и в сущности хорошо известное утверждение (ср. [4], стр. 171), которое мы приводим без доказательства.

Лемма 2. 1) *Пусть* $c_1 \neq c_2$. $K(c_1, c_2)$ *состоит из всех чисел вида* $k[l, m]$, *где* $k = 0, 1, \ldots, (l, m)$. *Существует* $C^k_{(l,m)}$ *возможных способов соединения вершин* c_1 *и* c_2 $k[l, m]$ *ребрами допустимо относительно* g, *причем степень каждой вершины цикла* c_1 *(число инцидентных ей ребер) в таком соединении равна* $\dfrac{k[l, m]}{l}$.

2) *Пусть* $c_1 = c_2$. $K(c_1, c_1)$ *состоит из чисел* kl, *а если* l *четно, то еще и из чисел* $kl + \dfrac{l}{2}$, *где в обоих случаях* $k = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{l-1}{2}\right]$. *Существует* $C^k_{\left[\frac{l-1}{2}\right]}$ *способов соединения* kl *или* $kl + \dfrac{l}{2}$ *ребрами, причем в первом случае степени вершин равны* $2k$, *а во втором* $2k+1$.

Здесь $[l, m]$ — наименьшее общее кратное чисел l и m, (l, m) — их наибольший общий делитель, C^k_p — число сочетаний из p по k, $[q]$ — целая часть числа q.

Отмеченная особенность поведения циклов четной длины заключается в возможности соединения противолежащих вершин $\left(\text{т. е. находящихся на расстоянии } \dfrac{l}{2} \text{ друг от друга}\right)$ всего лишь $\dfrac{l}{2}$ ребрами допустимо относительно g и играет важную роль в перечислении графов.

Обе леммы легко позволяют получить выражение $P_0(n, x)$ без непосредственного обращения к теореме Пойа.

Следствие (ср. [6, 7]).

$$p_0(\tau, x) = \prod_{1 \leqslant l < m \leqslant n} (1 + x^{[l,m]})^{(l,m) j_l j_m} \prod_{l=1}^{n} (1 + x^l)^{l \frac{j_l(j_l-1)}{2} + \left[\frac{l-1}{2}\right] j_l} \times$$

$$\times \prod_{l,2|l} \left(1 + x^{\frac{l}{2}}\right)^{j_l}, \tag{4}$$

$$p_0(\sigma, \delta, x) = \prod_{l,m} \left(1 + x^{[l,m]}\right)^{(l,m) i_l k_m}.$$

Справедливость этих формул проверяется непосредственным перемножением на основании предыдущего (ср. ниже).

Положим по определению

$$p_0(\varnothing, x) = p_0(\varnothing, \delta, x) = p_0(\sigma, \varnothing, x) = 1,$$

где $\varnothing$ — пустое разбиение, $|\varnothing| = 0$.

§ 2. Для нахождения $e_0(\tau, N)$ используется следующая конструкция, обобщающая построение Рида [8] для случая $\tau = (1^n)$ графов с отмеченными вершинами. Пусть g — фиксированная подстановка на V типа τ. Припишем каждой вершине V знак $+1$ или -1 произвольным образом инвариантно относительно g. Это означает, что вершинам каждого цикла приписан один и тот же знак. Пусть Γ — граф, инвариантный относительно g. Обозначим через $d_{c_2}(c_1)$ степени вершин цикла c_1 подстановки g в соединении их в Γ с вершинами цикла c_2. Припишем тогда множеству ребер Γ, соединяющих c_1 и c_2, знак

$$\varepsilon_\Gamma(c_1, c_2) = \varepsilon(c_1)^{d_{c_2}(c_1)} \varepsilon(c_2)^{d_{c_1}(c_2)}, \quad c_1 \neq c_2,$$

$$\varepsilon_\Gamma(c_1, c_1) = \varepsilon(c_1)^{d_{c_1}(c_1)},$$

где $\varepsilon(c_i)$ — знак вершин c_i. Всему Γ припишем знак

$$\varepsilon(\Gamma) = \prod_{\{c_1, c_2\}} \varepsilon_\Gamma(c_1, c_2),$$

где произведение берется по всевозможным неупорядоченным парам циклов g (не обязательно различных).

Лемма 3. $\varepsilon(\Gamma) = \prod\limits_{c_i} \varepsilon(c_i)^{d(c_i)}$, *где* $d(c_i)$ — *общая степень каждой вершины цикла* c_i *в* Γ.

В самом деле, $d(c_i) = \sum\limits_{c_j} d_{c_j}(c_i)$.

Обозначим далее

$$\varphi(\Gamma) = \sum_{\{\varepsilon(c_i)=\pm 1\}} \varepsilon(\Gamma),$$

где сумма берется по всевозможным допустимым относительно g расстановкам знаков на V.

Значение этой конструкции для подсчета эйлеровых графов определяется следующей теоремой.

Теорема 1.

$$\varphi(\Gamma) = \begin{cases} 2^{k(g)}, & \Gamma \text{ эйлеров}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где $k(g)$ — *число циклов* g.

Доказательство. Если граф Γ эйлеров, то по лемме 3 при всякой расстановке знаков на V $\varepsilon(\Gamma) = +1$. Остается заметить, что существует $2^{k(g)}$ вариантов расстановки знаков.

Пусть теперь Γ не эйлеров и c — такой цикл g, вершины которого имеют в Γ нечетную степень. $\varphi(\Gamma) = \sum\limits_{\substack{\pm 1 \\ \varepsilon(c)=+1}} \varepsilon(\Gamma) + \sum\limits_{\substack{\pm 1 \\ \varepsilon(c)=-1}} \varepsilon(\Gamma)$. По лемме 3 ясно, что вторая сумма состоит из тех же слагаемых, что и первая, только с обратными знаками. Поэтому обе суммы взаимно уничтожаются. Теорема доказана.

Пусть $H(g, N)$ — множество всех графов на V с N ребрами, инвариантных относительно g.

Следствие 1. $e_0(g, N) = 2^{-k(g)} \sum\limits_{\{\varepsilon(c_i)=\pm 1\}} \sum\limits_{\Gamma \in H(g,N)} \varepsilon(\Gamma)$.

Выражение здесь справа представим иначе. Заметим, что всякий вариант приписывания знаков однозначно определяется множеством вершин W, $\varnothing \subseteq W \subseteq V$, которым приписан знак $+1$. Здесь $g(W) = W$. Обозначим $f = g|_W$ — ограничение g на W, $h = g|_{V-W}$. Тогда $f(\Gamma_W) = \Gamma_W$, $h(\Gamma_{V-W}) = \Gamma_{V-W}$, $\Gamma = \Gamma_W \cup \Gamma' \cup \Gamma_{V-W}$, $\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma')\,\varepsilon(\Gamma_{V-W})$ и

$$\sum_{\Gamma \in H(g,N)} \varepsilon(\Gamma) = \sum_{K+L+M=N} p_0(f, K)\, p_0^{+-}(f, h, L)\, p_0^{-}(h, M).$$

Здесь $p_0^{+-}(f, h, L)$ означает сумму знаков всех двудольных графов Γ' с L ребрами, инвариантных относительно g, «красные» вершины которых образуют множество W и имеют знак $+1$, а «синие» образуют $V - W$ и имеют знак -1. $p_0^{-}(h, M)$ означает сумму знаков всех графов на $V - W$ с M ребрами, инвариантных относительно h, всем вершинам которых приписан знак -1. Отсюда получаем выражение

$$e_0(g, N) = 2^{-k(g)} \sum_{W, g(W)=W} \sum_{K+L+M=N} p_0(f, K)\, p_0^{+-}(f, h, L)\, p_0^{-}(h, M).$$

Легко убедиться, что в соответствующих производящих многочленах это равносильно выражению

$$e_0(g, x) = 2^{-k(g)} \sum_{W} p_0(f, x)\, p_0^{+-}(f, h, x)\, p_0^{-}(h, x).$$

Учитывая (1), получаем

$$E_0(n, x) = \frac{1}{n!} \sum_{W \subseteq V} \sum_{\substack{f \in S_W \\ h \in S_{V-W}}} 2^{-(k(f)+k(h))} p_0(f, x)\, p_0^{+-}(f, h, x)\, p_0^{-}(h, x),$$

где S_W — симметрическая группа на W, а в случае, когда f или h — подстановки пустого множества, содержащие их сомножители считаются равными 1.

Поскольку значения отдельных слагаемых в этой формуле совпадают для равномощных W и однотипных пар подстановок, получаем следующее выражение.

Следствие 2*).

$$E_0(n, x) = \sum_{\substack{\sigma, \delta \\ |\sigma+\delta|=n}} \frac{2^{-k(\sigma+\delta)}}{\sigma!\delta!\pi(\sigma+\delta)} p_0(\sigma, x)\, p_0^{+-}(\sigma, \delta, x)\, p_0^{-}(\delta, x) \qquad (5)$$

с соответствующим смыслом сомножителей, где $k(\tau) = j_1 + j_2 + \cdots$ — число слагаемых в разбиении τ.

Перейдем к выводу явных формул для $p_0^{+-}(\sigma, \delta, x)$ и $p_0^{-}(\delta, x)$.

Пусть c_1 — цикл f длины l, c_2 — цикл h длины m, где f и h — выбранные подстановки на W и $V-W$ типа σ и δ соответственно. По лемме 2 существует $C^k_{(l,m)}$ способов допустимого соединения вершин этих циклов между собой $k[l, m]$ ребрами, причем каждому такому соединению отвечает знак $(-1)^{\frac{k[l,m]}{m}}$. Поэтому производящий многочлен числа таких соединений по числу ребер с учетом их знака имеет вид $r(c_1, c_2, x) = \sum_{k=0}^{(l,m)} (-1)^{\frac{k[l,m]}{m}} C^k_{(l,m)} x^{k[l,m]} = \left(1 + (-1)^{\frac{[l,m]}{m}} x^{[l,m]}\right)^{(l,m)}$. Возможны две ситуации. 1) $\frac{[l, m]}{m}$ четно. Это имеет место в том и только в том случае, когда $\alpha(l) > \alpha(m)$, где $\alpha(l) = 2^a$ — наибольшая степень 2, делящая l. При этом $r(c_1, c_2, x) = (1 + x^{[l,m]})^{(l,m)}$. 2) $\frac{[l, m]}{m}$ нечетно. Это имеет место при $\alpha(l) \leqslant \alpha(m)$ и дает $r(c_1, c_2, x) = (1 - x^{[l,m]})^{(l,m)}$.

---

*) Отметим также, что

$$e_0(\tau, x) = 2^{-k(\tau)} \sum_{\sigma+\delta=\tau} C^{\sigma}_{\tau} p_0(\sigma, x)\, p_0^{+-}(\sigma, \delta, x)\, p_0^{-}(\delta, x).$$

По лемме 1 и определению $\varepsilon(\Gamma)$ $p_0^{+-}(f, h, x)=\prod\limits_{\substack{c_1\in f\\ c_2\in h}} r(c_1, c_2, x)$. Поэтому на языке разбиений получаем

$$p_0^{+-}(\sigma, \delta, x)=\prod_{\substack{l,m\\ \alpha(l)>\alpha(m)}}\left(1+x^{[l,m]}\right)^{(l,m)i_lk_m}\prod_{\substack{l,m\\ \alpha(l)<\alpha(m)}}\left(1-x^{[l,m]}\right)^{(l,m)i_lk_m}, \qquad (6)$$

где $\sigma=(1^{i_1}2^{i_2}\ldots)$, $\delta=(1^{k_1}2^{k_2}\ldots)$, $\alpha(l)=2^a$, $2^a\,|\,l$, 2^{a+1} не делит l.

Теперь рассмотрим $p_0^{-}(h, x)$. Здесь соединение вершин циклов c_1 и c_2 при $c_1\neq c_2$ $k[l, m]$ ребрами вносит знак $(-1)^{\frac{k[l,m]}{l}+\frac{k[l,m]}{m}}$. Очевидно, $\dfrac{[l, m]}{l}+\dfrac{[l, m]}{m}$ четно тогда и только тогда, когда $\alpha(l)=\alpha(m)$. При этом аналогично соответствующий производящий многочлен $r(c_1, c_2, x)=$ $=\left(1+x^{[l,m]}\right)^{(l,m)}$; в противном случае $r(c_1, c_2, x)=\left(1-x^{[l,m]}\right)^{(l,m)}$. Перейдем к рассмотрению ребер, соединяющих вершины цикла $c=c_1$ между собой. 1) Если среди этих ребер нет ребер, соединяющих противолежащие вершины (существующие лишь при четном l), то по лемме 2 эти ребра вносят знак $+1$ и производящий многочлен их числа $r(c, x)=(1+x^l)^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}$. 2) Если l четно, вклад ребер, соединяющих противолежащие вершины, рассмотрим отдельно и соответствующий им многочлен обозначим $s(c, x)$. Если эти $\dfrac{l}{2}$ ребер есть, то они вносят знак -1, так что $s(c, x)=1-x^{\frac{l}{2}}$, а весь производящий многочлен числа соединений вершин c с учетом знака здесь таков: $r(c, x)\,s(c, x)$. По лемме 1 на языке разбиений это дает выражение

$$p_0^{-}(\delta, x)=\prod_{\substack{l<m\\ \alpha(l)=\alpha(m)}}\left(1+x^{[l,m]}\right)^{(l,m)k_lk_m}\prod_{\substack{l<m\\ \alpha(l)\neq\alpha(m)}}\left(1-x^{[l,m]}\right)^{(l,m)k_lk_m}\times$$

$$\times\prod_{l}(1+x^l)^{l\frac{k_l(k_l-1)}{2}+\left[\frac{l-1}{2}\right]k_l}\prod_{l,2|l}\left(1-x^{\frac{l}{2}}\right)^{k_l}. \qquad (7)$$

Можно было бы ограничиться этими формулами, которые вместе с (4) и (5) дают решение задачи, однако окончательный результат мы представим в более употребительной форме. Заметим, что выражения $p_0^{+-}(\sigma, \delta, x)$ и $p_0^{-}(\delta, x)$ отличаются лишь знаком минус в некоторых сомножителях от соответствующих выражений $p_0(\sigma, \delta, x)$ и $p_0(\delta, x)$. Поэтому их можно представить как члены, получающиеся после определенной подстановки в специально построенное выражение, аналогичное циклическому индексу. В отличие от обычного циклического индекса группы, индуцированной S_n на множестве всех пар вершин (для получения $P_0(n, x)$) [4, 6, 7], здесь переменные приходится специализировать не только по длине возникающего цикла ребер, соединяющих вершины двух циклов, но и по характеру взаимоотношения степеней 2, делящих длины последних. Это приводит к переменным двух типов $y_{[l,m]}$ и $z_{[l,m]}$. Как и обычно, достоинством такого построения является возможность приведения всех членов с последующей однократной подстановкой переменных.

Подходящей конструкцией в данном случае является следующая. Рассмотрим выражение

$$Y(n,\ y,\ z)=\sum_{\substack{\sigma,\delta\\ |\sigma+\delta|=n}}\frac{2^{-k(\sigma+\delta)}}{\sigma!\delta!\pi(\sigma+\delta)}J_1(\sigma,\ y)\,J_2(\sigma,\ \delta,\ y,\ z)\,J_3(\delta,\ y,\ z), \tag{8}$$

где $y=(y_1,\ y_2,\ \ldots)$, $z=(z_1,\ z_2,\ \ldots)$, $\sigma=(1^{i_1}2^{i_2}\ldots)$, $\delta=(1^{k_1}2^{k_2}\ldots)$ и

$$J_1(\sigma,\ y)=\prod_{l<m}y_{[l,m]}^{(l,m)i_li_m}\prod_{l}y_l^{l\frac{i_l(i_l-1)}{2}+\left[\frac{l-1}{2}\right]i_l}\prod_{l,2|l}y_{\frac{l}{2}}^{i_l} \tag{9}$$

(см. [7] и [4], стр. 172),

$$J_2(\sigma,\delta,y,z)=\prod_{\substack{l,m\\ \alpha(l)>\alpha(m)}}y_{[l,m]}^{(l,m)i_lk_m}\prod_{\substack{l,m\\ \alpha(l)\leqslant\alpha(m)}}z_{[l,m]}^{(l,m)i_lk_m}, \tag{10}$$

$$J_3(\delta,\ y,\ z)=\prod_{\substack{l<m\\ \alpha(l)=\alpha(m)}}y_{[l,m]}^{(l,m)k_lk_m}\prod_{\substack{l<m\\ \alpha(l)\neq\alpha(m)}}z_{[l,m]}^{(l,m)k_lk_m}\prod_{l}y_l^{l\frac{k_l(k_l-1)}{2}+\left[\frac{l-1}{2}\right]k_l}\prod_{l,2|l}z_{\frac{l}{2}}^{k_l},$$

$$J_1(\varnothing,\ y)=J_2(\varnothing,\ \delta,\ y,\ z)=J_2(\sigma,\ \varnothing,\ y,\ z)=J_3(\varnothing,\ y,\ z)=1. \tag{11}$$

Тогда, учитывая формулы (4), (5), (6), (7), получаем окончательно следующую теорему.

Теорема 2.

$$E_0(n,\ x)=Y(n,\ y,\ z)|_{\{y_i=1+x^i,\ z_i=1-x^i\}_i}. \tag{12}$$

Приведем теперь выражение для числа $E_0^{(c)}(n,\ N)$ связных эйлеровых графов (см. [4], стр. 174, [5, 7]):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}E_0^{(c)}(t^k,\ x^k)=\ln\left(1+E_0(t,\ x)\right),$$

где $E_0(t,\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_0(n,\ x)t^n$, $E_0^{(c)}(t,\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N}E_0^{(c)}(n,\ N)t^nx^N$.

Подобным образом можно посчитать и другие типы неориентированных эйлеровых графов.

§ 3. Поскольку $E_0(n)=\sum_{N}E_0(n,\ N)=E_0(n,\ x)|_{x=1}$, из теоремы 2 получаем $E_0(n)=Y(n,\ y,\ z)|_{\{y_i=2,\ z_i=0\}_i}$. Это выражение допускает значительное упрощение, так как многие слагаемые (8) при $z_i=0$ обращаются в 0. Однако мы приведем независимый вывод возникающих формул, представляющий самостоятельный интерес.

Прежде всего запишем аналогично (2)

$$E_0(n)=\sum_{|\tau|=n}\frac{1}{\tau!\,\pi(\tau)}e_0(\tau) \tag{2'}$$

и соответственно

$$P_0(n)=\sum_{|\tau|=n}\frac{1}{\tau!\,\pi(\tau)}p_0(\tau).$$

Рассмотрим билинейную форму $(\tau, \sigma)=\sum_{l,m}(l, m) j_l i_m$, $(\varnothing, \sigma)=(\tau, \varnothing)=0$, и обозначим $k_1(\tau)=j_1+j_3+j_5+\dots$ — число нечетных слагаемых τ (см. [2]). В частности, если $k_1(\tau)=0$, то τ имеет вид $(2^{j_2} 4^{j_4} 6^{j_6}\dots)$.

Лемма 4 [2]. $p_0(\tau)=2^{\frac{1}{2}(\tau,\tau)-\frac{1}{2}k_1(\tau)}$.

Доказательство легко получается из (4) подстановкой $x=1$.

Теорема 3.

$$e_0(\tau)=2^{-k(\tau)+\rho(\tau)}p_0(\tau), \tag{13}$$

где

$$\rho(\tau)=\begin{cases}0, & k_1(\tau)=0,\\ 1, & k_1(\tau)>0.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть g — фиксированная подстановка на V типа τ. Выберем цикл c подстановки g, действующий на множестве X, такой, длина которого l делится на наименьшую возможную степень 2 среди всех циклов g. Для определенности будем считать также, что l — наименьшее число с таким свойством. Пусть $h=g|_{V-X}$, σ — тип h $\left(\sigma=\tau-(l)\right)$, Γ — граф на $V-X$, инвариантный относительно h. Посчитаем все эйлеровы графы на V, инвариантные относительно g, подграф которых, индуцируемый на $V-X$, совпадает с Γ. Пусть c_1 — цикл h, m — его длина. Если вершины c_1 имеют в Γ четную степень, мы должны соединить их с X так, чтобы в этом соединении они также имели четную степень. Наоборот, если они имеют в Γ нечетную степень, то и в соединении с X они должны получить нечетную степень. Поэтому по лемме 2 (1)) вершины c_1 и c могут быть соединены $k[l, m]$ ребрами, где k четно в первом случае и нечетно во втором. В самом деле, в силу выбора c $\frac{[l, m]}{m}$ нечетно. Так как $\sum_{k \text{ четно}} C^k_{(l,m)} = \sum_{k \text{ нечетно}} C^k_{(l,m)}=2^{(l,m)-1}$, общее число возможных соединений c_1 с c в искомых графах не зависит от вида Γ. Остается еще соединить вершины X между собой. Прежде всего заметим, что во всяком графе число вершин нечетной степени четно. Поэтому, если l нечетно, то степени вершин X в любом рассматривающемся соединении их с $V-X$ четны. Так как и все возможные соединения их между собой имеют четную степень (пункт 2 леммы 2), то все они допустимы. Общее число таких соединений $2^{\frac{l-1}{2}}$. Пусть теперь l четно, так что $k_1(\tau)=0$. Степени вершин c в соединении их с вершинами из $V-X$ могут быть как четными, так и нечетными. В первом случае возможны любые соединения вершин c между собой, инвариантные относительно g, не содержащие ребер, соединяющих пары противолежащих вершин. Во втором случае, очевидно, наоборот, все пары противолежащих вершин должны быть соединены между собой, тогда как остальные соединения произвольны. В обоих случаях число $2^{\frac{l-2}{2}}$ возможных соединений внутри X не зависит от Γ.

Из этих рассуждений вытекает, что всякому графу Γ соответствует $2^{((l),\sigma)-k(\sigma)+\left[\frac{l-1}{2}\right]}$ различных содержащих его эйлеровых графов, инвариантных относительно g. Обратно, всякому эйлерову графу отвечает однозначно определенный его подграф на $V-X$. Поэтому

$$e_0(\tau)\equiv e_0\left(\sigma+(l)\right)=2^{((l),\sigma)-k(\sigma)+\left[\frac{l-1}{2}\right]}p_0(\sigma). \tag{14}$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись леммой 4.

$$e_0(\tau) = 2^{((l),\ \tau) - l - k(\tau) + 1 + \left[\frac{l-1}{2}\right] + \frac{1}{2}(\tau,\tau) - ((l),\tau) + \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} k_1(\tau) + \frac{1}{2} k_1((l))} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}(\tau,\tau) - \frac{1}{2} k_1(\tau)} 2^{-k(\tau)} 2^{-\frac{l}{2} + \left[\frac{l-1}{2}\right] + 1 + \frac{1}{2} k_1((l))} = 2^{-k(\tau)} p_0(\tau)\, 2^{\rho},$$

где

$$\rho = \begin{cases} 0, & l \text{ четно}, \\ 1, & l \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Формулы (2′) и (13) доставляют требуемое простое выражение $E_0(n)$.

Замечание 1. Если $\tau \geqslant 1$, т. е. $\tau = \sigma + 1$, $l = 1$, более удобно использовать формулу (14), дающую здесь выражение

$$e_0(\tau) = p_0(\tau - 1), \tag{15}$$

доказательство которого очевидно. Для $\tau = (1^n)$ эта формула и ее возможный вывод вскользь упомянуты Ридом [8].

Из (15) вытекает любопытное следствие. Обозначим через $E_0'(n)$ число неизоморфных эйлеровых графов с корнем. Имеем

$$E_0'(n) = \sum_{\tau \geqslant 1,\ |\tau| = n} \frac{1}{(\tau - 1)!\, \pi(\tau - 1)} e_0(\tau),$$

откуда

$$E_0'(n) = P_0(n - 1).$$

Однако справедливость этого тождества легко установить и непосредственно, так как добавление ко всякому графу с $n - 1$ вершиной корня, соединенного со всеми вершинами нечетной степени, не меняет группы его автоморфизмов и превращает его в эйлеров граф. Для $E_0(n)$ подобного простого выражения нет. Интересно, что аналогичное тождество не имеет места и для связных графов соответствующих видов, так как число связных корневых графов выражается по особой формуле (см. [7, 2]).

Замечание 2. Никакой формулы, подобной (13), для $e_0(\tau, N)$ или $e_0(\tau, x)$ даже при $\tau = (1^n)$, вероятно, не существует. Дело в том, что в установленном в доказательстве теоремы 3 соответствии число эйлеровых графов с фиксированным числом ребер уже зависит от строения Г.

В заключение приведем некоторые численные результаты.

2854 Correct

N 321
~~N 321.5~~
N 1345.5

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$E_0(n)$	1	1	2	3	7	16	54	243
$E_0^{(c)}(n)$	1	0	1	1	4	8	37	184

~~3048~~
3049

Литература

1. Де Брейн Н. Дж. В сб. «Прикладная комбинаторная математика». М., 1968.
2. Лисковец В. А. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 5, 1969.
3. Оре О. Теория графов. М., 1968.
4. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963.
5. Харари Ф. В сб. «Прикладная комбинаторная математика». М., 1968.
6. Харари Ф. УМН, 24, в. 5, 1969.
7. Harary F. Trans. Amer. Math. Soc., 78, 2, 445, 1955.
8. Read R. C. Canad. J. Math., 14, 3, 482, 1962.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
13.III 1970

6553

Speranza, Francesco

Grafi e strutture algebriche. (English summary)

Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **40** (1970), 9–23.

The author starts by reviewing some relations between the theory of graphs on the one hand and group algebra and categorical algebra on the other. Next he gives some th[illegible]ns linking multiplicative graphs (of which categories are particular cases) with subjected graphs. In particular, the author studies problems of the imbedding and representation of categories, such as that of constructing a category whose automorphism group is isomorphic to a given group. *R. C. Read* (Waterloo, Ont.)

6554

Baron, Gerd

Über asymmetrische Graphen.

Math. Nachr. **46** (1970), 25–46.

Several extremal problems in the theory of asymmetric graphs are posed and solved. Here we state only one result which gives a negative answer to a question of Rényi and the reviewer (see the article cited below): Let X be a graph, $A(X)$ the smallest integer $a+d$ such that by adding a edges and omitting d edges X becomes a graph admitting a non-trivial automorphism, and $F(p, k)$ [$C(p, k)$] the smallest integer such that there is a graph [a connected graph] with p vertices $A(X)=k$ and $F(p, k)$ [$C(p, k)$] edges. The author proves that $C(p, 2)>F(p, 2)$ for $p\geqq 21$.

He also investigates asymmetries in infinite graphs [the reviewer and A. Rényi, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **14** (1963), 295–315, especially p. 314; MR **27** #6258]. *P. Erdős* (Waterloo, Ont.)

6555

Ze[illegible]a, Bohdan

[illegible]ups and homogeneous graphs.

Czechoslovak Math. J. **21 (96)** (1971), 653–660.

The author calls an undirected graph G symmetric if its automorphism group acts transitively on its vertices. If, in addition, for each vertex v of G and each permutation π of the edges incident with v there exists an automorphism ψ of G that fixes v and induces π, then G is called homogeneous. The author establishes some basic results about these two classes of graphs and then gives a procedure for constructing homogeneous graphs. The construction is based on what are usually called group-graphs. Conditions on the edge defining set of the group-graph are derived that are sufficient to insure that the resulting graph is homogeneous.

The definitions and results are extended to directed graphs. *J. Turner* (Menlo Park, Calif.)

6556

Frucht, Roberto [Frucht W., Roberto]; Graver, Jack E.; Watkins, Mark E.

The groups of the generalized Petersen graphs.

Proc. Cambridge Philos. Soc. **70** (1971), 211–218.

The generalized Petersen graph $G(n, k)$ (also called permutation graph by G. Chartrand and F. Harary [Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) **3** (1967), 433–438; MR **37** #2626]) consists of two copies of the cycle of order n with n additional edges that define a one-one correspondence between the vertices of the n-cycles. More precisely, for [illegible]$\leqq 2k<n$, $G(n, k)$ has vertex set $V(G(n, k))=\{u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ and edge-set $E(G(n, k))$ consisting of all edges of the form $[u_i, u_{i+1}]$, $[u_i, v_i]$, $[v_i, v_{i+k}]$ where the subscripts are taken modulo n. The three types of edges are called, respectively, outer edges, spokes and inner edges. The authors characterize the automorphism group $A(n, k)$ of $G(n, k)$.

3049
2854

Let $B(n, k)$ be the subgroup of $A(n, k)$ that fixes the spokes set-wise. Let ρ, δ and α be permutations defined on $V(G(n, k))$ by $\rho(u_i)=u_{i+1}$, $\rho(v_i)=v_{i+1}$, $\delta(u_i)=u_{-i}$, $\delta(v_i)=v_{-i}$, $\alpha(u_i)=v_{ki}$ and $\alpha(v_i)=u_{ki}$ for all i. The following characterization of $B(n, k)$ is given: (a) if $k^2\not\equiv\pm 1 \pmod n$, then $B(n, k)=\langle\rho, \delta\rangle$ with $\rho^n=\delta^2=1$, $\delta\rho\delta=\rho^{-1}$; (b) if $k^2\equiv 1 \pmod n$, then $B(n, k)=\langle\rho, \delta, \alpha\rangle$ with $\rho^n=\delta^2=\alpha^2=1$, $\delta\rho\delta=\rho^{-1}$, $\alpha\delta=\delta\alpha$, $\alpha\rho\alpha=\rho^k$; (c) if $k^2\equiv -1 \pmod n$, then $B(n, k)=\langle\rho, \alpha\rangle$ with $\rho^n=\alpha^4=1$, $\alpha\rho\alpha^{-1}=\rho^k$. Moreover, it is shown that $B(n, k)=A(n, k)$ if and only if the ordered pair (n, k) is not one of (4,1), (5,2), (8,3), (10,2), (10,3), (12,5), (24,5). *A. Mowshowitz* (Vancouver, B.C.)

6557

Liskovec, V. A.

Enumeration of Euler graphs. (Russian)

Vesci Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk **1970**, *no.* 6, 38–46.

Ein Eulerscher Graph ist ein endlicher, nicht-orientierter Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten, dessen sämtliche Knotenpunkte gerade Valenzen haben. Aufbauend auf der Pólyaschen Abzählungstheorie und unter Verallgemeinerung von Methoden, die R. C. Read [Canad. J. Math. **14** (1962), 482–486; MR **26** #4338] für die Abzählung Eulerscher Graphen mit numerierten Knotenpunkten entwickelt hat, gelingt es dem Autor, Formeln für die Anzahlen aller paarweise nicht-isomorphen Eulerschen Graphen aufzustellen, wenn (a) die Anzahl N der Kanten und die Anzahl n der Knotenpunkte vorgeschrieben sind, (b) nur die Anzahl n der Knotenpunkte vorgeschrieben ist, (c) die Anzahl n der Knotenpunkte vorgeschrieben ist und nur zusammenhängende Graphen in Betracht gezogen werden. Damit löst der Autor eines derjenigen Probleme, die von F. Harary als grundlegende ungelöste Abzählungsprobleme der Graphentheorie bezeichnet wurden. Die Arbeit schließt mit einer Tabelle der in Frage stehenden Anzahlen in den Fällen (b) und (c) für $n=1, 2, \cdots, 8$.

Auf interessante Einzelheiten—wie z.B. auf ein Signierungsverfahren, das u.a. die Charakterisierung der Eulerschen Graphen gestattet, sowie auf eine Verallgemeinerung des Zyklenindex—kann im Rahmen dieses Referats nicht näher eingegangen werden. *H. Sachs* (Ilmenau)

6558

Nigmatullin, R. G.

The number of irreducible coverings of a graph by edges. (Russian)

Kibernetika (Kiev) **1970**, *no.* 2, 95–98.

Das Wort Graph bezeichnet im Folgenden stets einen endlichen ungerichteten schlichten Graphen $G=(X, U)$, wobei X die Menge der Knotenpunkte und U die Menge der Kanten von G ist. Die Menge $T\subset U$ heißt Überdeckung von G, wenn jeder Knotenpunkt $x\in X$ mit mindestens einer Kante $u\in T$ inzidiert. Eine Überdeckung T von G heißt kritisch (irreduzibel), wenn keine echte Untermenge von T eine Überdeckung von G ist. $\tau(G)$ ist die Anzahl der verschiedenen kritischen Überdeckungen von G. Die Menge der Graphen G mit n numerierten Knotenpunkten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ wird mit $\mathfrak{C}(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\mathfrak{C}_n$ bezeichnet;