C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275 (25 septembre 1972) Série A — 569

ANALYSE COMBINATOIRE. — *Sur les coefficients de l'inverse de la série formelle* $\sum n!\,t^n$. Note (*) de M. **Louis Comtet**, transmise par M. Maurice Parodi.

Le nombre $f(n)$ de « types indécomposables d'ordre n » de la théorie des monoïdes est, au signe près, le coefficient de t^n dans le développement de $(\Sigma_{n\geq 0} n!\,t^n)^{-1}$. On donne ici diverses propriétés de ces nombres et plus particulièrement des $g(n) = f(n)/n!$.

1. Introduction. — Il est rare, en Analyse combinatoire, qu'une suite d'entiers ait pour fonction génératrice naturelle une série entière qui ne soit que « formelle », c'est-à-dire de rayon de convergence nul. Aussi nous paraît-il intéressant, à cet égard, de donner quelques propriétés nouvelles des suites $f(n)$ et $g(n) = f(n)/n!$ introduites par M. André Lentin dans son livre récent (1).

Soit $\varepsilon(t) = \Sigma_{n\geq 0} n!\,t^n$ la série (formelle) d'Euler (2), et

(1) $$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{\varepsilon(t)} = 1 - \sum_{n\geq 1} f(n)\,t^n,$$

envisagé par Gauss (3), et qui *définira* la suite $f(n)$ qui nous préoccupe ici. La récurrence

(2) $$f(n) = n! - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)!\,f(k) \quad \text{si} \quad n \geq 2; \qquad f(1) = 1$$

résulte de $\varepsilon(t)\,\mathrm{E}(t) = 1$. Ces coefficients $f(n)$ sont donc entiers, tels que $1 \leq f(n) < n!$, et pour $g(n) = f(n)/n!$, on a

(3) $$g(n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{\binom{n}{k}} \quad si \quad n \geq 2; \qquad g(1) = 1.$$

 2. Formule explicite et congruence pour les $f(n)$. — La récurrence (2) fournit pour premières valeurs : $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 13$, $f(5) = 71$, $f(6) = 461$, $f(7) = 3447$, $f(8) = 29093$, $f(9) = 2\,73343$, $f(10) = 28\,29325$, $f(11) = 319\,98903$, $f(12) = 3927\,43957$, $f(13) = 52010\,61455$, $f(14) = 7\,39434\,24413$, $f(15) = 112\,35962\,77863$, $f(16) = 1817\,67283\,17413$, $f(17) = 31195\,11448\,28863$, $f(18) = 5\,66169\,87748\,48621$, $f(19) = 108\,35586\,44472\,15063$, $f(20) = 2181\,09692\,15577\,83605$. De même, $g(1) = 1$, $g(2) = 1/2$, $g(3) = 1/2$, $g(4) = 13/(2^3.3)$, $g(5) = 71/(2^3.3.5)$, $g(6) = 461/(2^4.3^2.5)$, $g(7) = 383/(2^4.5.7)$, $g(8) = (47.619)/(2^7.3^2.5.7)$.

Proposition A. — *Les coefficients $f(n)$ ont pour valeur exacte :*

(4) $$f(n) = \sum_{c_1+2c_2+\ldots+nc_n=n} (-1)^{c_1+c_2+\ldots+c_n-1} \frac{(c_1+c_2+\ldots+c_n)!}{c_1!\,c_2!\ldots c_n!} (1!)^{c_1}(2!)^{c_2}\ldots(n!)^{c_n},$$

et satisfont, pour tout nombre premier p, à la congruence

$$f(p+1) \equiv 1 \pmod p. \tag{5}$$

La formule (4) résulte de

$$\sum_{n \geq 1} f(n)\, t^n = 1 - (\varepsilon(t))^{-1} = 1 - (1 + (\varepsilon(t) - 1))^{-1} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} (\varepsilon(t) - 1)^k, \quad \ldots$$

Pour (5), les entiers $A(n, k)$ définis par $(\varepsilon(t) - 1)^k = \Sigma_{n \geq k} A(n, k)\, t^n$ satisfont à

$$A(n, k) = A(n-1, k-1) + ((n+k-1)/k) . A(n-1, k)$$

compte tenu de l'équation différentielle formelle

$$t^2 . D(\varepsilon(t)) = (1-t)\,\varepsilon(t) - 1 \tag{6}$$

vérifiée par $\varepsilon(t)$. Selon le module p premier, il s'ensuit

$$A(p+1, k) \equiv A(p, k-1) + A(p, k) \quad \text{quand} \quad 2 \leq k \leq p-1,$$

ce qui conduit au résultat, après simplification de proche en proche dans l'égalité évidente $f(p+1) = \Sigma_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} A(p+1, k)$.

3. Un développement asymptotique. — Il est connu que $f(n) \sim n!$ [([1]), p. 140]. Plus précisément :

Proposition B. — *Posant* $(n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$, *on a le développement asymptotique*

$$\frac{f(n)}{n!} = g(n) \approx 1 - \sum_{k \geq 1} \frac{A_k}{(n)_k}, \tag{7}$$

où les coefficients A_k *ont pour fonction génératrice*

$$F(t) = 1 - \sum_{k \geq 1} A_k t^k = (\varepsilon(t))^{-2} = (1 + 1!\,t + 2!\,t^2 + \ldots)^{-2}, \tag{8}$$

et valent donc

$$A_k = f(k) + (k-2) f(k-1) \quad \text{si} \quad k \geq 2, \quad A_1 = 2. \tag{9}$$

Avec (3), il vient

$$0 \leq \alpha(n) = 1 - g(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^{-1}$$
$$= \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leq \frac{2}{n} + n \binom{n}{2}^{-1} = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) \leq \frac{6}{n}.$$

Ainsi, $g(n) = 1 - \alpha(n)$, où $\alpha(n) = O(n^{-1})$. Ceci étant, compte tenu de $\alpha(1) = 0$, $\alpha(2) = 1/2$, on aura de même pour n assez grand :

$$\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n-1} g(k) \binom{n}{k}^{-1} = \binom{n}{1}^{-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}^{-1} + \sum_{k=3}^{n-3} g(k)\binom{n}{k}^{-1}$$
$$+ g(n-2)\binom{n}{n-2}^{-1} + (1 - \alpha(n-1))\binom{n}{n-1}^{-1}.$$

Or $\Sigma_{k=3}^{n-3} g(k)\binom{n}{k}^{-1} \leqq \Sigma \binom{n}{k}^{-1} \leqq n\binom{n}{3}^{-1} = O(n^{-2})$, et $\alpha(n-1) = O(n-1)$. En définitive donc, $\alpha(n) = 2n^{-1} + O(n^{-2})$, c'est-à-dire $A_1 = 2$. Cette méthode *indirecte* [(4), p. 134], peut se poursuivre indéfiniment, ce qui garantit l'existence d'un développement asymptotique de la forme (7). Pour établir (8), posons plutôt $g(n) \approx \Sigma_{k \geqq 0} a_k/(n)_k$, c'est-à-dire $a_0 = 1$, $a_k = -A_k$ pour $k \geqq 1$. Il vient, avec (3) pour (♯),

$$g(n) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{a_\nu}{(n)_\nu} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \overset{(\sharp)}{=} 1 - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{f(\nu)}{(n)_\nu} - A - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{g(n-\nu)}{\binom{n}{\nu}}, \tag{10}$$

où

$$A = \frac{g(k+1)}{\binom{n}{k+1}} + \sum_{\nu=k+2}^{n-k-2} \frac{g(\nu)}{\binom{n}{\nu}} + \frac{g(n-k-1)}{\binom{n}{n-k-1}}$$
$$\leqq \binom{n}{k+1}^{-1} + n\binom{n}{k+2}^{-1} + \binom{n}{n-k-1}^{-1} = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Par ailleurs,

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{g(n-\nu)}{\binom{n}{\nu}} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n}{\nu}^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{(n-\nu)_j} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \right\}$$
$$= \sum_{\substack{1 \leqq \mu \leqq k \\ 0 \leqq j \leqq k}} \frac{\mu!\, a_j}{(n)_{\mu+j}} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) = \sum_{\nu=1}^{k} \left\{ \frac{1}{(n)_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (\nu-\mu)!\, a_\mu \right\} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

En reportant dans (10) ces résultats, il vient, par identification des coefficients de $1/(n)_\nu$, $\nu \geqq 1$: $a_\nu = -f(\nu) - \Sigma_{\mu=0}^{\nu-1} (\nu-\mu)!\, a_\mu$. La relation (8), $F = \Sigma_{\nu \geqq 0} a_\nu t^\nu = \varepsilon^{-2}$, résulte alors de

$$F = \sum_{\mu \geqq 0} a_\nu t^\nu = 1 - \sum_{\mu \geqq 1} t^\nu \left\{ f(\nu) + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (\nu-\mu)!\, a_\mu \right\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) - (\varepsilon - 1) F.$$

Pour (9) enfin, on met (6) sous la forme $\varepsilon^{-2} = (1-t)\varepsilon^{-1} + t^2 D(\varepsilon^{-1})$, dans laquelle on insère $\varepsilon^{-2} = F$ et $\varepsilon^{-1} = 1 - \Sigma_{n \geqq 1} f(n) t^n$. Ainsi,

$$g(n) = 1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{(n)_2} - \frac{4}{(n)_3} - \frac{19}{(n)_4} - \frac{110}{(n)_5}$$
$$- \frac{745}{(n)_6} - \frac{5752}{(n)_7} - \frac{49775}{(n)_8} - \frac{476994}{(n)_9} - \frac{5016069}{(n)_{10}} + O\left(\frac{1}{n^{11}}\right).$$

A259472

4. Estimation du reste du développement précédent. — Définissons $\rho(n, k)$ par

$$f(n)/n! = g(n) = 1 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{A_l}{(n)_l} - \frac{\rho(n, k)}{(n)_k}. \tag{11}$$

Évidemment $\lim_{n\to\infty} \rho(n, k) = A_k$, propriété qui s'améliore ainsi :

Proposition C. — *Avec les notations* (7), (8), (11), *on a l'encadrement* : $A_k \leq \rho(n, k) \leq A_k + 1$ *dès que* $n \geq \mathfrak{n}(k)$, *où* $\mathfrak{n}(1) = 5$, $\mathfrak{n}(2) = 7$, $\mathfrak{n}(3) = 29$, $\mathfrak{n}(4) = 121$.

Cela se prouve par récurrence sur n, n assez grand, la table des premières valeurs de $f(n)$ permettant de conclure.

5. Différences successives des $g(n)$. — La suite $g(n)$ est totalement monotone « au voisinage de l'infini » dans le sens suivant :

Proposition D. — *Pour tout entier* $q \geq 0$ *existe* $\nu(q) \geq 1$ *tel que*

$$(-1)^{q-1} \Delta^q g(n) \geq 0 \quad \text{si} \quad n \geq \nu(q).$$

Plus précisément, $\nu(1) = 2$, $\nu(2) = 4$, $\nu(3) = 6$, $\nu(4) = 8$, $\nu(5) = 10$; $g(n)$ *est donc* croissante *sur* $[2, \infty)$ *et* concave *sur* $[4, \infty)$.

En effet, (7) implique

$$\Delta^q g(n) \approx -\sum_{k\geq 1} A_k \Delta^q \frac{1}{(n)_k} = \sum_{k\geq 1} A_k (-1)^{q-1} \frac{(k+q-1)_q}{(n+q)_{k+q}} \sim \frac{2(-1)^{q-1} q!}{n(n+1)\ldots(n+q)}.$$

L'identité remarquable $\Sigma_{n\geq 1} \Delta g(n)(n+1)!\, t^{n+1} = (\Sigma_{n\geq 2} f(n)\, t^n)^2$ montre que $\Delta g(n) \geq 0$ si $n \geq 2$. De même, avec (11),

$$\Delta^2 g(n) = -\frac{4}{(n+2)_3} - \frac{6}{(n+2)_4} - \frac{\rho(n+2, 3)}{(n+2)_3} + 2\frac{\rho(n+1, 3)}{(n+1)_3} - \frac{\rho(n, 3)}{(n)_3};$$

donc $\Delta^2 g(n) < 0$ si $n \geq 29$, grâce à la proposition C. L'examen sur tables des $\Delta^2 g(n)$ pour $n \leq 28$ permet alors de conclure.

(*) Séance du 11 septembre 1972.

(1) de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, North Holland, 1961.
(2) Euler, *Opera Omnia*, I (XVI).
(3) Gauss, *Werke*, III.
(4) Lentin, *Équations dans les monoïdes libres*, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

Département des Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Bât. 425,
91400 *Orsay, Essonne.*