Die Gleichniszahlen-Reihe

Stellen Sie sich vor, Sie müßten einen Intelligenztest machen und in fünf Minuten die folgende Aufgabe lösen:

Finden Sie heraus, wie die nächste Zeile aussieht:

1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1

Man könnte nun versuchen, durch vielerlei Multiplikationen oder Additionen die nächste Zeile zu finden. Haben Sie's auch versucht? Tatsächlich ist aber etwas viel Einfacheres als Rechnen das Prinzip, nämlich bloßes Abzählen. Hinterlistig, wie der Aufgabensteller war, hat er nämlich die erste Zeile weggelassen. Sie lautet:

1

Nun wird die Regel klar: eine Eins – geschrieben 11. Zwei Einsen – geschrieben 21. Das sind eine Zwei und eine Eins, also 1211. Die nächste Zeile hinter 111221 ist daher

3 1 2 2 1 1

In dem Prinzip der Erzeugung der nächsten Zeile liegt die Gleichnishaftigkeit dieser Ketten. Man kann die Regel ja auch umgekehrt auffassen und die jeweils vorausgehende Zeile rekonstruieren. Ob irgendeine lange Kette eine Gleichniszahlen-Kette ist, ergibt sich durch Zurückverfolgen bis „1". Entweder es geht oder nicht.

Von der Eins abwärts ist es so etwas wie eine Analyse. Von der Frage ausgehend: „Was haben wir denn da?" erzeugt eine Zeile die nächste durch immerfolgende Selbstbeschreibung. Ist die Frage: „Was beschreibt diese Reihe?" geht es aufwärts bis zur „1". Dies erinnert stark an Synthese, in der der allen gemeinsame Gesichtspunkt gesucht wird, oder Theoriebildung in Mathematik und Physik.

Unser Leser Mario Hilgemeier aus Münster hat sich mit solchen Reihen beschäftigt.

Die Zeilen werden schnell länger. Mit einem einfachen BASIC-Programm kann man viele Ziffernketten erzeugen. Nennt man „1" die Kette Nummer 1, so findet man:

Zeile	Länge	Anzahl von Einsen	Zweien	Dreien
1	1	1	0	0
2	2	2	0	0
3	2	1	1	0
4	4	3	1	0
5	6	4	2	0
6	6	3	2	1
7	8	4	3	1
8	10	6	2	2
9	14	8	3	3
10	20	12	4	4
⋮				
23	678	331	221	126
24	904	455	286	163
25	1182	596	366	220
26	1540	762	494	284
27	2012	1000	636	376

Abgesehen von der ersten Zeile wird immer eine gerade Anzahl von Ziffern benötigt, eine Ziffer, die sagt: wieviel, und eine Ziffer, die sagt: wovon. Außerdem gibt es keine Ziffer größer 3.

Wäre dies der Fall, so stünde in der Zeile davor eine Ziffernreihe der Form AAAA oder länger. Das heißt „A Ziffern Typ A, und A Ziffern Typ A". Einen solchen Ausdruck würde man aber als 2A Ziffern vom Typ A oder (2A)A schreiben. (2A) bedeutet hier nur *eine* Ziffer. Daher kann es keine Ziffernkette AAAA geben, weil sie durch die Regel nicht erzeugt wird.

Es sei L_i die Länge der i-ten Kette in der i-ten Zeile. Wir schreiben

$$L_{i+1} = a_i \, L_i$$

Man neigt zu der Vermutung, daß sich a_i mit wachsendem i einer Zahl a nähert:

Zeile i	$L_{i+1}/L_i = a_i$
21	1.2941
22	1.2841
23	1.3333
24	1.3075
25	1.3029
26	1.3065

Kann man diese Vermutung beweisen?

Wenn die Vermutung stimmt, hieße es, die Länge L wächst zunehmend exponentiell, wie etwa die Weltbevöl-

```
10 REM 30.11.85 MARIO HILGEMEIER
20 REM   INTEGRATION/REDUKTION ANALYSE/SYNTHESE GLEICHNISZAHLEN-REIHE
22 REM---------------------------------------------------------------------
25 LET LENG=8000
30 DIM R$(LENG),N$(LENG)
40 LET N$="1"
50 LET NUMMER=1
98 REM
99 REM SCHLEIFE 1
100 LET R$=N$
101 LET N$=""
105 INPUT "Return ";DUMMY$
110 PRINT : PRINT "Kette Nummer ";NUMMER: PRINT R$
115 LET NUMMER=NUMMER+1
120 LET ENDE=LEN(R$)
125 LET ENDFLAG=0
130 LET ZIFFZEHLER=1: LET POSITION=1
135 LET ZIFF1$=MID$(R$,POSITION,1)
136 REM
137 REM SCHLEIFE 2
145 LET POSITION=POSITION+1
150 IF ENDE<POSITION THEN LET ENDFLAG=1: GOTO 400
154 REM
155 REM NäCHSTE ZIFFER = LETZTE  ZIFFER ?
160 LET ZIFF2$=MID$(R$,POSITION,1)
170 IF ZIFF1$=ZIFF2$ THEN LET ZIFFZEHLER=ZIFFZEHLER+1: GOTO 145
398 REM
399 REM NEUSTRING VERLäNGERN
400 LET H$=RIGHT$(STR$(ZIFFZEHLER),1)+ZIFF1$: LET N$=N$+H$
410 IF ENDFLAG=1 THEN LET ENDFLAG=0: GOTO 98
420 LET ZIFFZEHLER=1: LET ZIFF1$=ZIFF2$
430 GOTO 145
998 STOP
999 DISC SAVE "REDUKT"
1000 RUN
```

kerung oder eine nukleare Kettenreaktion.

Eine weitere Möglichkeit der Betrachtung sind die Gruppenlängen: Das heißt, wieviele Gruppen 1, 11, 111, 2, 22, 222, 3, 33, 333 gibt es?

Gruppen-Länge	Einsen	Zweien	Dreien	Insgesamt
1	179	281	288	748
2	262	95	44	401
3	99	55	0	154
Summe	1000	636	376	2012

Alle Aufstellungen dieses Typs bis Ketten-Nummer 27 enthalten stets eine Null für die Ketten 333. Gibt es also keine Ketten 333? Der Leser möge dies beweisen oder widerlegen.

Das angegebene BASIC-Programm dient zur Erzeugung von Gleichniszahlen-Reihen. Der BASIC-Dialekt Ihres Rechners mag etwas anders sein, doch die Benutzung der String-Commands ist in den meisten Dialekten ähnlich und daher leicht anzupassen. Viel Spaß beim Forschen und Entdecken neuer Eigenschaften dieser Ziffern-Ketten.

*

»Kinderleicht«

Die zehnjährige Tochter eines bild der wissenschaft-Redakteurs besucht die 5. Klasse eines Sindelfinger Gymnasiums. Im Rahmen eines Mathematik-Wettbewerbs hatte sie folgende Aufgaben zu lösen. Vielleicht haben Sie auch Spaß daran?

1. Auf einer Wiese weiden Kühe, Schafe und Gänse. Es gibt mehr Schafe als Gänse. Die Schafe und Gänse haben zusammen 100 Köpfe und Beine. Ihre Anzahl ist dreimal so groß wie die der Kühe. Wieviele Kühe weiden auf der Wiese?

2. Im Jahre 1984 gab es im Monat Februar fünfmal einen Mittwoch. Vor wievielen Jahren war dies zum letzten Male der Fall?

Spielereien mit der Jahreszahl

Bald schreiben wir 1987. Wie in jedem Jahr möchten wir unsere Leser auffordern, interessante, ergötzliche oder skurrile Eigenschaften der neuen Jahreszahl 1987 zu finden. Bitte schicken Sie uns Ihre Vorschläge bis zum 5.1. 1987. Diejenigen, die uns besonders gut gefallen, werden veröffentlicht.

Permission to use a copy of the article of Mario Hilgemeier
"Die Gleichniszahlen-Reihe"
in the magazine "bild der wissenschaft", No. 12 (1986), pp. 194+195, on the OEIS website

Hoevelmann Maren <Maren.Hoevelmann@konradin.de> wrote on 2018-05-07, 16:49:

Sehr geehrter Dr. Fischer,

haben Sie vielen Dank für Ihre E-Mail und die freundliche Anfrage. Gerne können Sie den Artikel „Die Gleichniszahlenreihe“ von Mario Hilgemeier aus *bild der wissenschaft* 12/1986 auf Ihrer Webseite OEIS hinterlegen. Bitte geben Sie als Quelle „© Mario Hilgemeier/bild der wissenschaft“ an. Mit einer Übersetzung ins Englische sind wir bei korrekter Quellenangabe einverstanden.

Mit freundlichen Grüßen

Maren Hövelmann

Redaktionsassistentin
bild der wissenschaft

Konradin Medien GmbH
Ernst-Mey-Straße 8
70771 Leinfelden-Echterdingen
Germany
Phone +49 711 7594-392
Fax +49 711 7594-5835
maren.hoevelmann@konradin.de
www.wissenschaft.de

www.facebook.com/bildderwissenschaft