Scan A5386

Meeus letter

5 pages

1 seq

f91

MEEUS

A5386

1975 March 25

Dr. N.J.A. Sloane,
Mathematics Research Center,
Bell Telephone Laboratories, Inc.,
Murray Hill, New Jersey 07974

Dear Dr. Sloane,

Dr. W.F. Lunnon sent me some interesting data about polyominoes, etc., and the following information may be of interest to you for your book.

1. I asked Dr. Lunnon for the definition of "colored" polyominoes. He replied: "Sequence 66, I am ashamed to say, defeats me utterly."

   I have no other information about this sequence, which perhaps should be dropped in a future edition. However, this must be discussed with Dr. Lunnon himself.

2. In each of the sequences 561, 641, 693, there is one wrong number. Read

   50107909 400795844 100203194

   instead of

   50107911 400795860 100203198

   Reference: Letter of Dr. Lunnon to J. Meeus, 1975 Februari 18.

3. Sequence 731: After 1023, add five more numbers:

   6922, 48311, 346543, 2522572, 18598427.

   These numbers have been deduced from: W.F. Lunnon, Counting Multidimensional Polyominoes, private note dated 12.10.73.

5386

4. Here is a new sequence:

   1, 3, 16, 75, 361, 1728, 8281, ...

   These numbers are given in "Pythagoras", Vol. 14, page 81. "Pythagoras" is a small mathematical journal for young people, published in the Netherlands. I enclose a photo-print of that article (pages 77-81). No author's name is given.

   The meaning of that sequence is as follows. Consider Figure 1 on page 78. In the center there is an arbitrary triangle. Construct the squares A, B, C on the sides, then the squares E, F, G as indicated, then A', B', C', etc. In this manner we obtain successive "coronas" of three squares each:

A + B + C total surface = O_1

E + F + G total surface = O_2

A' + B' + C' total surface = O_3 etc

Then, if O_1 is taken as unity, we have $O_2 = 3$, $O_3 = 16$, etc.

With very best wishes,

Sincerely Yours

J. Meeus

Jean Meeus

Heuvestraat 31
3071 Erps-Kwerps
BELGIUM

en drie vijfhoeken die elkaar afwisselen, beantwoordende aan de zijde en hoekpunten van de oorspronkelijke driehoeken; de vijfhoeken daarentegen liggen los van elkaar, ze zijn door vijf zeshoeken omgeven. De middelpunten van de vijfvlakken vormen een regelmatig twaalfvlak, de middelpunten van de zeshoeken vormen een regelmatig twintigvlak.
Ziedaar de voetbal, een halfregelmatig, of zoals men ook zegt, Archimedisch lichaam.

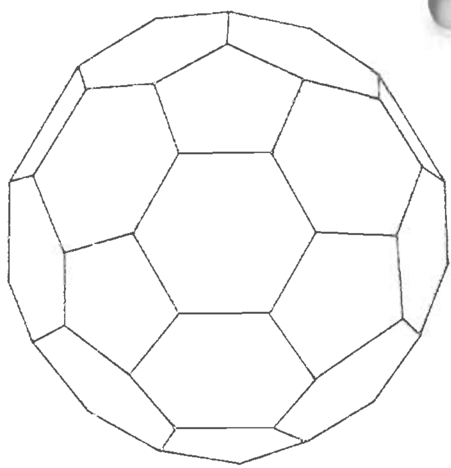

Fig. 6.

°°Een gulden "iccanobif"-rij

Als je van een rechthoek een vierkant afhaalt (fig. 1a-c) – bij voorbeeld door een hoek om te vouwen – dan blijft er een kleinere rechthoek over. Het zou bijzonder mooi zijn, als die met de oorspronkelijke rechthoek gelijkwaardig was. Dit is inderdaad te realiseren. Noem de lange zijde van de eerste rechthoek a en de korte b. Willen de grote en de kleine rechthoek gelijkvormig zijn, dan moet

$a : b = b : (a - b)$

zijn. Anders geformuleerd:
de zijde a is zo verdeeld in stukken b en $a - b$, dat de zijde a staat tot het grotere stuk als het grotere stuk tot het kleinere. Zulk een verdeling van een lijnstuk staat ook bekend als de *gulden snede*. Men vindt hem algebraïsch door de evenredigheid uit te werken,

$a(a - b) = b^2$

oftewel

$b^2 + ab - a^2 = 0,$

waaruit

$b = \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$

volgt. Er zijn echter ook een aantal meetkundige constructies om de gulden snede te verkrijgen.

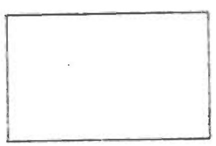

Fig. 1a.

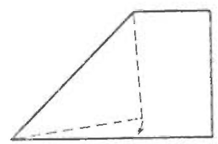

Fig. 1b.

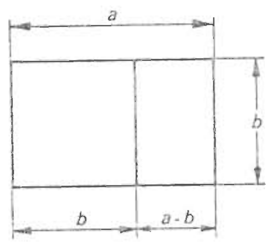

Fig. 1c.

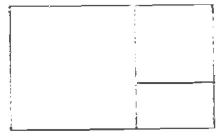

Fig. 2.

Wat geschiedt nu, als ik de tweede rechthoek net zo bewerk als de oorspronkelijke (fig. 2)? Ik beweer dat de derde rechthoek weer met de tweede (dus ook met de eerste) gelijkvormig is. Inderdaad, de zijden van de eerste rechthoek waren

a, b

die van de tweede

$b, c = a - b$

die van de derde moeten

$c, d = b - c$

worden. Tussen de zijden van de eerste en de tweede rechthoek bestond de evenredigheid

$a : b = b : c.$

Maar volgens een bekende eigenschap van evenredigheden is dit ook

$$\begin{aligned} a : b &= b : c \\ &= (a - b) : (b - c) \\ &= \quad c \quad : \quad d \end{aligned}$$

waarmee het gestelde bewezen is.

De drie rechthoeken zijn gelijkvormig en als ik dit afhaalproces voortzet, dan krijg ik een rij rechthoeken, die allemaal gelijkvormig zijn. Noem ik de langste zijden ervan

$u_1, u_2, u_3, \ldots$

dan zijn de kortste zijden respectievelijk

$u_2, u_3, u_4, \ldots$

en hierbij is elke zijde gelijk aan de som van de twee volgende dus

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 + u_3 \\ u_2 &= u_3 + u_4 \\ u_3 &= u_4 + u_5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dit doet denken aan de rij van Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, . . .

waarbij elke term gelijk aan de som van de twee *voorafgaande* (i.p.v. volgende) is. De opeenvolgende gulden sneden vormen dus als het ware een omgekeerde rij van Fibonacci. Daar vandaan het rare opschrift boven dit verhaal.

f91

°°Vierkantenkransen rond een driehoek

5386

In het artikel 'Pythagoras uitgebreid' in het vorig nummer, ontdekten we bijzonderheden aan de vierkanten die we in kransen rond een rechthoekige driehoek kunnen tekenen.

De figuur 1 die bij dit artikel is afgedrukt doet het wat algemener: de centrale driehoek is niet noodzakelijk rechthoekig. Deze figuur geeft de indruk, dat bij het naar buiten toe voortzetten van de kransen er regelmatigheden ontstaan: de zijden van vierkant A' zijn evenwijdig aan die van A, evenzo voor B' en B, enz.
Is dat zo? Of lijkt het maar zo in onze tekening en zal de ligging van de vierkanten wijzigen naarmate we meer naar buiten gelegen kransen bekijken?

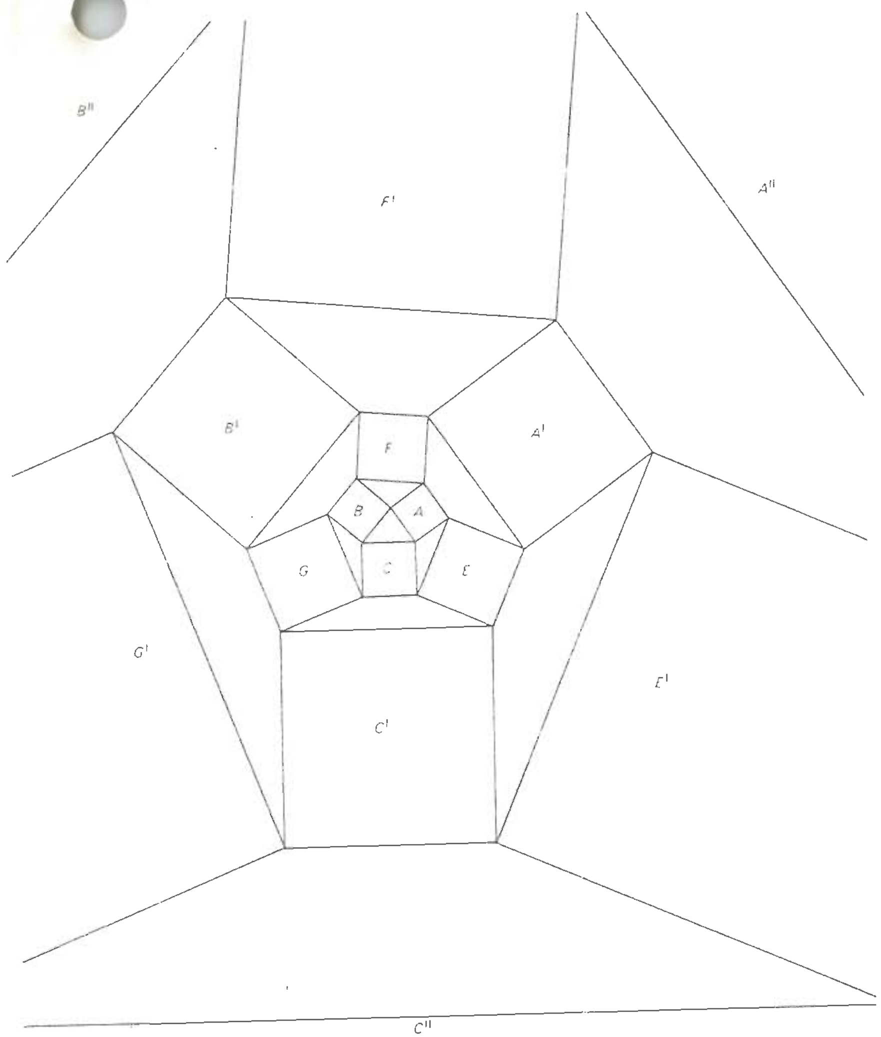

Fig. 1.

Het ligt voor de hand dat we voor een onderzoek bij de centrale driehoek moeten beginnen. We concentreren ons eerst op vierkant F.
De kern van het betoog berust op een geschikt gekozen rotatie (fig. 2) over -90°. We trekken hieruit de volgende conclusies.

De aangegeven zwaartelijn (lengte z) is te beschouwen als een middenparallel in de driehoek die ontstaat uit samenvoeging van kerndriehoek en geroteerde driehoek.
Hieruit volgt
$P'Q' = 2z \Rightarrow f = 2z$
en zwaartelijn $/\!/ P'Q'$, dus $\perp PQ$, dus $/\!/ QR$.
Soortgelijke conclusies gelden voor de vierkanten D en E.

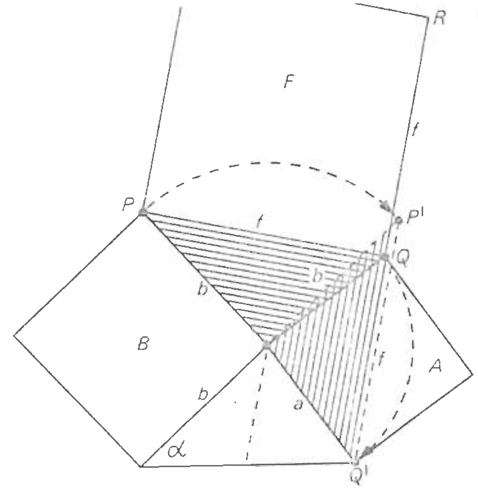

Fig. 2.

In figuur 3 is nu g[illegible]kelijk aan te tonen dat de driehoek die binnen A ontstaat door verlenging van de zijden van de vierk[illegible]ten E en F, ook verkregen kan worden door translatie van een driehoek die door twee zwaartelijnen door de centrale driehoek wordt afgesneden.
Met de wetenschap dat het zwaartepunt van een driehoek op $\frac{2}{3}$ van de zwaartelijn ligt, kunnen we afleiden dat een zijde van A door een vermenigvuldigingstransformatie met factor

$$\frac{2z + \frac{2}{3}z}{\frac{2}{3}z} = 4$$

Hiermee is de gelijkstandigheid van A en A' bewezen. De lengtematen van de vierkanten A', B' en C' zijn dus viermaal die van respectievelijk A, B en C.

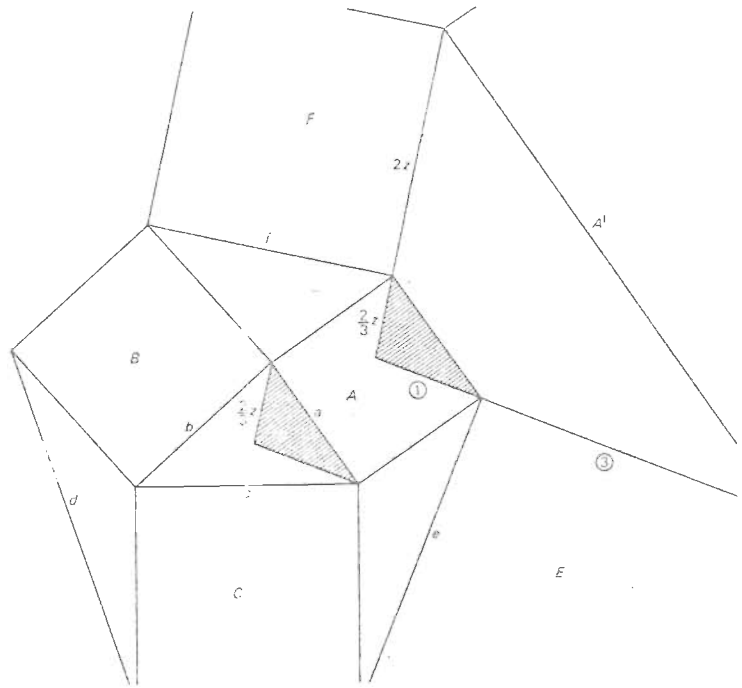

Fig. 3.

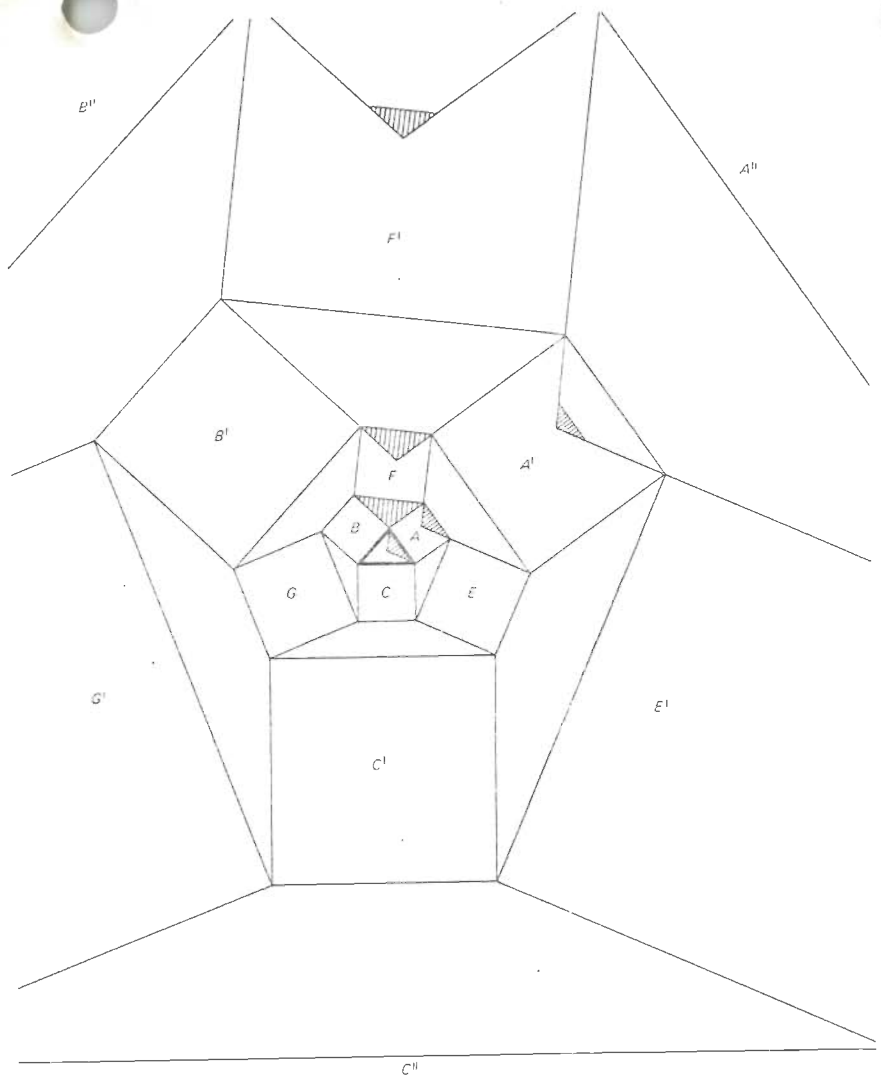

Fig. 4.

Op een soortgelijke manier kun je in figuur 4 aantonen dat voor D', E' en F' een factor 5 geldt t.o.v. D, E en F en bovendien de gelijkstandigheid van de respectievelijke vierkanten.
Het is nu duidelijk dat de maten van alle 'A, B, C'-vierkanten uit te drukken zijn in a, b en c, en de maten van de 'D, E, F'-vierkanten in d, e en f.
Nog mooier zou het zijn als we voor de 'D, E, F'-kransen ook een uitdrukking in a, b en c konden vinden.
Dat zijn immers de maten van de centrale driehoek waarvan we uitgaan.

Dit komt niet zo mooi uit, maar we doen een poging in fig. 2.
De cosinusregel in de centrale driehoek geeft:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$
en in centrale plus geroteerde driehoek:
$f^2 = (2b)^2 + c^2 - 4bc \cos\alpha$.
Eliminatie van $\cos\alpha$ geeft: $f^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, waaruit f berekend kan worden:
Geven we met A, B, C, enz ook de oppervlaktes van de desbetreffende vierkanten aan, dan luidt het verkregen resultaat:

$$F = 2A + 2B - C \qquad (1)$$

Op dezelfde wijze kan bewezen worden:

$$\begin{array}{rl} E = & 2A - B + 2C \\ D = & -A + 2B + 2C \; + \\ \hline D + E + F = & 3(A + B + C) \qquad (2) \end{array}$$

Dit is in ieder geval een gemakkelijk leesbaar resultaat.
Voor een rechthoekige driehoek waarvoor geldt $C = A + B$, g[illegible] dus ook dankzij (1):
$C = F$ (3)
en dankzij (2) en (3):
$D + E + F = 6F$ of wel $D + E = 5F$.

Een resultaat dat we in het artikel 'Pythagoras uitgebreid' ook al verkregen hadden. Het is hier ontstaan als bijzonder geval van een iets algemener ingesteld onderzoek.
Er zijn nog heel wat bijzonderheden uit fig. 4 op te diepen. Probeer zelf eens het volgende te bewijzen:
We noemen de som van de oppervlaktes van de vierkanten uit de n^{de} krans O_n.

Bewijs dat:
5786
$O_1 : O_2 : O_3 : O_4 : O_5 : O_6 : O_7 =$
$1 : 3 : 16 : 75 : 361 : 1728 : 8281$ x

De stof voor dit artikel en het artikel: Pythagoras uitgebreid ontvingen wij van Ir. J. C. G. Nottrot, die nog tal van andere interessante merkwaardigheden over deze figuur afleidde.

°°Van punt tot hyperkubus

We werken in de wiskunde met punten, lijnen, vlakken en lichamen; met lengten, oppervlakten en inhouden.
Een punt noemt men nuldimensionaal, een lijnstuk eendimensionaal, een vierkant tweedimensionaal, een kubus driedimensionaal. Waarom zouden we hier stoppen? Wat weerhoudt ons het dan volgende een hyperkubus te noemen, behorend tot de vierdimensionale wereld?

Maar wat is dat dan voor iets vreemds? Zelf zijn we 3-dimensionale wezens, behorend tot de wereld van de kubus. De zogenaamde R_4-ruimte is voor ons ontoegankelijk. Iedereen heeft wel eens van platlanders gehoord, levend in de R_2-ruimte. Voordat wijzelf aan hoogbouw en bergbeklimmen, aan vliegtuigen en ruimtevaart begonnen, gedroegen we ons ook zo'n beetje als platlanders.
Als je alleen maar lengte kent en je wereld is een lijn, dan ben je lijnlander en woon je in R_1.
Het is eigenlijk vreemd dat we ons wel de toestand van R_1- en R_2-wezens kunnen voorstellen, maar de grootste moeite er-