

A5819  
etc

Scan

Serge Dulucq

Thesis



(annotated scans  
selected paper

add to many segs!

Sq1

A5819  
A1764  
A71948  
A699  
A698  
A48609  
A36995  
A6027  
A259333  
A259332

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

pour obtenir le grade de

### DOCTEUR D'ÉTAT ÈS SCIENCES

par

Serge DULUCQ

fille

→ ÉTUDE COMBINATOIRE DE PROBLÈMES D'ÉNUMÉRATION.  
D'ALGORITHMIQUE SUR LES ARBRES ET DE CODAGE PAR DES MOTS

Soutenu le 3 juillet 1987 devant la commission d'examen :

Président : A. GARSIA

Examineurs : A. ARNOLD  
R. CORI  
D. GOUYOU-BEAUCHAMPS  
F. JAEGER  
V. STREHL  
G. VIENNOT

On utilise alors le lemme suivant dont la preuve est immédiate.

**Lemme 8.** Pour tout  $n \geq 1$ , la suite des nombres harmoniques vérifie

$$\sum_{k=0}^n H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1) .$$

On obtient donc le résultat attendu, à savoir

$$M_{n+1} = H_n .$$

### 6 - REMARQUES FINALES

La famille de polynômes  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  définie précédemment, nous a conduit à étudier la famille de polynômes  $\{s_n\}_{n \geq 0}$  définie par

$$\begin{cases} s_0 = 1 , \\ s_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^n s_k \times s_{n-k} \bar{x} . \end{cases} \quad (10)$$

Ces polynômes représentent "l'inverse" des polynômes  $p_n$  définis paragraphe 3 définition 1. Plus précisément

**Proposition 9.** La famille de polynômes  $\{s_n\}_{n \geq 0}$  vérifie

$$s_n = \sum_{A \in \mathcal{T}_{n+1}} \frac{1}{\pi_A}$$

et  $s_n \in \mathbb{N}\langle\langle x, \bar{x} \rangle\rangle$

Cette propriété résulte immédiatement de la définition des polynômes  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{s_n\}_{n \geq 0}$  et du corollaire 6.

Dans un autre article [7], nous montrons que les polynômes  $\{s_n\}_{n \geq 0}$  sont liés à un problème combinatoire concernant

l'énumération d'une classe particulière d'involutions sans point fixe. En particulier, nous montrons que le nombre

$$s_n \Big|_{x=\bar{x}=1}$$

énumère les involutions sans point fixe sur  $[1, 2(n+1)]$  qui constituent un système propre [13]. Ainsi, nous obtenons une récurrence simple sur ces nombres. Cette récurrence nous permet de montrer que les tables de nombres données dans [13] et les suites n°783 et n°1468 de [12] sont erronées. De plus, nous montrons que les polynômes  $\{s_n\}_{n \geq 0}$  donnent une distribution nouvelle de ces objets, distincte de celle considérée par Touchard [13] qui énumère ces involutions suivant le nombre de points doubles.

D'autre part, il existe une démonstration totalement bijective reposant sur la combinatoire des permutations et les arbres binaires croissants. Cette combinatoire a été abondamment décrite par Françon, Viennot, Vuillemin [8] à propos des *pagodes*. Dans un article en cours de rédaction nous donnons la démonstration bijective du théorème 7 concernant l'algorithme de Naïmi et Trehel.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris (1970).
- [2] J. BERSTEL, *Séries formelles en variables non commutatives et applications*, actes de la 5ième école de printemps d'Informatique théorique, Vieux-Boucau les Bains, 1977, LITP et ENSTA, Paris (1978).
- [3] J. BERSTEL, *Transductions and context-free languages*, Teubner, Stuttgart (1979).
- [4] L. CHOTTIN, *Etude syntaxique de certains langages solutions d'équations avec opérateurs*, Theor. Comp. Sc., vol. 5, 1977, 51-84.
- [5] R. CORI, J. RICHARD, *Énumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives*, Discrete Mathematics, Vol. 2, 1972.
- [6] S. DULUCQ, *Equations avec opérateurs: un outil combinatoire*, Thèse de 3ème cycle, Bordeaux, 1981.

and consequently

$$(g, u^m v^p) = \frac{1}{m} \binom{2m}{m-1-p} \binom{2m+p-1}{p}.$$

Afterwards, we substitute the values of  $u$  and  $v$  in  $g$  and then the value of  $g$  in  $S$ . We get

$$S(x, y) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i \geq 0} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{2k}{k-r-1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{k+r+i-1}{i} y^k x^{r+i+1}.$$

Thus, we get the following

**Theorem 19.** *The number of directed column convex polyominoes with directed site perimeter  $n$  and  $k$  columns is*

$$s_{n, k} = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{M_S} \binom{2k}{k-r-1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{n-2}{k+r-1},$$

with  $M_S$  the minimum of  $k-1$  and  $n-k-1$ .

**Remark 20.** If  $n=k+1$ , then  $s_{k+1, k}$  is the Catalan number  $C_k$  and we find again the number of stair polyominoes which was stated in section 2.

Using the previous theorem, we get immediately

**Corollary 21.** *The number of directed column-convex polyominoes having a directed site perimeter  $n$  is*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{M_S} \binom{2k}{k-r-1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{n-2}{k+r-1},$$

with  $M_S$  the minimum of  $k-1$  and  $n-k-1$ .

**Remark 22.** Using equation (14) with  $x=1$ , and  $y=z=x$ , we obtain the following equation of which  $S = \sum_{n \geq 0} s_n x^n$  is a solution :

$$S^3 + (3x-3)S^2 + (3x^2-4x+1)S + x^2(x-1) = 0.$$

It is possible to get an asymptotic result for  $s_n$  from this functional equation by the use of analytical techniques. We find

$$s_n \approx \left( \frac{32}{5} \right)^n n^{-3/2}.$$

We give another formula for this number using the last equation. Let  $g$  be the function defined by

$$g(x) = S + x - 1. \tag{15}$$

For short, we denote  $g(x)$  by  $g$ . Using the definition,  $g$  satisfies:

$$g^3 - 2(1-x)g - (1-x) = 0,$$

This equality leads to the form:

$$g = a + x\varphi(g) \text{ with } a = -1, \text{ and } \varphi(g) = -\frac{2g+1}{g^2-g-1}.$$

Then let  $g(x)$  be  $\sum_{n \geq 0} g_n x^n$ . Using the Lagrange inversion formula we have

$$g_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} \varphi^n}{dg^{n-1}}(a).$$

The function  $\varphi$  has the following form:

$$\varphi(g) = \frac{u(g)}{v(g)} \text{ with } u(g) = -2g-1, \text{ and } v(g) = g^2-g-1.$$

Thus

$$g_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{d^j v^{-n}}{dg^j} \frac{d^{n-1-j} u^n}{dg^{n-1-j}} (-1) . \quad (16)$$

It is easy to show that

$$\frac{d^p u^n}{dg^p} (-1) = \frac{n!}{(n-p)!} (-2)^p . \quad (17)$$

We denote  $\left[ \frac{p}{2} \right]$  by  $p_2$ ,  $\left[ \frac{p+1}{2} \right]$  by  $p_+$  and  $\left[ \frac{p-1}{2} \right]$  by  $p_-$ .

We now prove that

$$\frac{d^p v^{-n}}{dg^p} (g) = \sum_{i=0}^{p_2} I_{p,i,r} f_{n,p,i} X_{n,i,p}(g) , \quad (18)$$

where  $I_{p,i,r}$  is the number of involutions on  $[1,p]$  with  $2i+r$  fixed points, that is,

$$I_{p,i,r} = \frac{p!}{(2i+r)!(p_2-i)!} ,$$

and

$$f_{n,p,i} = (-1)^{p_++i} \frac{(n+p_++i)!}{(n-1)!} ,$$

$$r = p \bmod 2 ,$$

and

$$X_{n,i,p}(g) = \begin{pmatrix} dv \\ - \\ dg \end{pmatrix}^{2i+r} (g) v(g)^{-(n+i+p_+)} .$$

We prove equality (18) by induction on p. We will denote the first derivative of v(s) by v' and v(s) by v. Clearly (18) is true for p=0. Assume that (18) is satisfied for p ≤ 2k. Then let p be 2k+1. We have

$$\frac{dX_{n,0,p}(g)}{dg} = -(n+k)v' v^{-(n+k+1)},$$

$$\frac{dX_{n,i,p}(g)}{dg} = 4i v'^{2i+1} v^{-(n+i+k)}$$

$$-(n+i+k)v'^{2i+1} v^{-(n+i+k+1)} \text{ for } i \neq 0.$$

Thus

$$\begin{aligned} \frac{d^p v^{-n}(g)}{dg^p} &= \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{k+i} (2k)! (n+k-1+i)! 4i}{(2i)! (k-i)! (n-1)!} v'^{2i-1} v^{-n-i-k} \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{k+i+1} (2k)! (n+i+k)!}{(2i)! (k-i)! (n-1)!} v'^{2i+1} v^{-n-i-k-1} \\ &+ \frac{(-1)^{k+1} (2k)! (n+k)!}{k! (n-1)!} v' v^{-n-k+1}, \end{aligned}$$

Combining the last two summations and using the following identity

$$\frac{(2k)!}{(2i)! (k-i)!} + \frac{2(2k)!}{(2i+1)! (k-i-1)!} = \frac{(2k+1)!}{(2i+1)! (k-i)!},$$

we get

$$\begin{aligned} \frac{d^p v^{-n}(g)}{dg^p} &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k+i+1} (2k+1)! (n+i+k)!}{(2i+1)! (k-i)! (n-1)!} v'^{2i+1} v^{-n-i-k-1} \\ &+ \frac{(-1)^{2k+1} (n+2k)!}{(n-1)!} v'^{2k+1} v^{-n-2k-1}. \end{aligned}$$



Thus formula (18) is proved for  $p$  odd. In the same way, it is easy to prove the same result in case where  $p$  is even. Moreover we have

$$v(-1)=1 \quad \text{and} \quad v'(-1)=-3 \quad . \quad (19)$$

Therefore, using equalities (15) to (19), we get the following

**Theorem 23.** *The number of directed column-convex polyominoes having a directed site perimeter  $n$  is*

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j_2} (-1)^{n+i+1+j} \binom{n-j-1}{2} \binom{2i+r}{3} \frac{1}{n+j_++i} \binom{n+j_++i}{j+1; 2i+r; j_2-i; n-j-1}$$

with  $r=j \bmod 2$ ,  $j_+ = \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor$ , and  $j_2 = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$ .

We give, in figure 8, the table for  $s_{n,k}$  and  $s_n$ .

$s_{n,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	$s_n$
1	1								1
2	1	2							3
3	1	6	5						12
4	1	12	27	14					54
5	1	20	85	112	42				260
6	1	30	205	492	450	132			1310
7	1	42	420	1582	2565	1782	429		6821
8	1	56	770	4172	10415	12562	7007	1430	36413

A259332

A6026

Figure 8. The table for the numbers  $s_{n,k}$  and  $s_n$ .

7 - NUMBER OF DIRECTED COLUMN-CONVEX POLYOMINOES ACCORDING TO THE BOND PERIMETER

Using the same results as before, we give in this section a formula for the number  $P_{n,k}$  of dcc-polyominoes with bond perimeter  $2n+2$  and  $k$  columns. We have the following equation for  $P(x,y)$ .

$$x^4 P^3 - 2x^2(1-x^2)P^2 + (1-x^2)(1-x^2-x^2y)P - yx^2(1-x^2) = 0. \quad (20)$$

Dividing by  $(1-x^2)^2$ , and letting  $s$  be  $x^2/(1-x^2)$ , we get

$$s^2 P^3 - 2sP^2 + (1-ys)P - sy = 0.$$

Let  $g$  be  $sP$ . We have

$$P(sP-1)^2 - sy(P+1) = 0.$$

We get the following system of equations

$$\begin{cases} P = ys \frac{(P+1)}{(g-1)^2}, \\ g = sP. \end{cases}$$

This system has a form which allows us to use Good's formula, with  $t=ys$ ,  $u=s$ ,

$$\varphi(P,g) = \frac{(P+1)}{(g-1)^2}, \quad \text{and} \quad \psi(P,g) = P.$$

Thus we have

$$(P, t^m u^r) = \frac{1}{m^r} \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m-1} i (\varphi^m, P^j g^i) (\psi^r, P^{m-1-j} g^{r-i}),$$

and consequently

$$(P, t^m u^r) = \frac{1}{m} \binom{m}{r+1} \binom{2m+r-1}{r}.$$

Now, we substitute the values of  $t$  and  $u$ , and we obtain

$$P(x,y) = \sum_{m \geq 1} \sum_{i \geq 0} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{m} \binom{m}{r+1} \binom{2m+r-1}{r} \binom{m+r+i-1}{i} y^m x^{2(m+r+i)}.$$

Thus we get the following

**Theorem 24.** *The number of directed column-convex polyominoes with bond perimeter  $2n+2$  and  $k$  columns is*

$$P_{n,k} = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{M_p} \binom{k}{r+1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{n-1}{k+r-1},$$

with  $M_p$  the minimum of  $k-1$  and  $n-k$ .

Summing over  $k$ , we get the

**Corollary 25.** *The number of directed column-convex polyominoes having a bond perimeter  $2n+2$  is*

$$P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{M_p} \binom{k}{r+1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{n-1}{k+r-1},$$

with  $M_p$  the minimum of  $k-1$  and  $n-k$ .

$P_{n,k}$	1	2	3	4	5	6	7	$P_n$
1	1							1
2	1	1						2
3	1	4	1					6
4	1	9	9	1				20
5	1	16	37	16	1			71
6	1	25	105	106	25	1		263
7	1	36	240	446	245	36	1	1005

A6027

A259333

Figure 9. Table for the numbers  $P_{n,k}$  and  $P_n$ .

We give in figure 9 the table for the values of  $p_n$  and  $p_{n,k}$ .

**Remark 26.** Using equation (20) with  $y=1$ , it is easy to find an asymptotic value for  $p_n$ . We get

$$p_n \approx \left[ \frac{3+2\sqrt[3]{100+5\sqrt{10}}}{6} \right]^n n^{-3/2} .$$

### 8 - NUMBER OF DIRECTED COLUMN-CONVEX POLYOMINOES WITH GIVEN AREA

In this section, we give an exact formula for the number  $r_n$  of dcc-polyominoes having an area  $n$ .

Let  $X$  be the alphabet  $\{a,x\}$ .

**Definition 27.**  $R$  is the language of the words  $w$  of  $X^*$  satisfying

- (i)  $w$  is in  $(xx+a)^*xx$ ,
- (ii)  $|w|$  is even.

For each dcc-polyomino  $A$  having  $k$  columns, we define the word  $w=\rho(A)$  in  $X^*$  using the following construction:

- if  $A$  has one column, then  $C^A=(c_1^A)$  and  $\rho(A)=x^{2c_1^A}$ ,
- if  $A$  has  $k$  columns, then  $\rho(A)=w_1w_2\dots w_k$  such that
  - $2g_i^A \quad 2(c_i^A-g_i^A-1)$
  - for every  $i \in [1, k-1]$ ,  $w_i = x^{ax}$
  - and  $w_k = x^{2c_k^A}$ .

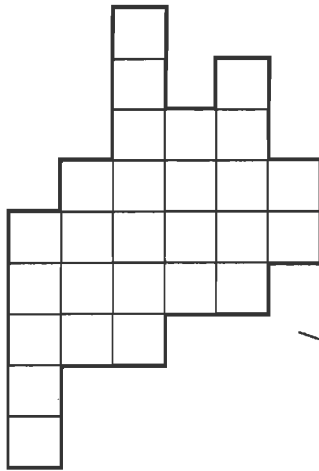
Clearly,  $w$  is a word of  $R$ . The number of columns of the dcc-polyomino  $A$  is

$$\frac{|\rho(A)|_a}{2} + 1,$$

and the area of  $A$  is

$$\frac{|\rho(A)|}{2} .$$

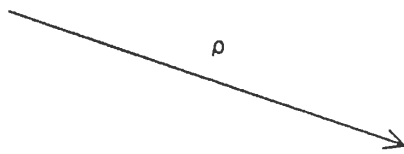
An example of this coding is given in figure 10.



$$C^A = (5, 4, 7, 4, 5, 2)$$

$$G^A = (2, 0, 1, 0, 1)$$

$$z(A) = 27$$



$$\rho(A) = \text{xxxxxxxxaaxxxxxxxxxaxxxxxxxxxxxxxxxxxaaxxxxxxxxxaxxxxxxxxxxxxx}$$

Figure 10. An example of the bijection  $\rho$ .

**Lemma 28.** *The map  $\rho$  is a bijection between the words of  $R$  of length  $2n$  and the dcc-polyominoes having area  $n$ .*

In order to prove it, we construct the reverse bijection  $\rho'$  of  $\rho$ . Let  $w$  be a word of  $R$ . We define two sequences of integers associated to  $w$ , that is,  $\rho'(w) = (\Xi(w), \Gamma(w))$ .

- 1 - If  $|w|_a = 0$ , then  $\Xi(w) = (|w|_x / 2)$  and  $\Gamma(w)$  is empty.
- 2 - If  $|w|_a \neq 0$ , then  $w = w_1 a w_2 a \dots a w_{2k+1}$  such that, for every  $i \in [1, 2k+1]$ ,  $w_i \in \{xx\}^*$  and  $w_{2k+1} \neq \varepsilon$ . Then, for every  $i \in [1, k]$ , we define

$$\Xi(w)_i = \frac{|w_{2i-1}| + |w_{2i}|}{2} + 1,$$

$$\Gamma(w)_i = \frac{|w_{2i-1}|}{2},$$

and  $\Xi(w)_{k+1} = \frac{|w_{2k+1}|}{2}.$

SUR LES FACTEURS DES SUITES DE STURM

S.DULUCQ et D.GOUYOU-BEAUCHAMPS

Université de Bordeaux I  
U.E.R. de Mathématiques et Informatique  
33405 Talence Cedex.

Etant donné un entier  $n \geq 2$ , nous considérons l'ensemble des entiers  $p$ ,  $q$  et  $r$  vérifiant les trois conditions

- a)  $0 < p < q \leq n$  ,
- b)  $0 \leq r < q \leq n$  ,
- c)  $(p, q) = 1$  c'est à dire les entiers  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

Nous étudions alors le mot  $f = f_1 f_2 \dots f_n$  écrit sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  et défini par

$$f_i = \left[ \frac{pi+r}{q} \right] - \left[ \frac{p(i-1)+r}{q} \right]$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $[x]$  désignant la partie entière du rationnel  $x$ .

Le mot  $f$  ainsi obtenu est le mot associé à la droite d'équation

$$y = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q}.$$

Notre but est d'étudier le langage formé par l'ensemble des mots de longueur  $n$  associés à ces droites dans lesquelles  $p$ ,  $q$  et  $r$  vérifient les conditions a, b et c. Les motivations de cette étude sont de nature arithmétique et H.Cohen [5] nous a signalé qu'il serait intéressant de dénombrer ces mots.

Cette construction associant à une droite un mot est classique et apparait régulièrement dans la littérature sous diverses formes.

Elle a été considérée pour la première fois, semble-t-il, par l'astronome Johan Bernoulli (1772) qui voulait calculer la suite de nombres  $[m\xi+1/2]$  pour toutes les valeurs entières de  $m$ , connaissant le développement en fraction continue du nombre irrationnel  $\xi$ , et en utilisant seulement l'opération d'addition (voir [20]).

Le plus souvent, les auteurs de ces travaux se placent dans le cas de droites à pente irrationnelle qu'ils codent par des mots infinis. On pourra se référer pour cela aux travaux de Markoff [14], Christoffel [4] et Smith [18] pour le 19<sup>ème</sup> siècle et aux articles de Coven et Hedlund [6], Hedlund [9], Hedlund et Morse [10,11], Rauzy [15,16], Stolarsky [19] et Lunnon et Pleasants [12,13] pour le 20<sup>ème</sup>.

Les mots infinis ainsi obtenus portent des noms très variés tels que caractéristique du nombre irrationnel  $\xi$ , suite de Beatty, suite de Sturm, suite de Bernoulli, suite "two-distance", suite linéaire et, dans un cas particulier, suite musicale [8,17].

Ils interviennent aussi dans de nombreux domaines comme la géométrie hyperbolique, l'approximation Diophantienne et les équations Diophantiennes (on pourra consulter l'article de C.Series pour plus de développements) et même le pavage du plan ou le calcul des cycles lunaires (voir [8,17]).

Coven et Hedlund [6] ont montré que les suites de Sturm codant les droites à pente irrationnelle passant par l'origine (il s'agit dans ce cas d'un codage) sont les mots infinis non périodiques dont tout facteur de longueur finie  $f$  vérifie la condition (C) suivante.

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute factorisation } f=f_1 u f_2 v f_3, \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont} \\ \text{de même longueur, les nombres de lettres } 1 \text{ dans } u \\ \text{dans } v \text{ différent au plus d'une unité.} \end{array} \right.$$

Nous montrons que l'ensemble des mots de longueur  $n$  construits (il ne s'agit plus ici d'un codage) à partir des droites "rationnelles"

$$y = \frac{p}{q} x + \frac{r}{q}$$

où  $p$ ,  $q$  et  $r$  vérifient les conditions a, b et c est exactement l'ensemble des facteurs de longueur  $n$  des suites de Sturm.

De plus, la démonstration que nous donnons est constructive puisqu'elle permet de retrouver, à partir d'un facteur de longueur  $n$  d'une suite de Sturm, une droite "rationnelle" donnant ce mot.

Remarquons que nous n'obtiendrions pas tous ces facteurs si nous avions considéré une autre famille de droites, comme par exemple les droites à pente rationnelle passant par l'origine ( $r=0$ ). Par contre, on pourrait montrer que dans ce cas cette construction est un codage.

Ensuite, nous évoquons les liens entre les mots obtenus à partir de ces droites, les développements en fraction continue et les morphismes itérés.

Nous nous intéressons également aux propriétés algébriques de ce langage  $D$  constitué par l'ensemble des facteurs finis des suites de Sturm. Nous établissons la non algébricité de ce langage et nous montrons que son complémentaire est algébrique, résultat analogue à un théorème de J. Berstel sur les morphismes itérés [3]. Par contre, la question de l'ambiguïté du langage complémentaire reste ouverte. Nous montrons que ce problème est très proche d'une conjecture de Autebert, Beauquier, Boasson et Nivat [1] et de problèmes d'ambiguïté de langages algébriques résolus par Flajolet [7].

Enfin, nous obtenons une équation fonctionnelle dont est solution la série génératrice des mots du langage  $D$ . Cette équation fonctionnelle ne permet hélas pas d'énumérer les mots de longueur  $n$  de  $D$ . Nous conjecturons que ce nombre de mots est donné par

$$-1 + \sum_{i=1}^n (n-i+1) \varphi(i) ,$$

dans laquelle  $\varphi$  est la fonction d'Euler  $\varphi(p) = \{m / m < p \text{ et } (m,p)=1\}$ .

L'exactitude de cette conjecture permettrait alors de confirmer l'ambiguïté du langage complémentaire du langage  $D$ .

### 1 - Un langage défini par "codage" de droites

Considérons, pour tout entier  $n \geq 2$ , l'ensemble  $\Delta(n)$  constitué par les droites d'équation  $y = \delta(x)$  où

$$\delta(x) = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q} , \text{ les entiers } p, q \text{ et } r \text{ vérifiant } \left. \begin{array}{l} (D_1) \ 0 < p < q \leq n , \\ (D_2) \ 0 \leq r < q \leq n , \\ (D_3) \ (p, q) = 1 \text{ (} p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux).} \end{array} \right\} (1)$$



Par une construction analogue à celle considérée par Rauzy [16] pour les droites de pente irrationnelle, nous allons associer à chaque droite  $y=\delta(x)$  un mot sur l'alphabet  $X=\{0,1\}$ .

Soient donc un entier  $n \geq 2$  et  $y=\delta(x)$  une droite appartenant à  $\Delta(n)$ . Considérons l'application  $\Psi$  associant à cette droite le mot  $\Psi(\delta)=f=f_1 f_2 \dots f_n$  de longueur  $n$  ( $f_i \in X$ ) défini visuellement de la manière suivante:

pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $I_k$  désignant l'intervalle  $]k-1, k]$ ,  
 si  $\delta$  coupe une droite d'équation  $y=c$  ( $c \in \mathbb{N}$ ) sur la bande  
 verticale ayant pour projection  $I_k$ ,  
 alors  $f_k=1$ ,  
 sinon  $f_k=0$ . (2)

Plus formellement, les lettres  $f_k$  du mot  $\Psi(\delta)=f_1 f_2 \dots f_n$  vérifient

$$f_k = [\delta(k)] - [\delta(k-1)]$$

où  $[x]$  désigne la partie entière du nombre  $x$ .

**Exemple.** La figure 1 donne un exemple de "codage" pour  $n=10$  et la droite appartenant à  $\Delta(10)$  d'équation  $y=\delta(x)$  où

$$\delta(x) = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}.$$

On obtient pour cette droite  $y=\delta(x)$  le mot  $\Psi(\delta) = 1000100100$ .

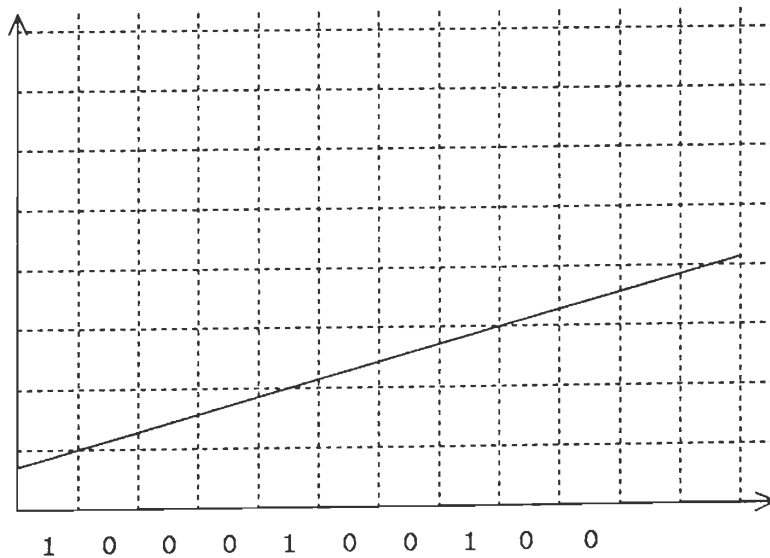


Figure 1. Le mot associé à  $y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}$ .

**Remarque 1.** L'application  $\Psi$  ne définit pas un codage de ces droites. En effet  $\Psi$  n'est pas injective. Par exemple, pour  $n=3$ , considérons les droites d'équations  $y=\delta(x)$  et  $y=\lambda(x)$  où

$$\delta(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad \lambda(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Ces deux droites appartiennent à  $\Delta(3)$  et vérifient  $\Psi(\delta)=\Psi(\lambda)=010$ .

Dans la suite de cet exposé, nous allons nous intéresser au langage constitué de tous les mots  $\Psi(\delta)$  obtenus à partir des droites  $y=\delta(x)$  appartenant aux ensembles  $\Delta(n)$ , langage que nous caractériserons dans les paragraphes suivants.

Considérons donc le langage D défini par

$$D = \{ f \in X^* \mid \text{il existe une droite } \delta \text{ appartenant à } \Delta(n) \text{ où } n=|f| \text{ telle que } \Psi(\delta)=f \}. \quad (3)$$

Dans cette définition,  $|f|$  désigne la longueur du mot  $f$  (c'est à dire son nombre de lettres).

## 2 - Une première propriété du langage D

Considérons le morphisme  $\phi$  de  $X^*$  sur lui même défini par

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 1, \\ \phi(1) &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que le langage D est fermé par ce morphisme, et ceci en donnant une interprétation de  $\phi$  sur les droites.

**Proposition 2.** Si  $f \in D$  alors  $\phi(f) \in D$ .

Preuve.

Soient  $f \in D$  et  $n=|f|$  sa longueur. Alors, il existe une droite appartenant à  $\Delta(n)$  d'équation  $y=\delta(x)$  où

$$\delta(x) = \frac{p}{q}x + \frac{r}{q}, \quad \text{et telle que } \Psi(\delta)=f.$$

Considérons alors la droite d'équation  $y=\lambda(x)$  où

$$\lambda(x) = \frac{q-p}{q}x + \frac{q-r-1}{q}.$$

On constate également que seuls les mots du langage A ne peuvent être obtenus à partir d'un mot de  $D_1$  par l'une de ces substitutions, ceci d'après la définition de  $D_1$  (tout mot de  $D_1$  possède au moins une lettre 0 et une lettre 1) et d'après la définition du langage A et des substitutions considérées.

La série génératrice  $f(x,y)$  du langage  $D_1$  est alors

$$f(x,y) = a(x,y) + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \quad (25)$$

En reportant dans cette équation les valeurs obtenues dans les formules (15), (17), (18), (19) et (24), nous déduisons de la définition de la série génératrice  $f(x,y)$  l'équation fonctionnelle du théorème 18.

A l'aide du langage de calcul symbolique MACSYMA, nous avons obtenu les premières valeurs suivantes pour les nombres  $a_{n,p}$  à partir de cette équation fonctionnelle.

A36995

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
-n																				
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35	40	45	51	57	63	70	
3	1	3	3	4	7	9	10	13	16	19	22	25	29	34	37	41	47	52		
4	1	3	4	4	5	10	12	12	15	18	23	26	27	32	37	41	45			
5	1	4	5	7	5	6	13	18	17	17	19	26	32	35	35	39				
6	1	4	4	6	9	6	7	16	22	23	22	21	24	34	45					
7	1	5	6	7	11	12	7	8	20	27	28	32	31	26						
8	1	5	6	7	8	15	15	8	9	24	33	31	37							
9	1	6	6	8	9	14	18	19	9	10	28	40								
10	1	6	7	9	9	11	18	23	22	10	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	1	7	8	10	13	11	18	21	30	27										
12	1	7	7	8	12	12	14	23	24	.										
13	1	8	9	11	12	18	13	25		.										
14	1	8	9	12	13	20	15			.										
15	1	9	9	11	13	15				.										
16	1	9	10	11	14					.										
17	1	10	11	14						.										
18	1	10	10							.										
19	1	11								.										
20	1									.										

Table des nombres  $a_{n,p}$  ( $n+p \leq 21$ ).

Le nombre  $d_n$  de mots de  $D$  de longueur  $n$  comprise entre 2 et 30 est alors

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$d_n$	2	6	12	22	34	52	74	102	134	176	222	280	344	416	496	592	694

*A5819*

$n$	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$d_n$	814	942	1082	1232	1404	1584	1784	1996	2226	2468	2738	3016

Table des nombres  $d_n$  ( $2 \leq n \leq 30$ ) .

L'équation fonctionnelle dont  $f(x,y)$ , la série génératrice des mots du langage  $D$  se terminant par la lettre 1, est l'unique solution ne permet pas d'obtenir une expression simple de la série génératrice  $d(x)$  du langage  $D$ .

En exploitant les tableaux de nombres ci-dessus, nous avons constaté que la série  $d(x)$  pouvait s'exprimer en fonction de l'indicatrice d'Euler.

Considérons la série génératrice du langage  $D$

$$d(x) = \sum_{n \geq 2} d_n x^n ,$$

et la série d'Euler définie par

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 1} \varphi(n) x^n , \text{ dans laquelle} \quad (26)$$

$\varphi(n)$  est le nombre d'entiers inférieurs à  $n$  et premiers avec  $n$ .

Remarque 19.

Pour tout  $n \geq 2$ , le nombre de droites de  $\Delta(n)$  est

$$\text{card}(\Delta(n)) = \sum_{i=2}^n i \varphi(i) . \quad (27)$$

Nous formulons la conjecture suivante, reliant la série génératrice du langage  $D$  à la série d'Euler.

**Conjecture 2.** La série génératrice  $d(x)$  du langage  $D$  est donnée par

$$d(x) = \frac{x(x-1) + \Phi(x)}{(1-x)^2} . \quad (28)$$

De façon équivalente, le nombre de mots de longueur  $n \geq 2$  de  $D$  est

$$d_n = -1 + \sum_{i=1}^n (n-i+1) \varphi(i) . \quad (29)$$

**Remarque 20.** La conjecture 2 implique la conjecture 1 du fait de la non algébricité de la série indicatrice d'Euler  $\Phi(x)$  et de la relation (28).

En effet,  $d(x)$  n'est donc pas une série algébrique si la conjecture 2 est vraie, et il en est alors de même pour la série génératrice du langage complémentaire de  $D$ .

Or, le langage complémentaire de  $D$  étant algébrique, ce langage est alors ambigu.

**Remarque 21.**

Comme  $\sum_{i=1}^n \varphi(i)$  est asymptotiquement équivalent à  $\frac{3n^2}{\pi^2}$ ,

nous déduisons de la conjecture 2 que  $d_n$  est asymptotiquement

équivalent à  $\frac{n^3}{\pi^2}$  et que le rapport  $\frac{\text{card}(\Delta(n))}{d_n}$  a pour limite

2 pour  $n$  tendant vers l'infini.

Remerciements.

Nous remercions Messieurs Cohen et Laubie pour avoir attiré notre attention sur ce problème et Messieurs Allouche et Rauzy pour leur aide dans les recherches bibliographiques.

Références

[1] J.M.AUTEBERT, J.BEAUQUIER, L.BOASSON and M.NIVAT, Quelques problèmes ouverts en théorie des langages algébriques, R.A.I.R.O. Theoret. Comp. Sc. 13(1979), 363-379.

- [2] J.BERSTEL, Transductions and context-free languages, Teubner, Stuttgart, 1979.
- [3] J.BERSTEL, Every iterated morphism yields a co-CFL, Inform. Processing Letters 22(1986), 7-9.
- [4] E.B.CHRISTOFFEL, Observatio Arithmetica, Annali di Mathematica, Second series 6(1875), 148-152.
- [5] H.COHEN, Communication personnelle.
- [6] E.M.COVEN and G.A.HEDLUND, Sequences with minimal block growth, Math. Systems Theory 7(1983), 138-153.
- [7] P.FLAJOLET, Analytic models and ambiguity of context-free languages, ICALP'85, Soumis à Theoretical Computer Science.
- [8] B.GRUNBAUM and G.C.SHEPHARD, Tilings and Patterns, Freeman, San Francisco, 1986, \$10.6 .
- [9] G.A.HEDLUND, Sturmian minimal sets, Amer. J. Math. 66(1944), 605-620.
- [10] G.A.HEDLUND and Marston MORSE, Symbolic dynamics, Amer. J. Math. 60(1938), 815-866.
- [11] G.A.HEDLUND and Marston MORSE, Symbolic dynamics part. II: Sturmian trajectories, Amer. J. Math. 62(1940), 1-42.
- [12] W.F.LUNNON and P.A.B.PLEASANTS, Characterization of two distance sequences, preprint.
- [13] W.F.LUNNON and P.A.B.PLEASANTS, Quasicrystallographie Tilings, à paraître dans J. Math. Pures Appl. .
- [14] A.A.MARKOFF, Sur une question de Jean Bernoulli, Math. Ann. 19(1882), 27-36.
- [15] G.RAUZY, Suites à termes dans un alphabet fini, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1982-1983) 25-01, 25-16.
- [16] G.RAUZY, Mots infinis en arithmétique, in "Automata on infinite words", Ecole de Printemps d'Informatique théorique, Le Mont Dore 1984, Lecture Notes in Computer Science 192(1985), 165-171.

- [17] C.SERIES, The geometry of Markoff numbers, The Mathematical intelligencer 7(1985), 20-29.
- [18] H.J.S.SMITH, Note on continued fractions, Messenger of Mathematics, Second series 6(1876), 1-14.
- [19] K.B.STOLARSKY, Beatty sequences, continued fractions and certain shift operators, Canada Math. Bull. 19(1976), 473-482.
- [20] B.A.VENKOV, Elementary Number Theory, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, The Netherlands, 1970, p.67.

ENUMERATION DES ARBRES

ET

GRAPHES DE CORDES CONNEXES

S.DULUCQ et J.G.PENAUD

Université de Bordeaux I  
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique  
33405 Talence Cedex

Dans un récent article [1], Arnold, Delest et Dulucq ont étudié la complexité moyenne de l'algorithme d'exclusion mutuelle dans un réseau distribué proposé par Naïmi et Trehel [12]. En particulier ils ont montré que pour un réseau comportant  $n+1$  processus, la complexité moyenne de cet algorithme est exactement  $H_n$  le  $n^{\text{ième}}$  nombre harmonique.

Dans la démonstration qu'ils donnent apparaît une suite d'entiers définie par une formule de récurrence. Stein [17] a montré, par une preuve analytique, que cette suite énumère une classe d'involutions considérées au préalable par Touchard [18,19,20], les involutions "propres" (voir [20]).

Le but de cet article est de donner une démonstration bijective du résultat de Stein. Son intérêt provient aussi du fait que ces involutions propres peuvent être considérées comme des graphes de cordes connexes. Ces graphes ont été récemment longuement étudiés, essentiellement dans le but de les caractériser (voir par exemple [6,7,10,15]).

Ensuite, naturellement, nous nous intéressons à une classe particulière de graphes de cordes connexes, les arbres de cordes. Nous obtenons, toujours par une démonstration bijective, une formule exacte pour le nombre d'arbres de cordes ayant  $n$  sommets.



De plus, la bijection que nous donnons nous permet d'obtenir une distribution de ces arbres suivant un paramètre particulier. Cette distribution s'avère être du même type que la distribution donnée par le triangle de Delannoy [5] sur les nombres de Catalan  $C_n$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} .$$

Cet article est divisé en trois paragraphes. Le premier est consacré à l'exposé des résultats de [1] qui nous ont conduit à l'étude de ce problème.

Le second paragraphe a pour thème l'énumération des graphes de cordes connexes ou, de manière équivalente, des involutions connexes (appelées propres par Touchard [20] et irréductibles par Stein [17]).

Le troisième paragraphe est consacré à l'énumération des arbres de cordes et à la distribution de ces arbres suivant le paramètre "longueur de la branche joignant le sommet  $(1, \sigma(1))$  au sommet  $(\sigma(2n), 2n)$ " où  $\sigma$  représente l'involution sur  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  associée à cet arbre.

### 1- Transformation d'arbres et probabilités limites

Nous allons rappeler la transformation étendue aux arbres considérée par Naïmi et Trehel [12] et introduire le problème combinatoire apparu dans les travaux de Arnold, Delest et Dulucq [1].

Nous donnons tout d'abord les définitions et notations utilisées dans ce paragraphe identiques à celles considérées dans [1].

Soit  $\mathcal{T}_{n+1}$  l'ensemble des  $C_n$  arbres planaires à  $n+1$  sommets (appelés aussi arbres planaires pointés) pour lesquels

- un sommet, appelé la racine, est distingué ,
- pour tout sommet, l'ensemble de ses fils est totalement ordonné.

Soient  $X$  l'alphabet  $\{x, \bar{x}\}$  et  $D$  le langage de Dyck restreint (ou langage des systèmes de parenthèses bien formés). Ce langage est engendré par la grammaire algébrique (voir [3]) définie par les règles suivantes:

$$D \longrightarrow \varepsilon \text{ (le mot vide) ,}$$

$$D \longrightarrow Dx\bar{x} \text{ .}$$

Le langage  $D$  est constitué de l'ensemble des mots  $w$  écrits sur l'alphabet  $X$  ayant autant de lettres  $x$  que de lettres  $\bar{x}$ , et dont tout facteur gauche possède au moins autant de lettres  $x$  que de lettres  $\bar{x}$ .

Tout mot  $w$  de  $D$ , s'il n'est pas vide, s'écrit alors de manière unique sous la forme  $w=uxv\bar{x}$  où  $u$  et  $v$  sont deux mots du langage  $D$ .

Cette unique factorisation correspond à l'unique décomposition d'un arbre planaire décrite par la figure 1. Cette correspondance permettrait de définir récursivement la bijection (très classique) entre les arbres planaires appartenant à  $\mathcal{T}_{n+1}$  et les mots de  $D$  de longueur  $2n$ .

Notations. Dans ce qui suit, nous désignons par

- $\mathcal{A}[u]$  l'arbre planaire  $\mathcal{A}$  codé par le mot  $u$  appartenant à  $D$ ,
- $u[\mathcal{A}]$  le mot codant l'arbre planaire  $\mathcal{A}$ ,
- $\text{Fils}_{\mathcal{A}}(x)$  la suite (ordonnée) des fils de  $x$  dans l'arbre planaire  $\mathcal{A}$ .

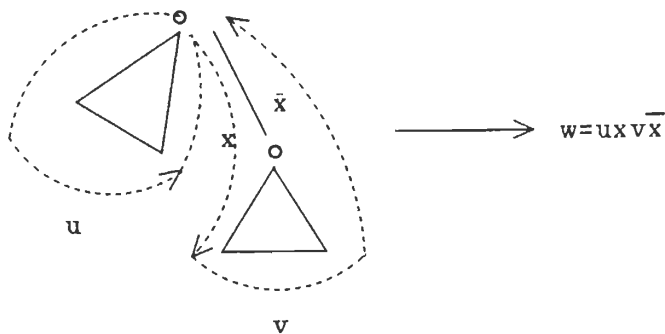


Figure 1. Codage des arbres planaires par les mots de Dyck.

Considérons maintenant la transformation, étendue aux arbres planaires, considérée par Naïmi et Trehel dans leur algorithme d'exclusion mutuelle. Cette transformation, notée  $\varphi_x$ , peut être décrite formellement comme suit, ou de façon visuelle par la figure 2.

Soit  $\mathcal{A}$  un arbre planaire de racine  $r$  et  $x$  un sommet de  $\mathcal{A}$ . Notons  $(r, x_1, \dots, x_p, x)$  l'unique chemin dans  $\mathcal{A}$  allant de la racine  $r$  au sommet  $x$ .

L'arbre  $\varphi_x(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$  est l'arbre planaire obtenu par le procédé suivant.

- La racine de  $\mathcal{A}'$  est  $x$ ,
- $\text{Fils}_{\mathcal{A}'}(x) = (\text{Fils}_{\mathcal{A}}(x), x_p, x_{p-1}, \dots, x_1, r)$ ,
- pour tout  $y \neq x$ ,

$$\text{Fils}_{\mathcal{A}'}(y) = \begin{cases} \text{Fils}_{\mathcal{A}}(y) \setminus \{x_i\} & \text{si } x_i \in \text{Fils}_{\mathcal{A}}(y) , \\ \text{Fils}_{\mathcal{A}}(y) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Remarque.

Si le sommet  $x$  choisi est la racine  $r$  de l'arbre planaire  $\mathcal{A}$ , alors  $\varphi_x(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .

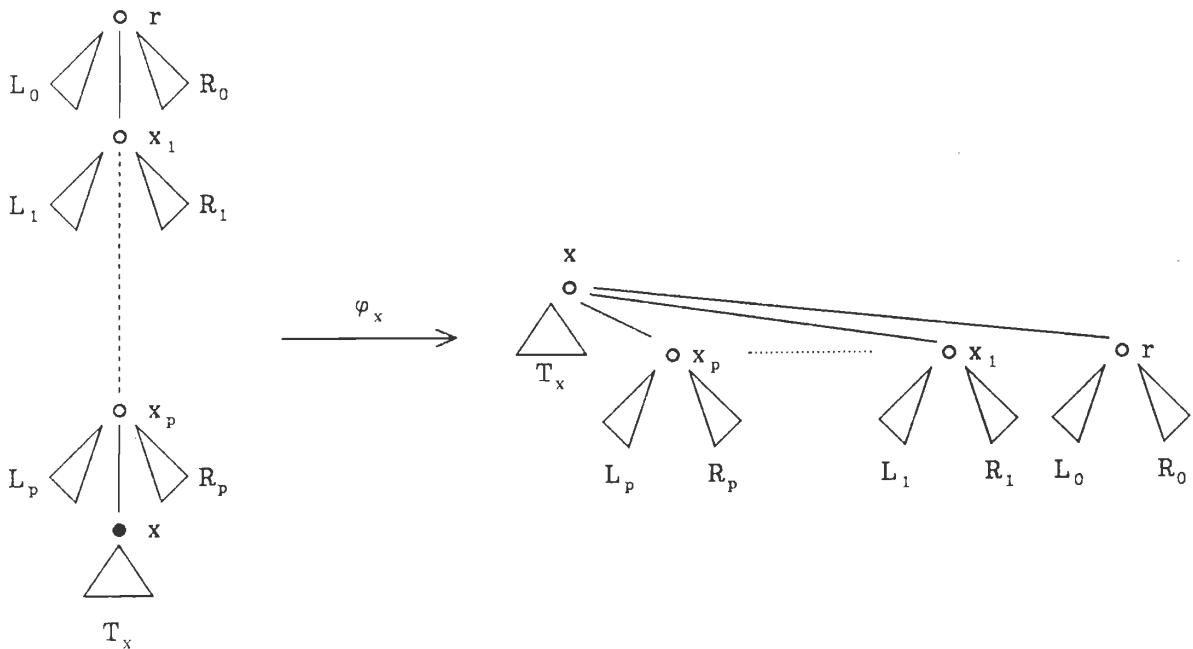


Figure 2. La transformation  $\varphi_x$  sur les arbres.

La complexité moyenne de l'algorithme de Naïmi-Trehel pour un réseau comportant  $n$  processus est donnée par

$$M_n = \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}_n} \Pi(\mathcal{A}) H(\mathcal{A}) , \quad (1)$$

dans laquelle

-  $\Pi(\mathcal{A})$  est la probabilité limite d'obtention de l'arbre planaire  $\mathcal{A}$  à l'issue d'un nombre infini de transformations  $\varphi_x$ ,

$$- H(\mathcal{A}) = \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathcal{A}, x \neq r} h(x)$$

dans laquelle  $h(x)$  désigne la hauteur dans  $\mathcal{A}$  du sommet  $x$  (nombre de sommets de l'unique chemin allant de la racine  $r$  à  $x$ ).

Dans l'algèbre des polynômes en variables non commutatives  $x$  et  $\bar{x}$  et à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , nous considérons la famille de polynômes  $\{p_n\}_{n \geq 1}$  ayant comme support le langage de Dyck  $D$ .

**Définition 1.**

La suite de polynômes  $\{p_n\}_{n \geq 1}$  est définie par la récurrence

$$\begin{cases} p_1 = 1 , \\ p_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} p_k x p_{n-k} \bar{x} . \end{cases} \quad (2)$$

Arnold, Delest et Dulucq ont alors montré le

**Théorème 2** [1]. Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$p_n = \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}_n} \Pi(\mathcal{A}) u[\mathcal{A}] , \quad (3)$$

$$M_n = H_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} . \quad (4)$$

De plus, dans [1], il est prouvé que les probabilités limites d'obtention se calculent immédiatement sur les arbres planaires compte-tenu du

**Corollaire 3** [1].

Soit  $w$  un mot de Dyck de longueur  $2n$ .

$$\text{Alors} \quad \Pi(\mathcal{A}[w]) = \frac{1}{n} \Pi(\mathcal{A}[u]) \Pi(\mathcal{A}[v]) \quad , \quad (5)$$

où  $u$  et  $v$  sont les mots donnés par l'unique factorisation de  $w$  en  $w=ux\bar{v}$ .

Ainsi, tout arbre planaire  $\mathcal{A}$  a une probabilité limite d'obtention  $\Pi(\mathcal{A})$  qui est l'inverse d'un entier.

**Définition 4.** Soit  $\{s_n\}_{n>1}$  la suite de polynômes en variables non commutatives  $x$  et  $\bar{x}$ , définie par la récurrence

$$\begin{cases} s_1 = 1 \quad , \\ s_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} s_k x s_{n-k} \bar{x} \quad . \end{cases} \quad (6)$$

Nous déduisons des relations (3) et (5) et des définitions des suites  $\{p_n\}$  et  $\{s_n\}$  le

**Théorème 5.** La suite de polynômes  $\{s_n\}_{n>1}$  vérifie

$$s_n = \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}_n} \frac{1}{\Pi(\mathcal{A})} u[\mathcal{A}] \quad . \quad (7)$$

Considérons maintenant la suite  $\{\sigma_n\}_{n>1}$  dans  $\mathbb{N}$  suivante.

**Définition 6.** La suite  $\{\sigma_n\}_{n>1}$  d'entiers est définie par

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \quad , \\ \sigma_n = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \sigma_{n-k} \quad . \end{cases} \quad (8)$$

Ainsi, d'après (6) et (7), nous avons

$$\sigma_n = s_n(x=1, \bar{x}=1) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}_n} \frac{1}{\Pi(\mathcal{A})} \quad (9)$$

Les premières valeurs de  $\{\sigma_n\}$  sont données dans la table ci-dessous.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_n$	1	1	4	27	248	2830	38232	593859

A699

Dans [17], Stein s'est intéressé à une famille d'involutions sans point fixe qu'il appelle irréductibles, involutions déjà étudiées par Touchard [20] sous le nom d'involutions propres. Pour notre part, nous les appellerons connexes car elles sont naturellement en bijection avec les graphes de cordes connexes.

Stein obtient, par une preuve analytique, une formule de récurrence [17, eq. 2.1] pour le nombre  $\sigma_n$  d'involutions connexes sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ .

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_{n+1} = \sum \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \prod_{j=1}^n \left[ (2j-1) \sigma_j \right]^{\alpha_j}, \quad (10)$$

où la somme est prise sur toutes les partitions de l'entier  $n$  vérifiant

$$\sum_{i=1}^n i \cdot \alpha_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha.$$

De plus, par un raisonnement simple, Stein montre que cette formule (10) est équivalente à (8).

Dans le paragraphe suivant, nous donnons une preuve purement bijective de l'identité (8).

Nous obtenons la table suivante des premières valeurs de  $\sigma_n$  (resp.  $\rho_n$ ) le nombre d'involutions connexes (resp. premières) sur  $[2n]$ .

n	1	2	3	4	5	6	7	
$\sigma_n$	1	1	4	27	248	2830	38232	AG99
$\rho_n$	1	2	10	74	706	8162	110410	AG99

Ainsi, les valeurs données par Touchard ([20], p.25) et par Sloane ([16], suites n°s 783 et 1468) sont exactes seulement pour  $n \leq 6$ .

### 3 - Enumeration des arbres de cordes

Le paragraphe 2 étant consacré à l'énumération des involutions connexes, ou de manière équivalente des graphes de cordes connexes, nous allons nous intéresser maintenant à une classe particulière de ces graphes, les arbres de cordes.

#### Définition 14.

Une involution  $\alpha$  de  $\mathcal{I}_n$  est une involution-arbre si et seulement si son graphe de cordes  $G(\alpha)$  est connexe sans cycle [2] (nous dirons alors arbre de corde).

#### Remarque 15.

Une involution connexe  $\alpha$  sur  $[2n]$  est une involution-arbre si et seulement si, dans sa représentation  $C(\alpha)$  sur un cercle par  $n$  cordes, toute région du cercle "touche" le cercle (i.e. la courbe fermée limitant cette région emprunte un arc du cercle).

De plus, si  $\alpha$  est une involution-arbre sur  $[2n]$ ,  $G(\alpha)$  est un arbre de cordes ayant  $n$  sommets et  $n-1$  arêtes et  $C(\alpha)$  a exactement  $n-1$  points d'intersection des cordes.

Preuve. D'après le système d'équations (15) nous avons

$$m = x + xya^2m$$

Nous en déduisons

$$m(x,y) = x(1-xya^2)^{-1} = \sum_{p \geq 0} x^{p+1} y^p a^{2p}$$

et,  $a$  étant une série en la seule variable  $y$ , nous avons, d'après la définition de  $m_k(y)$

$$m_k(y) = y^k a^{2k} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Ainsi, chaque ligne d'indice  $k \geq 2$  du tableau  $(a_{n,k})$  s'obtient par convolution de la ligne d'indice  $k-1$  avec la ligne d'indice 1, et la ligne d'indice 1 s'obtient par convolution de la suite  $(a_n)$  par elle-même.

Le système (22) s'obtient pour sa part par un calcul simple à partir de la formule (18).

Remarque 20.

Le corollaire 19 nous permet de constater que le triangle  $(a_{n,k})$  vérifie des propriétés analogues au triangle de Delannoy [5] construit à partir des nombres de Catalan.

Cela est dû au fait que la suite  $a_{n,k}$  énumère les arbres ternaires (tout sommet a 0 ou 3 fils) ayant  $3n+1$  sommets et dont la branche gauche est de longueur  $k$ .

Une bijection simple que nous ne donnerons pas ici permet de relier ces arbres ternaires aux arbres de cordes.

Des résultats analogues à ceux-ci s'obtiennent aisément pour les arbres  $n$ -aires ( $n \geq 2$ ) (voir par exemple [11]).

Donnons, pour terminer, les tables des premières valeurs des nombres  $a_{n,k}$  et  $a_n$ .

n	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	7	30	143	728	3876	21318
2		1	4	18	88	455	2448	13566
3			1	6	33	182	1020	5814
4				1	8	52	320	1938
5					1	10	75	510
6						1	12	102
7							1	14
8								1

A71948

Table des nombres  $a_{n,k}$ .



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n$	1	1	3	12	55	273	1428	7752	43263

A1764

Table des nombres  $a_n$ .

A1764

References

- [1] A.ARNOLD, M.P.DELEST et S.DULUCQ, Complexité moyenne de l'algorithme d'exclusion mutuelle de Naïmi et Trehel, rapport n°87-14, Laboratoire d'Informatique Université Bordeaux I, 1987.
- [2] C.BERGE, "Graphes et Hypergraphes", Dunod, Paris, 1970.
- [3] J.BERSTEL, "Transductions and context-free languages", Teubner, Stuttgart, 1979.
- [4] L.CHOTTIN, Une preuve combinatoire de la formule de Lagrange à deux variables, Discrete Math. 13(1975), 215-224.
- [5] A.ERRERA, Un problème d'énumération, Mém. Acad. Roy. Belgique 11(1931), 26pp.
- [6] J.C.FOURNIER, Graphes de cordes, hypergraphes de chaînes d'un arbre et matroïdes graphiques, in Actes du Colloque "Algèbre appliquée et Combinatoire" (C.Benzaken ed.), Grenoble, 1978, 164-171.
- [7] H.de FRAYSSEIX, A characterization of circle graphs, European J. Combinatorics 5(1984), 223-238.
- [8] I.J.GOOD, Generalizations to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes, Proc. Cambridge Philos. Soc. 56(1960), 367-380.
- [9] D.GOUYOU-BEAUCHAMPS, Codages par des mots et des chemins : problèmes combinatoires et algorithmiques, Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1985.
- [10] F.JAEGER, Graphes de cordes et espaces graphiques, European J. Combinatorics 4(1983), 319-327.
- [11] J.W.MOON, On level numbers of t-ary trees, SIAM J. Alg. Disc. Meth. 4(1983), 8-13.

			1							
			1		1					
		2		3		2				
	7		14		14		7			
	42		105		135		105		42	
429		1287		2002		2002		1287		429

△ A48601

Il apparaît que ce triangle est le même que celui obtenu par Mills, Robbins et Rumsey [18] lorsqu'ils ont étudié la distribution des matrices à signes alternés suivant la position de la seule valeur 1 sur la première ligne.

Ainsi, nous formulons une conjecture analogue à la leur.

**Conjecture 6.** Pour tout  $0 \leq k \leq n-2$ , on a

$$\frac{P_{n, k+1}}{P_{n, k}} = \frac{(n+k)(n-k-1)}{(k+1)(2n-k-2)} \quad (24)$$

**Remarque 5.5.**

Par un calcul simple, on montre que si la conjecture 6 est exacte, alors

$$\binom{2n}{n} P_{n+1} = \binom{3n+1}{n} P_n \quad (25)$$

Cette relation implique alors la conjecture 1 car la suite  $D(n)$  (relation (15) ou (16)) vérifie la même formule de récurrence.

Considérons maintenant la double distribution sur les  $n$ -uplets de chemins de  $\mathcal{W}_n$  définie de la façon suivante.

**Définition 5.6.**

Pour  $0 \leq q, r \leq n-1$ , considérons la double distribution  $P_{n, q, r}$  définie par

- $P_{n, q, r}$  est le nombre de  $n$ -uplets de chemins de  $\mathcal{W}_n$  dont
- (i)  $q$  débutent par un pas Nord ( $n-q-1$  par un pas Est),
  - (ii)  $r$  se terminent par un pas Nord ( $n-r-1$  par un pas Est).