D. J. Kleitman
(Cambridge, Mass)

manuscripta math. 11, 221 - 259 (1974)

MR, 54A10, 05A

H354111 221

99

7/24

STRUKTUR- UND ANZAHLFORMELN FÜR TOPOLOGIEN AUF ENDLICHEN MENGEN

Marcel Erné

Every topology τ on the finite set $X = \{x_1,\ldots,x_N\}$ has a minimal base $\mathcal{M}(\tau)$; separation axioms and connectivity are simply characterized; further we obtain a recursive construction of finite topologies.

In the second section we give some formulae connecting A(N) (the number of topologies on X), Z(N) (the number of connected topologies on X) and associated numbers. The theory of representation matrices discussed in the third section leads to an easy description of many topological notions as closure operator, induced topology, connectivity; it also yields some more combinatorial formulae.

In the last part we improve the remainder term $R(N) = \mathrm{ld}\, A(N) - \frac{1}{4}N^2 = O(N^{3/2}\mathrm{ld}\, N)$ given by Kleitman and Rothschild to $O(N\cdot\mathrm{ld}^2 N)$. Then, among many other asymptotical results, we show that A(N) and Z(N) are asymptotically equal.

1. Minimalbasis, Trennungsaxiome und Zusammenhang

Es sei im folgenden X eine endliche Menge und $\mathcal{A}(X)$ die Menge der Topologien auf X . Jede Topologie $\tau \in \mathcal{A}(X)$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$. Für $\tau \in \mathcal{A}(X)$ ist die Menge der bezüglich τ abgeschlossenen Teilmengen von X

$$\tau^* = \{X\setminus T : T \in \tau\}$$

wegen der Endlichkeit von X wieder eine Topologie auf X . Gilt $\tau = \tau^*$, so nennen wir τ symmetrisch. Mit $C_\tau(A)$ bezeichnen wir den Abschluß einer Menge $A \subset X$ in τ :

$$C_\tau(A) = \bigcap \{B : A \subset B \in \tau\} .$$

Ein zentraler Begriff bei der Untersuchung endlicher Topologien τ ist die Minimalbasis

$$\mathcal{M}(\tau) := \{B_x(\tau) : x \in X\} ,$$

wobei $B_x(\tau) = C_{\tau^*}(\{x\}) = \bigcap \{T : x \in T \in \tau\}$ die kleinste offene Menge ist, die x enthält ($x \in X$) . (vgl. [8],[9]).

Scan Erné add to sequences indicated

fq1

1929 - 1110 - 1927 - 1035 798

6056 - 6059

Die Minimalbasis ist die kleinste Basis von τ: $\mathcal{M}(\tau)$ ist also in allen anderen Basen enthalten und besteht aus zusammenhängenden Mengen. Insbesondere ist jeder topologische Raum lokal zusammenhängend.[1]

Nach H. SHARP ([8]) gilt

SATZ 1.1. Für eine Topologie $\tau \in \mathcal{A}(X)$ und $x, y \in X$ sind äquivalent :

a) $x \in B_y(\tau)$

b) $B_x(\tau) \subset B_y(\tau)$

c) $y \in B_x(\tau^*)$

d) $B_y(\tau^*) \subset B_x(\tau^*)$.

Für alle $x \in X$ ist $B_x(\tau^*) = C_\tau(\{x\})$.

KOROLLAR: $B_x(\tau)$ ist maximal (bezüglich der Inklusion $\subset$) in $\mathcal{M}(\tau)$ genau dann, wenn $B_x(\tau^*)$ minimal in $\mathcal{M}(\tau^*)$ ist.

Eine Charakterisierung der Minimalbasen gibt

SATZ 1.2. Ein Mengensystem $\mathcal{M} = \{V_x : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann Minimalbasis einer Topologie τ auf X mit $B_x(\tau) = V_x$ für $x \in X$, wenn

$$(*) \qquad x \in V_y \iff V_x \subset V_y$$

für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Beweis: Gilt $(*)$, so ist $\mathcal{M}$ Basis einer Topologie τ wegen

$$x \in V_y \cap V_z \implies x \in V_x \subset V_y \cap V_z .$$

Für $x \in X$ hat man $x \in V_x \in \tau$. Nach Definition der Minimalbasis $\mathcal{M}(\tau)$ gibt es $Y \subset X$ mit

$$V_x = \bigcup \{B_y(\tau) : y \in Y\} \subset \bigcup \{V_y : y \in Y\} .$$

[1] Wir fordern nicht, daß eine Basis die leere Menge $\emptyset$ enthält.

Also gilt $x \in B_x(\tau) \subset V_y \subset V_x$ für ein $y \in Y$, und $(*)$ impliziert $V_x = B_x(\tau) = V_y$.

Die Umkehrung folgt aus Satz 1.1.

Wir wollen nun zunächst die folgenden Trennungsaxiome für eine Topologie $\tau \in \mathcal{A}(X)$ untersuchen :

T_0) Zu $x \neq y$ gibt es $U \in \tau$ mit $x \in U$, $y \notin U$, oder $x \notin U$, $y \in U$.

T_1) Zu $x \neq y$ gibt es $U, V \in \tau$ mit $x \in U$, $y \notin U$, $x \notin V$, $y \in V$.

T_2) Zu $x \neq y$ gibt es $U, V \in \tau$ mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

T_3) Zu $x \in X$, $A \subset X$ mit $x \notin A \in \tau^*$ gibt es $U, V \in \tau$ mit $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

T_4) Zu $A, B \in \tau^*$ mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es $U, V \in \tau$ mit $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Eine Topologie, für die das T_i-Axiom erfüllt ist $(i = 0, \ldots, 4)$, heiße T_i-Topologie. Das T_1-Axiom wird hier für T_3- und T_4-Topologien nicht gefordert.

Für $\tau, \tau' \in \mathcal{A}(X)$ sei $\tau \vee \tau'$ die von τ und τ' erzeugte Topologie auf X :

$$\tau \vee \tau' = \bigcap \{ \omega \in \mathcal{A}(X) : \tau \subset \omega , \tau' \subset \omega \} .$$

Speziell sei $\mathcal{B}(\tau) := \tau \vee \tau^* =: \mathcal{B}(\tau^*)$ die von τ erzeugte Mengenalgebra auf X . $\mathcal{B}(\tau)$ ist die kleinste τ umfassende symmetrische Topologie.

SATZ 1.3. Für zwei Topologien $\tau, \tau' \in \mathcal{A}(X)$ hat man $B_x(\tau \vee \tau') = B_x(\tau) \cap B_x(\tau')$ $(x \in X)$, also $\mathcal{M}(\tau \vee \tau') = \{B_x(\tau) \cap B_x(\tau') : x \in X\}$.
Insbesondere
$A_x(\tau) := B_x(\mathcal{B}(\tau)) = B_x(\tau) \cap B_x(\tau^*) = A_x(\tau^*)$ $(x \in X)$.
$\mathcal{M}(\mathcal{B}(\tau)) = \{A_x(\tau) : x \in X\}$ ist eine Partition von X .

Beweis: $x \in B_x(\tau) \cap B_x(\tau') \in \tau \triangledown \tau'$ impliziert $B_x(\tau \triangledown \tau') \subset B_x(\tau) \cap B_x(\tau')$. Sei $x \in T \in \tau \triangledown \tau'$.
Da $\{U \cap U' : U \in \tau,\ U' \in \tau'\}$ eine Basis von $\tau \triangledown \tau'$ ist, gibt es $U \in \tau$ und $U' \in \tau'$ mit $x \in U \cap U' \subset T$, folglich

$$x \in B_x(\tau) \cap B_x(\tau') \subset T : B_x(\tau) \cap B_x(\tau') \subset \bigcap\{T : x \in T \in \tau \triangledown \tau'\} = B_x(\tau \triangledown \tau') .$$

Sei nun $\tau \in \mathcal{A}(X)$, und für zwei Elemente $x, y \in X$ gelte $x \in A_y(\tau)$. Dann folgt wegen $A_x(\tau) = A_x(\tau^*)$, $A_y(\tau) = A_y(\tau^*)$ und Satz 1.1.: $A_x(\tau) = A_y(\tau)$. Die verschiedenen $A_x(\tau)$ sind also disjunkt und bilden wegen $X = \bigcup \mathcal{B}(\tau) = \bigcup \mathcal{M}(\mathcal{B}(\tau))$ eine Partition von X .

Aufgrund der Endlichkeit von X lassen sich nun alle Trennungsaxiome sehr einfach charakterisieren: Die nachfolgenden Äquivalenzen verifiziert man leicht mit Hilfe von Satz 1.1. und 1.3. Teilaussagen findet man in [6], [8] und [9].

SATZ 1.4. Für $\tau \in \mathcal{A}(X)$ gilt

a) $T_0 \iff |\mathcal{M}(\tau)| = |X| \iff \mathcal{B}(\tau) = \mathfrak{P}(X)$.

b) $T_1 \iff T_2 \iff T_0$ und $T_3 \iff \tau = \mathfrak{P}(X)$.

c) $T_3 \iff \tau$ ist symmetrisch : $\tau = \tau^*$
$\iff \tau$ ist pseudometrisierbar
$\iff \tau$ ist uniformisierbar
$\iff \tau$ ist Mengenalgebra : $\tau = \mathcal{B}(\tau)$
$\iff \mathcal{M}(\tau)$ ist Partition von X .

KOROLLAR: Die einzige zusammenhängende T_3-Topologie τ auf X ist die indiskrete: $\tau = \{\emptyset, X\}$.

SATZ 1.5. Für $\tau \in \mathcal{A}(X)$ sind äquivalent:

a) T_4 , und τ ist zusammenhängend

b) $X \in \mathcal{M}(\tau)$

c) $\tau \setminus \{X\}$ ist Topologie auf geeignetem $Y \subset X$

d) Der Durchschnitt aller nichtleeren τ-abgeschlossenen Mengen ist nicht leer.

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b) : Sind $B_x(\tau)$ und $B_y(\tau)$ zwei verschiedene maximale Elemente von $\mathcal{M}(\tau)$, so sind wegen Satz 1.1. $C_\tau(\{x\})$ und $C_\tau(\{y\})$ disjunkt. Aufgrund des T_4-Axioms gibt es dann $U, V \in \tau$ mit $x \in C_\tau(\{x\}) \subset U$, $y \in C_\tau(\{y\}) \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. Es folgt $B_x(\tau) \subset U$, $B_y(\tau) \subset V$, $B_x(\tau) \cap B_y(\tau) = \emptyset$.
Da jedes $B_z(\tau)$ in einem maximalen $B_x(\tau)$ enthalten ist, erhält man X als disjunkte Vereinigung der maximalen $B_x(\tau)$. Da X als zusammenhängend vorausgesetzt war, folgt $X = B_x(\tau) \in \mathcal{M}(\tau)$ für ein geeignetes $x \in X$.

b) $\Longrightarrow$ c) : Wegen $X \in \mathcal{M}(\tau)$ ist X nicht Vereinigung echter Teilmengen aus τ . Damit liegen Vereinigung und Durchscnitt solcher Teilmengen wieder in $\tau \setminus \{X\}$.

c) $\Longrightarrow$ d) : $\bigcap \{A : \emptyset \neq A \in \tau^*\} = \emptyset$ ist mit $\bigcup \{T : X \neq T \in \tau\} = X$ gleichwertig.
Dann ist $\tau \setminus \{X\}$ aber nicht gegen beliebige Vereinigungen abgeschlossen.

d) $\Longrightarrow$ a) : Trivial.

Über die Zusammenhangskomponenten einer endlichen Topologie gibt der nächste, einfach nachzuprüfende Satz Auskunft.

SATZ 1.6. a) Die Zusammenhangskomponenten $C_1,\dots,C_r$ einer Topologie τ auf X sind offen und abgeschlossen. τ ist also Summentopologie der auf den C_j induzierten Topologien $\tau_{C_j} \subset \tau$.

$\{C_1,\dots,C_r\}$ ist Minimalbasis der größten in τ enthaltenen Mengenalgebra auf X.

b) $\mathcal{M}(\tau) = \bigcup\{\mathcal{M}(\tau_{C_j}) : 1 \le j \le r\}$. Ist umgekehrt $\{C_j : 1 \le j \le r\}$ eine Partition von X und $\mathcal{M}_j$ Minimalbasis einer zusammenhängenden Topologie τ_j auf C_j $(1 \le j \le r)$, so ist $\bigcup\{\mathcal{M}_j : 1 \le j \le r\}$ Minimalbasis einer Topologie τ auf $X = \bigcup\{C_j : 1 \le j \le r\}$ mit den Zusammenhangskomponenten $C_1,\dots,C_r$ und $\tau_j = \tau_{C_j}$ für $1 \le j \le r$.

c) τ erfüllt das T_i-Axiom $(0 \le i \le 4)$ genau dann, wenn alle τ_{C_j} das T_i-Axiom erfüllen.

d) Jeder endliche topologische Raum ist lokal wegzusammenhängend; die Wegkomponenten stimmen daher mit den Zusammenhangskomponenten überein.

Mit Satz 1.5. und 1.6.c) ist insbesondere auch eine Charakterisierung der T_4-Topologien auf X gegeben. Zum Beweis von 1.6.d) siehe [9]. Für $\tau \in \mathcal{A}(X)$ und $Y \subset X$ ist die Minimalbasis der induzierten Topologie τ_Y offenbar gegeben durch

$$(*) \quad B_x(\tau_Y) = B_x(\tau) \cap Y \quad (x \in Y) .$$

Die Minimalbasen aller Topologien auf endlichen Mengen lassen sich nun sehr einfach rekursiv bestimmen :

SATZ 1.7. $\{\mathcal{M}(\tau) : \tau \in \mathcal{A}(X)\} =$
$\{\mathcal{M}(\tau') \cup \{T \cup (X \setminus Y)\} : T \in \tau' \in \mathcal{A}(Y),\ Y \subsetneqq X\}$.

Beweis: Für $T \in \tau' \in \mathcal{A}(Y)$, $Y \subsetneqq X$ setzt man

$$V_x := \begin{cases} B_x(\tau') , & \text{falls } x \in Y \\ T \cup (X \setminus Y) , & \text{falls } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

und prüft sofort die Bedingung

$$x \in V_y \iff V_x \subset V_y \quad (x,y \in X)$$

aus Satz 1.2. nach: $\mathcal{M}(\tau') \cup \{T \cup (X \setminus Y)\}$ ist Minimalbasis einer Topologie auf X .
Umgekehrt sei $\tau \in \mathcal{A}(X)$ und $B_x(\tau)$ ein maximales Element in $\mathcal{M}(\tau)$. Wiederum ergibt 1.2., daß $\mathcal{M}(\tau) \setminus \{B_x(\tau)\}$ Minimalbasis einer Topologie τ' auf geeignetem $Y \subsetneqq X$ ist.

Mit (*) folgt $\tau' = \tau_Y$, also $T = B_x(\tau) \cap Y \in \tau'$, $B_x(\tau) = T \cup (X \setminus Y)$.

2. Anzahlformeln

Es bezeichne $A(N)$ die Anzahl aller, $Z(N)$ die der zusammenhängenden Topologien auf der N-elementigen Menge X . Entsprechend sei $A_i(N)$ $(Z_i(N))$ die Anzahl der (zusammenhängenden) Topologien auf X , welche das T_i-Axiom erfüllen ($i = 0,\dots,4$).
Damit ergibt sich für jedes N aus der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die folgende Tabelle:

$$\begin{array}{cccccc} A(N) & A_0(N) & A_1(N) & A_2(N) & A_3(N) & A_4(N) \\ Z(N) & Z_0(N) & Z_1(N) & Z_2(N) & Z_3(N) & Z_4(N) \end{array}$$

Einige dieser Größen lassen sich aufgrund der bisherigen Ergebnisse sofort angeben:

SATZ 2.1. Für $N = 0$ und $N = 1$ sind alle zwölf Größen gleich 1 .
Für $N > 1$ gilt:

a) $A_1(N) = A_2(N) = Z_3(N) = 1$

b) $Z_1(N) = Z_2(N) = 0$

c) $A_3(N)$ ist die Anzahl $S(N)$ der Partitionen von X .

Die Tabelle reduziert sich damit für $N > 1$ folgendermaßen:

$A(N)$	$A_o(N)$	1	1	$S(N)$	$A_4(N)$
$Z(N)$	$Z_o(N)$	0	0	1	$Z_4(N)$

$S(n,N)$ sei definiert durch die Polynomidentität

$$\prod_{i=o}^{N-1}(x-i) = \sum_{n=1}^{N} S(n,N)x^n .$$

$P(n,N)$ sei die Anzahl der Partitionen einer N-elementigen Menge in n nichtleere Teilmengen. Die Zahlen $S(n,N)$ bzw. $P(n,N)$ sind bekannt als Stirlingsche Zahlen erster bzw. zweiter Art (vgl. [1]) . Es gelten die Rekursionsformeln

$$S(1,N) = (-1)^{N-1}(N-1)! \ , \ S(N,N) = 1 \ ,$$
$$S(n+1,N+1) = S(n,N) - N\cdot S(n+1,N) \ ;$$
$$P(1,N) = P(N,N) = 1 \ ,$$
$$P(n+1,N+1) = P(n,N) + (n+1)P(n+1,N) \ ;$$

weiter hat man die explizite Formel

$$P(n,N) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\cdot k^N .$$

SATZ 2.2. $A(N) = \sum_{n=1}^{N} P(n,N)A_o(n) \ , \quad A_o(N) = \sum_{n=1}^{N} S(n,N)A(n),$

$$Z(N) = \sum_{n=1}^{N} P(n,N)Z_o(n) \ , \quad Z_o(N) = \sum_{n=1}^{N} S(n,N)Z(n),$$

$$S(N) = \sum_{n=1}^{N} P(n,N) = \sum_{k=1}^{N}\frac{k^N}{k!}\sum_{n=o}^{N-k}\frac{(-1)^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=o}^{N-1}\binom{N-1}{n} S(n) .$$

Die erste Formel findet man bereits in [3] und [4]. Die Identitäten für $Z(N)$ und $S(N)$ ergeben sich völlig analog. Zum Beweis der Umkehrformeln siehe [1] .

Aus Satz 1.5. folgt unmittelbar

SATZ 2.3. Sei $Z_{o4}(N)$ die Anzahl der zusammenhängenden T_o-T_4-Topologien auf einer N-elementigen Menge ($N \in \mathbb{N}$) . Dann gilt

$$Z_{o4}(N) = N \cdot A_o(N-1),$$
$$Z_4(N) = \sum_{n=o}^{N-1}\binom{N}{n}\cdot A(n).$$

Zwischen den formalen Potenzreihen

$$z_4(x) = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{Z_4(n)}{n!}\cdot x^n \quad \text{und} \quad a(x) = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{A(n)}{n!}\cdot x^n$$

besteht also die Funktionalgleichung

$$z_4(x) = a(x)\cdot(e^x - 1) + 1 .$$

SATZ 2.4. $A(N) = N! \cdot \sum \prod_{k=1}^{N}\frac{1}{j_k!}\left(\frac{Z(k)}{k!}\right)^{j_k}$,

wobei die Summation über alle N-Tupel $(j_1,\dots,j_N) \in \mathbb{N}_o$ mit

$\sum_{k=1}^{N} k\cdot j_k = N$ zu erstrecken ist. Zwischen den formalen Potenzreihen

$a(x)$ und $z(x) = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{Z(n)}{n!}\cdot x^n$ besteht der Zusammenhang $a(x) = e^{z(x)-1}$, $z(x) = \ln a(x) + 1$.

<u>Die zweite Beziehung liefert</u>

$$Z(N) = N! \sum_{r=1}^{N} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} \sum_{k_1+\dots k_r=N} \prod_{i=1}^{r} \frac{A(k_i)}{k_i!}$$

<u>In analoger Weise gehen $A_o(N)$ und $Z_o(N)$ bzw. $A_4(N)$ und $Z_4(N)$ auseinander hervor.</u>

<u>Beweis:</u> Die Zusammenhangskomponenten einer Topologie auf X bilden eine Partition von X . Nach Satz 1.6. erhält man genau alle Minimalbasen von Topologien auf X , welche die Zusammenhangskomponenten $C_1,\dots,C_r$ besitzen, indem man die Minimalbasen aller zusammenhängenden Topologien auf den einzelnen C_j beliebig kombiniert und dann deren Vereinigung bildet. Hat man dabei j_k Zusammenhangskomponenten mit k Elementen, so ergeben sich $Z(1)^{j_1}\cdot\ldots\cdot Z(N)^{j_N}$ Möglichkeiten. Weiter gibt es

$$p(j_1,\dots,j_N) = N! \cdot \left(\prod_{k=1}^{N} (k!)^{j_k} \cdot j_k!\right)^{-1}$$

Partitionen von X mit j_k Teilmengen zu k Elementen. Summation über alle Partitionen liefert die behauptete Gleichung. Die Aussagen über die Potenzreihen erhält man in üblicher Weise durch Koeffizientenvergleich. Beim Nachweis der analogen Beziehungen für $A_o(N)$ und $Z_o(N)$ bzw. $A_4(N)$ und $Z_4(N)$ beachte man lediglich Satz 1.6.c) .

Hat man also eine der vier Größen $A(n)$, $A_o(n)$, $Z(n)$, $Z_o(n)$ für $n \leq N$ berechnet, so lassen sich die übrigen drei für $n \leq N$ daraus herleiten, $Z_4(n)$ und $A_4(n)$ sogar für $n \leq N+1$.

$$\begin{tikzcd}
A_o(N) \arrow[r, leftrightarrow, "S.2.2."] \arrow[d, leftrightarrow, "S.2.4."'] & A(N) \arrow[d, leftrightarrow, "S.2.4."'] \arrow[dr, "S.2.3."] & A_4(N) \arrow[d, leftrightarrow, "S.2.4."] \\
Z_o(N) \arrow[r, leftrightarrow, "S.2.2."] & Z(N) & Z_4(N)
\end{tikzcd}$$

Jedoch ist anscheinend keine für beliebige N leicht auswertbare Formel (eventuell rekursiv) für $A_o(N)$ oder eine der anderen fünf hier zur Diskussion stehenden Größen bekannt. Eine explizite, aber zur numerischen Auswertung ungeeignete Formel für A(N) wird im nächsten Abschnitt angegeben.

<u>3. Darstellungsmatrizen endlicher Topologien</u>

Es sei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}^{n,m}$ der Ring der $n \times m$ - Matrizen über $\mathbb{Z}$. M_{nm} sei die Teilmenge der Matrizen aus $\mathbb{Z}^{n,m}$, deren Koeffizienten nur die Werte 0 und 1 annehmen. $I = I_{nm}$ sei die Matrix aus M_{nm} , deren sämtliche Koeffizienten gleich 1 sind, $E = E_n$ die n-reihige Einheitsmatrix aus M_{nn} : $E_n = (\delta_{ij})$. Dabei ist

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases} \quad \text{das Kroneckersymbol.}$$

$s : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}$ sei definiert durch $s(a) = 0 \iff a = 0$.
Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n,m}$ sei $S(A) := (s(a_{ij})) \in M_{nm}$,

$$|A| := \sum_{i,j} s(a_{ij}) \in \mathbb{Z} .$$

Auf M_{nm} definieren wir zwei Verknüpfungen $\sqcap$, $\sqcup$:
Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{nm}$ sei

$$A \sqcap B := (a_{ij} \cdot b_{ij}) \in M_{nm} ,$$

$$A \sqcup B := A + B - A \sqcap B = S(A + B) \in M_{nm} .$$

$$A \sqsubset B : \iff A \sqcap B = A$$

definiert eine Halbordnung (d.h. eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation) $\sqsubset$ auf M_{nm} . M_{nm} wird durch $\sqsubset$ zu einem Booleschen Verband: $A \sqcap B$ ist das Infimum,

$A \sqcup B$ das Supremum von A und B;

$\bar{A} := I_{nm} - A$ ist das Komplement von A $(A,B \in M_{nm})$.

$\sqsubset$ läßt sich zu einer Quasiordnung auf ganz $\mathbb{Z}^{n,m}$ fortsetzen vermöge

$$A \sqsubset B \;:\iff\; S(A) \sqsubset S(B)\,.$$ Wir setzen für $A,B \in \mathbb{Z}^{n,m}$

$$A \sqcap B := S(A) \sqcap S(B)\;,\quad A \sqcup B := S(A) \sqcup S(B).$$ Durch

$$A \sim B \;:\iff\; A \sqsubset B \text{ und } B \sqsubset A \iff S(A) = S(B)$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}^{n,m}$ definiert. Für $A \in \mathbb{Z}^{n,m}$ setzen wir $\bar{A} := I_{nm} - S(A) \in M_{nm}$. Mit A^t bezeichnen wir die Transponierte von A . Dann gilt

$$A \sqsubset B \iff A \sqcap \bar{B} = 0 \iff \text{Spur } A^t\bar{B} = 0 \iff \text{Spur } \bar{B}A^t = 0$$

$$\text{Spur } A\bar{B}^t = 0 \iff \bar{B} \sqsubset \bar{A}\,.$$

Folgende Teilmengen von M_{NN} sind für die Untersuchung endlicher Topologien von besonderem Interesse:

$\mathfrak{A}(N) := \{D \in M_{NN} : E \sqsubset D,\ D^2 \sqsubset D\}$;

$\mathfrak{A}_o(N) := \{D \in \mathfrak{A}(N) : D \sqcap D^t = E\}$;

$\mathcal{B}(N) := \{D \in \mathfrak{A}(N) : D = (d_{ij})\ ,\ d_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$;

$\mathcal{L}(k_1,\dots,k_r) := \{D \in \mathcal{B}(N) : D = (D_{ij})\ ,\ D_{ij} \in M_{k_ik_j}$,
$D_{ij} = 0$ für $i > j$, $D_{ii} = E_{k_i}$, alle
Spalten von $D_{i,i+1}$ sind für $1 \le i < r$
vom Nullvektor verschieden$\}$ $(k_i \in \mathbb{N})$

$\mathcal{D}(N) := \bigcup \{\mathcal{L}(k_1,\dots,k_r) : k_1+\dots+k_r = N\}$.

Man hat also nach Definition

$$\mathcal{D}(N) \subset \mathcal{B}(N) \subset \mathfrak{A}_o(N) \subset \mathfrak{A}(N) \subset M_{NN}\,.$$

$\mathfrak{A}(N)$ ist bezüglich $\sqsubset$ ebenfalls ein Verband, jedoch ist das Supremum in $\mathfrak{A}(N)$ gegeben durch

$$A \triangledown B := S((A+B)^N) \quad (A,B \in \mathfrak{A}(N))\,,$$

wie eine leichte Rechnung zeigt.
Mit S_N bezeichnen wir die Menge der Permutationsmatrizen aus M_{NN} und nennen zwei Matrizen $A,B \in M_{NN}$ ähnlich, wenn es ein $P \in S_N$ gibt mit

$$P^tAP = B\,.$$

Gibt man eine bestimmte Reihenfolge $x_1,\dots,x_N$ der Elemente von X vor (d.h. eine Abbildung : $\Psi : \{1,\dots,N\} \longrightarrow X$, $\Psi(i) = x_i$, $1 \le i \le N$) , so läßt sich für jede Topologie $\tau \in A(X)$ eine Darstellungsmatrix $D_\tau = (d_{ij}) \in M_{NN}$ vermöge

$$d_{ij} = 1 \iff x_i \in B_{x_j}(\tau)$$

definieren. Bei verschiedener Wahl der Reihenfolge erhält man ähnliche Darstellungsmatrizen.

Nach H. SHARP ([8]) gilt der

SATZ 3.1. *Die Abbildung $f_\Psi : \tau \longmapsto D_\tau$ ist eine Bijektion zwischen $A(X)$ und $\mathfrak{A}(N)$. Den T_o-Topologien entsprechen unter der Abbildung f_Ψ die Matrizen aus $\mathfrak{A}_o(N)$, den symmetrischen Topologien die symmetrischen Matrizen aus $\mathfrak{A}(N)$. Genauer gilt $D_{\tau*} = (D_\tau)^t$. Zwei Topologien τ und τ' aus $A(X)$ sind genau dann homöomorph, wenn die Darstellungsmatrizen D_τ und $D_{\tau'}$ ähnlich sind. $\tau \in A(X)$ ist genau dann unzusammenhängend, wenn D_τ einer Kästchenmatrix der Form $\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$, $D_1 \in \mathfrak{A}(k)$, $D_2 \in \mathfrak{A}(N-k)$, $1 \le k < N$, ähnlich ist.*

Darüberhinaus hat man

SATZ 3.2. *f_Ψ ist ein Verbands-Anti-Isomorphismus: Für $\tau,\tau' \in A(X)$ gilt*

$$\tau \subset \tau' \iff D_{\tau'} \sqsubset D_\tau \quad ,$$

$$D_{\tau\cap\tau'} = D_\tau \triangledown D_{\tau'} \;, \; D_{\tau\nabla\tau'} = D_\tau \sqcap D_{\tau'},$$

insbesondere ist $D_{B(\tau)} = D_\tau \sqcap D_\tau{}^t$.

Beweis: Nach Satz 1.2. und Definition von D_τ gilt

$D_{\tau\nabla\tau'} = D_\tau \sqcap D_{\tau'}$ für $\tau,\tau' \varepsilon A(X)$, also

$$\tau \subset \tau' \iff \tau \nabla \tau' = \tau \iff D_\tau \sqcap D_{\tau'} = D_{\tau'},$$

$$\iff D_{\tau'} \sqsubset D_\tau \; .$$

SATZ 3.3. Definiert man ein Polynom f_N in N^2-N Unbestimmten t_{ij} , $i \neq j$, $i,j \leq N$, $(N > 1)$, durch

$f_N(t_{ij}) :=$

$$f_N(t_{12},\dots,t_{N,N-1}) := \prod_{\substack{i\neq j\neq k\neq i \\ i,j,k\leq N}} (1-t_{ij}t_{jk}(1-t_{ik})),$$

so gilt für eine Matrix $D = (d_{ij}) \varepsilon M_{NN}$ mit $E \sqsubset D$:

$$D \;\varepsilon\; \mathfrak{A}(N) \iff f_N(d_{ij}) = 1 \;,$$

$$D \notin \mathfrak{A}(N) \iff f_N(d_{ij}) = 0 \;.$$

Folglich

$$A(N) = |\mathfrak{A}(N)| = \sum_{\substack{d_{ij}\varepsilon\{0,1\} \\ i\neq j;i,j\leq N}} f_N(d_{ij}) \;.$$

Beweis: Sei $D = (d_{ij})$, $E \sqsubset D$.

$f_N(d_{ij}) = 1 \iff$ für alle i,j,k mit $i \neq j \neq k \neq i$ gilt $d_{ij} = 0$ oder $d_{jk} = 0$ oder $d_{ik} = 1$

$\iff$ für alle $i \neq k$ gilt $\sum\limits_{j\neq k,i} d_{ij}d_{jk} = 0$ oder $d_{ik} = 1$

$\iff$ für alle i,k gilt $\sum\limits_{j} d_{ij}d_{jk} = 0$ oder $d_{ik} = 1$

$\iff D^2 \sqsubset D$.

Wegen Bild $f_N \subset \{0,1\}$ folgt $f_N(d_{ij}) = 0 \iff D^2 \not\sqsubset D$.

Eine Bijektion $\Psi : \{1,\dots,N\} \longrightarrow X$ induziert eine Bijektion $\tilde{\Psi} : M_{1N} \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$ vermöge

$$\tilde{\Psi}((y_1,\dots,y_N)) := \{\Psi(i) : y_i = 1, \; 1 \leq i \leq N\} \; .$$

Offenbar ist für $D_\tau = (d_1,\dots,d_N) = f_\Psi(\tau)$ $\quad (d_i \;\varepsilon\; M_{N1})$

$$\mathcal{M}(\tau) = \{\tilde{\Psi}(d_i{}^t) : 1 \leq i \leq N\} \quad (\tau \;\varepsilon\; A(X)).$$

Der Abschlußoperator C_τ (siehe Satz 1.1.) läßt sich mit Hilfe der Abbildung

$$h_D : M_{1N} \longrightarrow M_{1N}, \; h_D(d) = S(d\cdot D) \qquad (d \;\varepsilon\; M_{1N}, \; D \;\varepsilon\; M_{NN})$$

und der Darstellungsmatrizen folgendermaßen beschreiben:

SATZ 3.4. Für $\tau \;\varepsilon\; A(X)$ sei $D = (d_{ij}) = f_\Psi(\tau)$ eine Darstellungsmatrix aus $\mathfrak{A}(N)$. Dann gilt

$$d_{ij} = 1 \iff \Psi(j) \;\varepsilon\; C_\tau(\{\Psi(i)\}) \; .$$

Das folgende Diagramm ist kommutativ :

$$\begin{tikzcd} M_{1N} \arrow[r, "h_D"] \arrow[d, "\tilde{\Psi}"] & M_{1N} \arrow[d, "\tilde{\Psi}"] \\ \mathfrak{P}(X) \arrow[r, "C_\tau"] & \mathfrak{P}(X) \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist h_D wie C_τ eine Projektion:

$h_D \cdot h_D = h_D$,

und es gilt für $d \in M_{1N}$, $A = \tilde{\Psi}(d) \subset X$:

$$A \in \tau \iff d \cdot D^t \sqsubset d \, .$$

Auf den einfachen Beweis soll hier verzichtet werden.

Die Topologie τ erhält man also aus der Darstellungsmatrix D_τ in folgender Weise zurück:

$$\tau = \{\tilde{\Psi}(d) : d \in h_{D_\tau^t}(M_{1N})\} \, .$$

Die Darstellungsmatrix einer induzierten Topologie gewinnt man durch die folgende Konstruktion:
Für $d = (d_1,\dots,d_N) \in M_{1N}$, $d \neq 0$, sei

$$K_d := \{i \leq N : d_i = 1\} = \{i_1,\dots,i_k\},\ i_1<\dots<i_k \, .$$

Zu $D = (d_{ij}) \in M_{NN}$ definiere man

$$D_d := (d_{i_r i_s})_{1\leq r,s\leq k} \in M_{kk} \, .$$

D_d entsteht also aus D durch Streichen derjenigen Zeilen und Spalten, für welche die entsprechende Komponente von d gleich 0 ist.

SATZ 3.5. Sei $\tau \in \mathfrak{A}(X)$, $\emptyset \neq Y \subset X = \{x_1,\dots,x_N\}$,
$Y = \{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\}$, $\Psi(i) = x_i$ $(1 \leq i \leq N)$,
$\varphi(r) = x_{i_r}$ $(1 \leq r \leq k)$.

Eine Darstellungsmatrix von τ_Y erhält man durch

$$f_\varphi(\tau_Y) = (f_\Psi(\tau))_d \text{ , wobei } d = \Psi^{-1}(Y) \, .$$

Insbesondere liegt für $D \in \mathfrak{A}(N)$ $(\mathfrak{A}_0(N))$ und $d \in M_{1N}$, $|d| = k$, die Matrix D_d in $\mathfrak{A}(k)$ $(\mathfrak{A}_0(k))$.

Beweis: Sei $f_\Psi(\tau) = (d_{ij})$, $(f_\Psi(\tau))_d = (d_{i_r i_s})$,
$f_\varphi(\tau_Y) = (d'_{rs})$:

$$d_{i_r i_s} = 1 \iff \Psi(i_r) \in B_{\Psi(i_s)}(\tau) \iff \varphi(r) \in B_{\varphi(s)}(\tau)$$
$$\iff \varphi(r) \in B_{\varphi(s)}(\tau) \cap Y = B_{\varphi(s)}(\tau_Y) \iff d'_{rs} = 1 \, .$$

($\varphi(r) \in Y$ gilt nach Definition).

Die von einer Teilmenge $\mathfrak{G}$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ erzeugte Topologie $\langle \mathfrak{G} \rangle$ läßt sich mit Hilfe der Darstellungsmatrizen ebenfalls leicht bestimmen:
Sei $\mathfrak{G} = \{Q_1,\dots,Q_r\} \subset \mathfrak{P}(X)$, und

$$\Phi(\mathfrak{G}) := \overline{AA^t} \in M_{NN}, \text{ wobei } A = (\tilde{\Psi}^{-1}(Q_1)^t,\dots,\tilde{\Psi}^{-1}(Q_r)^t) \in M_{Nr} .$$

Diese Abbildung hängt nicht von der gewählten Reihenfolge der Elemente von $\mathfrak{G}$ ab (und die Q_i sind nicht notwendig verschieden) :
Ist π eine Permutation der Zahlen $1,\dots,r$, so gibt es zu $B = (\tilde{\Psi}^{-1}(Q_{\pi(1)})^t,\dots,\tilde{\Psi}^{-1}(Q_{\pi(r)})^t)$ eine Permutationsmatrix $P \in S_r$ mit $B = AP$, also ist
$\overline{BB^t} = \overline{AP(AP)^t} = \overline{APP^tA^t} = \overline{AA^t}$.

SATZ 3.6. a) Für $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{P}(X)$ ist die Matrix $\Phi(\mathfrak{G}) \in M_{NN}$ Darstellungsmatrix der von $\mathfrak{G}$ erzeugten Topologie:

$$f_\Psi(\langle \mathfrak{G} \rangle) = \Phi(\mathfrak{G}) \, .$$

Das folgende Diagramm ist also kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X)) \arrow[r, "\langle\ \rangle"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathfrak{P}(X) \arrow[dl, "f_\Psi"] \\ M_{NN} & \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $\Phi|_{\mathcal{A}(X)} = f_\Psi$.

b) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ hat man eine Abbildung

$$\tau_r : M_{Nr} \longrightarrow \mathfrak{A}(N)$$
$$A \longmapsto \overline{\overline{A}A^t} .$$

c) τ_N ist eine Projektion von M_{NN} auf $\mathfrak{A}(N)$:

$$\tau_N \circ \tau_N = \tau_N \ , \ \tau_N(A) = A \iff A \in \mathfrak{A}(N) .$$

Für $E_N \sqsubset A$ gilt $\tau_N(A) \sqsubset A$.

Beweis: a) Sei $\mathcal{G} = \{Q_1,\dots,Q_r\} \subset \mathfrak{P}(X)$, $\tau \in \mathcal{A}(X)$.

Nach Satz 3.4. gilt für $d_i = \tilde{\Psi}^{-1}(Q_i)$ $(1 \leq i \leq r)$:

$Q_i \in \tau \iff f_\Psi(\tau) \cdot d_i^{\,t} \sqsubset d_i^{\,t}$, also für $A=(d_1^{\,t},\dots,d_r^{\,t})$:

$\mathcal{G} \subset \tau \iff f_\Psi(\tau) \cdot A \sqsubset A \iff$

$\mathrm{Spur}(A^t \cdot f_\Psi(\tau)^t \cdot \overline{A}) = \mathrm{Spur}(f_\Psi(\tau)^t \cdot \overline{A} \cdot A^t) = 0$

$\iff f_\Psi(\tau) \sqsubset \overline{\overline{A}A^t} = \Phi(\mathcal{G})$.

Weiter gilt $f_\Psi(\langle\mathcal{G}\rangle) = f_\Psi(\bigcap\{\tau \in \mathcal{A}(X) : \mathcal{G} \subset \tau\})$

$= \sqcap\{f_\Psi(\tau) : \tau \in \mathcal{A}(X) \ , \ f_\Psi(\tau) \sqsubset \Phi(\mathcal{G})\}$

$= \sqcap\{D \in \mathfrak{A}(N) : D \sqsubset \Phi(\mathcal{G})\}$.

Zum Nachweis von $f_\Psi(\langle\mathcal{G}\rangle) = \Phi(\mathcal{G})$ bleibt also nur noch $\overline{\overline{A}A^t} \in \mathfrak{A}(N)$ zu zeigen.

b) Sei $A = (a_{ij}) \in M_{Nr}$, $D = (d_{ij}) = \tau_r(A) = \overline{\overline{A}A^t} \in M_{NN}$.

Dann gilt

$d_{ij} = 1 \iff \sum\limits_{k=1}^{r} a_{jk}(1 - a_{ik}) = 0 \iff$

$a_{jk} = 0$ oder $a_{ik} = 1$ für $1 \leq k \leq r$.

Also $d_{ii} = 1$, und $(d_{ij} = d_{jl} = 1 \Longrightarrow d_{il} = 1)$:

$$E \sqsubset D \text{ und } D^2 \sqsubset D \text{ , d.h. } D \in \mathfrak{A}(N) .$$

c) Sei $E_N \sqsubset A \in M_{NN} \Longrightarrow E_N \sqsubset A^t \Longrightarrow \overline{A} \sqsubset \overline{A}A^t$

$\Longrightarrow \tau_N(A) \sqsubset A$. $A \in \mathfrak{A}(N) \Longrightarrow \mathrm{Spur}\, A^2\overline{A}^t = 0$

$\Longrightarrow A^t \sqcap A\overline{A}^t = 0 \Longrightarrow A\overline{A}^t \sqsubset \overline{A}^t \Longrightarrow \overline{A}A^t \sqsubset \overline{A}$

$\Longrightarrow A \sqsubset \tau_N(A)$. Wegen $E_N \sqsubset A$ ist dann bereits $A = \tau_N(A)$

Ohne Beweis sei erwähnt, daß τ_1 eine Bijektion zwischen $M_{1N} \setminus \{0\}$ und $\{D \in \mathfrak{A}(N) : \overline{D}^2 = 0\}$ induziert.

Wie man sofort nachrechnet, sind die folgenden Bedingungen für $D \in \mathfrak{A}(N)$, $d \in M_{N1}$ sämtlich äquivalent:

a) $D \cdot d \sqsubset d$ f) $D^t\overline{d} \sqsubset \overline{d}$

b) $D \cdot d \sim d$ g) $D^t\overline{d} \sim \overline{d}$

c) $\overline{d}^t D d = 0$ h) $\overline{d}^t \in h_D(M_{1N})$

d) $\mathrm{Spur}(D \cdot d\overline{d}^t) = 0$ i) $d^t \in h_{D^t}(M_{1N})$

e) $D \sqsubset \overline{\overline{d}d^t} = \tau_1(d)$ j) $\begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(N+1)$

k) $\begin{pmatrix} 1 & \overline{d}^t \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(N+1)$

Insbesondere erhält man hieraus die Formeln

$$\mathfrak{A}(N+1) = \left\{\begin{pmatrix} D & S(D \cdot d) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{N+1,N+1} : D \in \mathfrak{A}(N) \ , \ d \in M_{N1}\right\} ,$$

$$B(N+1) := |\mathcal{B}(N+1)| = \sum_{D \in \mathcal{B}(N)} |h_D(M_{1N})|$$

$$= \sum_{d \in M_{N1}} |\{D \in \mathcal{B}(N) : D \sqsubset \tau_1(d)\}|$$

Sie entsprechen im Wesentlichen der Rekursion aus Satz 1.8.

Nach einem Theorem von H. Sharp ([8]) liegt die Darstellungsmatrix D_τ einer T_o-Topologie $\tau \in \mathcal{A}(X)$ bei geeigneter Reihenfolge der Elemente von X in $\mathcal{A}_o(N)$. Daß man sogar $D_\tau \in \mathcal{D}(N)$ erreichen kann, zeigt die folgende Konstruktion: Sei $\mathcal{A}_o(X)$ die Menge der T_o-Topologien auf X.

Für $\tau \in A_o(X)$ definiere man $m(\tau) := \{x \in X : \{x\} \in \tau\}$, und eine <u>geordnete</u> Partition $\gamma(\tau) = (X_1,\ldots,X_r)$ von X durch die induktive Festlegung

$$X_i = m(\tau_{Y_i}) \ , \ Y_i = X \setminus \{X_j : j < i\} \ .$$

Das Verfahren bricht ab, sobald $Y_i = \emptyset$. Es ist dann $r = i-1$, $X_j \cap X_k = \emptyset$ für $j \neq k$, und $X = \bigcup\{X_i : 1 \leq i \leq r\}$.

Wählt man nun eine Reihenfolge $x_1 = \Psi(1),\ldots,$ $x_N = \Psi(N)$ und eine geordnete Partition $\gamma = (X_1,\ldots,X_r)$ der Elemente von X derart, daß

$$(*) \quad X_i = \{x_{l_{i-1}+1},\ldots,x_{l_i}\} \ , \text{ wobei } l_i = \sum_{j \leq i} k_j \ , \ k_j = |X_j| ,$$

$$1 \leq i,j \leq r \ ,$$

so verifiziert man ohne Schwierigkeiten (z.B. durch Induktion nach r unter Verwendung von Satz 3.5), daß die Darstellungsmatrix $f_\Psi(\tau) = D_\tau$ genau dann in $\mathcal{L}(k_1,\ldots,k_r) \subset \mathcal{D}(N)$ liegt, wenn $\gamma(\tau) = \gamma$ gilt.

<u>SATZ 3.7.</u> a) <u>Für eine geordnete Partition</u> $\gamma = (X_1,\ldots,X_r)$ <u>von</u> X <u>mit</u> $|X_j| = k_j$ $(1 \leq j \leq r)$ <u>sei</u>

$$\mathcal{G}(X,\gamma) := \{\tau \in A_o(X) : \gamma(\tau) = \gamma\} \ .$$

<u>Dann gilt</u> $|\mathcal{G}(X,\gamma)| = C(k_1,\ldots,k_r) = |\mathcal{L}(k_1,\ldots,k_r)|$

b) $A_o(X)$ <u>ist disjunkte Vereinigung der Mengen</u> $\mathcal{G}(X,\gamma)$, <u>wobei</u> γ <u>alle geordneten Partitionen von</u> X <u>durchläuft</u>. <u>Folglich</u>

$$A_o(N) = N! \sum \frac{C(k_1,\ldots,k_r)}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} \ ,$$

<u>Summation über alle</u> $k_i \in N$ <u>mit</u> $\sum_{i=1}^{r} k_i = \mathbb{N}$.

Die Berechnung von $A_o(N)$ ist nunmehr auf die der Zahlen $C(k_1,\ldots,k_r)$ zurückgeführt. In einigen Spezialfällen lassen sich für diese Zahlen geschlossene Formeln angeben. Jedoch ist zum Beispiel die Formel für $C(k_1,k_2,k_3)$ bereits so kompliziert, daß die Suche nach einer allgemeingültigen, leicht auswertbaren Gleichung für $C(k_1,\ldots,k_r)$ ziemlich aussichtslos erscheint.

Im folgenden sind einige der einfacheren Formeln ohne Beweis zusammengstellt:

$$C(k_1) = 1 \ , \ C(k_1,k_2) = (2^{k_1}-1)^{k_2} \ ,$$

$$C(k_1,k_2,1) = \sum_{n=1}^{k_1} \binom{k_1}{n} \cdot \left(2^{k_1} + 2^n - 2\right)^{k_2} - \left(2^{k_1} - 1\right)^{k_2+1} \ ,$$

$$C(k_1,\underbrace{1,\ldots,1}_{j},k_2) = (2^{k_2} + j)^{k_1} - (2^{k_2} + j - 1)^{k_1} \ ,$$

$$C(1,\ldots,1,k_1,\ldots,k_r) = C(k_1,\ldots,k_r) \ .$$

A. Shafaat ([7]) erhält die Zerlegungsformel für $A_o(N)$ mit Hilfe der Zahlen $C(k_1,\dots,k_r)$ auf etwas andere Weise ohne Verwendung von Matrizen. Zwei der Formeln in [7] sind jedoch fehlerhaft. Folglich stimmen auch die von Shafaat berechneten Werte $A(5) = 7181$ und $A(6) = 145807$ nicht.

Tabelle der Koeffizienten $C(k_1,\dots,k_r)$ für $N \leq 7$:

$N = 3$:
$C(2,1) = 3$;

$N = 4$:
$C(3,1) = 7$; $C(2,2) = 9$; $C(2,1,1) = 5$;

$N = 5$:
$C(4,1) = 15$; $C(3,2) = 49$; $C(2,3) = 27$;
$C(3,1,1) = 19$; $C(2,2,1) = 41$; $C(2,1,2) = 9$;
$C(2,1,1,1) = 7$;

$N = 6$:
$C(5,1) = 31$; $C(4,2) = 225$; $C(3,3) = 343$;
$C(2,4) = 81$; $C(4,1,1) = 65$; $C(3,2,1) = 345$;
$C(2,3,1) = 263$; $C(3,1,2) = 61$; $C(2,2,2) = 195$;
$C(2,1,3) = 17$; $C(3,1,1,1) = 37$; $C(2,2,1,1) = 89$;
$C(2,1,2,1) = 37$; $C(2,1,1,2) = 11$; $C(2,1,1,1,1) = 9$;

$N = 7$:
$C(6,1) = 63$; $C(5,2) = 961$; $C(4,3) = 3375$;
$C(3,4) = 2401$; $C(2,5) = 243$; $C(5,1,1) = 211$;
$C(4,2,1) = 2429$; $C(3,3,1) = 4879$; $C(2,4,1) = 1565$;
$C(4,1,2) = 369$; $C(3,2,2) = 2673$; $C(2,3,2) = 2637$;
$C(3,1,3) = 217$; $C(2,2,3) = 965$; $C(2,1,4) = 33$;
$C(4,1,1,1) = 175$; $C(3,2,1,1) = 995$; $C(2,3,1,1) = 889$;
$C(3,1,2,1) = 345$; $C(2,2,2,1) = 1145$; $C(2,1,3,1) = 157$;
$C(3,1,1,2) = 91$; $C(2,2,1,2) = 225$; $C(2,1,2,2) = 163$;
$C(2,1,2,1,1) = 77$; $C(2,1,1,2,1) = 43$; $C(2,1,1,1,2) = 13$;
$C(2,1,1,1,1,1) = 11$;

E3

Eine numerische Auswertung der bisher bewiesenen Formeln für $N \leq 9$ liefert die folgende Tabelle:

A798 1035 6056 6057

N	A(N)	$A_o(N)$	$A_4(N)$	$A_{o4}(N)$
1	1	1	1	1
2	4	3	4	3
3	29	19	26	16
4	355	219	255	137
5	6942	4231	3642	1826
6	209527	130023	75606	37777
7	9535341	6129859	2316169	1214256
8	642779354	431723379	106289210	60075185
9	63260289423	44511042511	7321773414	4484316358

N	Z(N)	$Z_o(N)$	$Z_4(N)$	$Z_{o4}(N)$	S(N)
1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	2
3	19	12	16	9	5
4	233	146	145	76	15
5	4851	3060	2111	1095	52
6	158175	101642	47624	25386	203
7	7724333	5106612	1626003	910161	877
8	550898367	377403266	82564031	49038872	4140
9	56536880923	40299722580	6146805142	3885510411	21147

1929 1927 6058 6059 110

(newer) (more)

4. Asymptotische Aussagen

Eine recht gute untere Schranke für $D(N)$ (und damit für $B(N)$, $A_o(N)$ und $A(N)$) erhält man sofort aus der bereits erwähnten Formel $C(k_1,k_2) = (2^{k_1}-1)^{k_2}$:

$$D(N) \geq \sum_{k=1}^{N-1} C(k,N-k) + 1 \geq 2^{\frac{1}{4}N^2} \quad .$$

Im folgenden sei $\mathrm{ld}\, x := \log_2 x$. Bezeichnet $\overline{A_o(N)}$ die Anzahl der Homöomorphieklassen von Topologien aus $\mathcal{A}_o(X)$, so gilt offenbar $A_o(N) \leq N! \cdot \overline{A_o(N)}$. Da jede Darstellungsmatrix aus $\mathfrak{A}_o(N)$ einer zweiten aus $\mathcal{D}(N)$ ähnlich ist (3.7.), hat man andererseits $\overline{A_o(N)} \leq D(N)$.

Mit $\mathrm{ld}(N!) \leq N \cdot \mathrm{ld}\, N$ ergibt sich

$$\tfrac{1}{4} N^2 \leq \mathrm{ld}\, D(N) \leq \mathrm{ld}\, A_o(N) \leq \mathrm{ld}\, \overline{A_o(N)} + N \cdot \mathrm{ld}\, N$$
$$\leq \mathrm{ld}\, D(N) + N \cdot \mathrm{ld}\, N \ ,$$

woraus unmittelbar die asymptotische Gleichheit der Größen $\mathrm{ld}\, D(N)$, $\mathrm{ld}\, B(N)$, $\mathrm{ld}\, A_o(N)$ und $\mathrm{ld}\, A_o(N)$ folgt, mit einem Restglied der Größenordnung $N \cdot \mathrm{ld}\, N$ (oder kleiner).

D. KLEITMAN und B. ROTHSCHILD ([5]) veröffentlichten 1970 den folgenden grundlegenden Satz:

$$\mathrm{ld}\, A_o(N) = \tfrac{1}{4} N^2 + O(N^{\frac{3}{2}} \mathrm{ld}\, N) \ .$$

Unter Verwendung der Darstellungsmatrizen kann man das Restglied noch wesentlich verbessern, wie nachfolgend gezeigt wird. Dazu sei

$$\mathfrak{U}(N) := \{D \in M_{NN} : D = (d_{ij}),\ d_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\} \ ,$$
$$\mathcal{L}'(N) := \{D \in \mathfrak{U}(N) : D^k \sqsubset D,\ k \geq 2\},\ B'(N) := |\mathcal{L}'(N)| \ ,$$
$$\mathfrak{h}'(N) := \{D \in \mathfrak{U}(N) : D^k \sqsubset \overline{D},\ k \geq 2\},\ H'(N) := |\mathfrak{h}'(N)| \ ,$$
$$\mathfrak{h}''(N) := \{D \in \mathfrak{U}(N) : D^2 \sqcap D = 0,\ D^3 \sqcap D = 0\} \ ,$$
$$H''(N) := |\mathfrak{h}''(N)| \ .$$

Offenbar ist $\mathfrak{h}'(N) \subset \mathfrak{h}''(N)$ (wegen $D^n = 0$ für $n \geq N$) .

SATZ 4.1. a) Die Abbildung $h : D \longmapsto D - E$ ist eine Bijektion zwischen $\mathcal{L}(N)$ und $\mathcal{L}'(N)$.

b) Die Abbildung $g : D \longmapsto D \sqcap \overline{D^2}$ ist eine Bijektion zwischen $\mathcal{L}'(N)$ und $\mathfrak{h}'(N)$ mit der Umkehrabbildung $A \longmapsto \hat{A} = A \sqcup \ldots \sqcup A^{N-1}$. Insbesondere gilt

$$B(N) = B'(N) = H'(N) \leq H''(N) \ .$$

Beweis: a) $(D-E)^2 \sqsubset D$ und $D - E \in \mathfrak{U}(N)$ impliziert $(D-E)^2 \sqsubset D - E$. Induktiv folgt $(D-E)^k \quad D - E$, $k \geq 2$ $D - E \in \mathcal{L}'(N)$. Umgekehrt gilt für $D \in \mathcal{L}'(N)$: $(D+E)^2 = D^2 + 2D + E \sqsubset D + E : D + E \in \mathcal{L}(N)$.

b) Nach Definition von g gilt für $D \in \mathcal{L}'(N) : g(D) \sqcap D^2 = 0$ und $g(D) \sqsubset D$; es folgt $g(D)^k \sqsubset D^k \sqsubset D^{k-1} \sqsubset \ldots \sqsubset D^2$, also $g(D) \sqcap g(D)^k = 0$ für $k \geq 2 : g(D) \in \mathfrak{h}'(N)$.
Setze $A := g(D) \sqsubset D$. Wegen $A^n = 0$ für $n \geq N$ gilt $A^k \sqsubset \hat{A}$ $(k \in \mathbb{N})$. Es folgt
$A^k \sqsubset D^k \sqsubset A^k \sqcup D^{k+1} \sqsubset \hat{A} \sqcup D^{k+1}$: Für $k = 1$ ist $A = g(D) \sqsubset D \sqsubset A \sqcup D^2$ wegen $D \sqcap \overline{D^2} = A$. Beim Schluß von k auf $k+1$ verifiziert man $A^{k+1} \sqsubset D^{k+1} \sqsubset (A^k \sqcup D^{k+1})(A \sqcup D^2)$ $\sqsubset A^{k+1} \sqcup D^{k+1}A \sqcup A^kD^2 \sqcup D^{k+3} \sqsubset A^{k+1} \sqcup D^{k+2} \sqcup D^{k+3} =$ $= A^{k+1} \sqcup D^{k+2}$, da $D^{k+3} \sqsubset D^{k+2}$.
Somit $D \sqsubset \hat{A} \sqcup D^2 \sqsubset \ldots \sqsubset \hat{A} \sqcup D^N = \hat{A}$ $(D^N = 0)$. Umgekehrt ist $A^k \sqsubset D^k \sqsubset \ldots \sqsubset D$ für $k \in \mathbb{N}_o$, also $\hat{A} \sqsubset D$. Insgesamt folgt $D = \widehat{g(D)}$.
Für $A \in \mathfrak{h}'(N)$ setze man $D = \hat{A}$:
Wegen $A^N = 0$ ist $\hat{A}^2 \sqsubset \hat{A}$ und damit $\hat{A} \in \mathcal{L}'(N)$. $A \sqsubset D$ gilt nach Definition, und $A \sqcap A^k = 0$ $(k \geq 2)$ liefert $A \sqcap \hat{A}^2 = A \sqcap D^2 = 0$: $A \sqsubset g(D)$. Für $k \geq 2$ ist weiter $A^k = A^{k-1} \cdot A \sqsubset \hat{A} \cdot \hat{A} = \hat{A}^2$, also $\hat{A} \sqsubset A \sqcup \hat{A}^2$ bzw. $g(D) = \hat{A} \sqcap \overline{\hat{A}^2} \sqsubset A$: Insgesamt $g(\hat{A}) = A$.

Unser Hauptergebnis ist nun

<u>SATZ 4.2.</u> $\frac{1}{4}N^2 \leq \mathrm{ld}\, B(N) \leq \mathrm{ld}\, H''(N) \leq \frac{1}{4}N^2 + 2N\cdot \mathrm{ld}^2 N$.

<u>Folglich</u>

$$\tfrac{1}{4}N^2 \leq \mathrm{ld}\, A_o(N) \leq \tfrac{1}{4}N^2 + 3N\cdot \mathrm{ld}^2 N \ .$$

Nur die Ungleichung

$$\mathrm{ld}\, H''(N) \leq \tfrac{1}{4}N^2 + 2N\cdot \mathrm{ld}^2 N$$

ist noch zu zeigen. Wir gliedern den Beweis in mehrere Lemmata auf:

Eine leichte Rechnung ergibt zunächst

<u>LEMMA 1:</u> <u>Sei</u> $D' = \begin{pmatrix} D & d \\ o & o \end{pmatrix} \varepsilon\, M_{N+1,N+1}$, $D \,\varepsilon\, M_{NN}$, $d \,\varepsilon\, M_{N1}$.

<u>Dann gilt</u>

$$D' \,\varepsilon\, \mathfrak{H}''(N+1) \iff \begin{array}{l} 1)\ D \,\varepsilon\, \mathfrak{H}''(N), \\ 2)\ d \sqcap (D+D^t)d = 0 \\ 3)\ D^t d \sqcap Dd = 0 \ . \end{array}$$

Für das Weitere benötigt man noch die folgenden Definitionen:

Sei $k = 2k' \leq \frac{1}{2}N$ $(k' \,\varepsilon\, \mathbb{N})$.

1) Für $d = (\delta_i) \,\varepsilon\, M_{N1}$, $|d| \geq k$, seien $a(d), b(d)$ und $c(d)$ die durch d eindeutig bestimmten Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^{a(d)} \delta_i = \sum_{i=N-b(d)+1}^{N} \delta_i = k' = \tfrac{1}{2}k \ , \quad \delta_{a(d)} = 1 \ ,$$

$$\delta_{N-b(d)+1} = 1 \ , \ c(d) = a(d) + b(d) \ .$$

$\tilde{d} = (\tilde{\delta}_i) \,\varepsilon\, M_{N1}$ sei definiert durch

$$\tilde{\delta}_i = 0 \iff a(d) < i \leq N-b(d) \ .$$

2) für $d' \,\varepsilon\, M_{N1}$, $|d'| = k$, $L \leq N-k$ sei

$$\mathfrak{H}(d') := \left\{\begin{pmatrix} D & d \\ o & o \end{pmatrix} \varepsilon\, \mathfrak{H}''(N+1) : d \sqcap \tilde{d} = d'\right\},$$

$$\mathfrak{H}_L(d') := \left\{\begin{pmatrix} D & d \\ o & o \end{pmatrix} \varepsilon\, \mathfrak{H}(d') : |S((D+D^t)d')| \leq L, \ c(d') \leq L+k\right\},$$

$$\mathfrak{H}^L(d') := \mathfrak{H}(d') \setminus \mathfrak{H}_L(d') \ ,$$

$$\mathfrak{H}''(N,k) := \left\{\begin{pmatrix} D & d \\ o & o \end{pmatrix} \varepsilon\, \mathfrak{H}''(N+1) : |d| < k\right\} .$$

Unmittelbar klar aufgrund dieser Definitionen ist

<u>LEMMA 2:</u> $\mathfrak{H}''(N+1) = \mathfrak{H}''(N,k) \cup \bigcup\{\mathfrak{H}_L(d') \cup \mathfrak{H}^L(d') : d' \,\varepsilon\, M_{N1}, \ |d'| = k\}$,

$$H''(N+1) = |\mathfrak{H}''(N,k)| + \sum_{d' \varepsilon M_{N1},\, |d'|=k} (|\mathfrak{H}_L(d')| + |\mathfrak{H}^L(d')|).$$

Die einzelnen Terme lassen sich abschätzen wie folgt:

<u>LEMMA 3:</u> $k \leq \frac{N}{2} \implies |\mathfrak{H}''(N,k)| \leq k\cdot\binom{N}{k}\cdot H''(N)$.

<u>Beweis:</u> Nach Lemma 1, da es höchstens $k\binom{N}{k}$ verschiedene $d \,\varepsilon\, M_{N1}$ mit $|d| < k$ gibt.

<u>LEMMA 4:</u> <u>Für</u> $d' \,\varepsilon\, M_{N1}$ mit $|d'| = k$ <u>und</u> $L \leq N-k$ <u>gilt</u>

$$|\mathfrak{H}^L(d')| \leq 2^{N-L-k-1} H''(N) \ .$$

<u>Beweis:</u> Wegen Lemma 1 hat man für $\begin{pmatrix} D & d \\ o & o \end{pmatrix} \varepsilon\, \mathfrak{H}^L(d')$: $D \,\varepsilon\, \mathfrak{H}''(N)$ und $(D+D^t)d \sqcap d = 0$, folglich gilt wegen $d' \sqsubset d$ für $d'' := S((D+D^t)d')$: $d'' \sqcap d = 0$ und $d'' \sqcap d' = 0$. Bei festgehaltenem $D \,\varepsilon\, \mathfrak{H}''(N)$ hat man also für d höchstens $2^{N-|d''|-|d'|}$ Möglichkeiten. Weiter gilt nach Definition von $\mathfrak{H}^L(d')$ $|d''| > L$ oder $c(d') > L+k$. In beiden Fällen bleiben für d nicht mehr als $2^{N-L-k-1}$ Möglichkeiten. Summation über alle $D \,\varepsilon\, \mathfrak{H}''(N)$ liefert die Behauptung.

Besondere Sorgfalt erfordert die folgende Abschätzung:

LEMMA 5: Für gerades k mit $4\cdot\mathrm{ld}\,N \le k \le \frac{N}{2}$ und $d' \in M_{N1}$ mit $|d'| = k$, $c(d') \le L+k \le N$ gilt:
$|\mathfrak{H}_L(d')| \le 2^{Lk+2}$.

Beweis: Wir definieren für $d'' \in M_{N1}$ mit $d' \sqcap d'' = 0$
$\mathfrak{H}(d',d'') := \{D' = \begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}(d') : (D+D^t)d' \sim d''\}$. Für $D' \in \mathfrak{H}(d',d'')$ liegt $D'_{\overline{\binom{d}{o}}}$ in $\mathfrak{H}''(N+1-k)$, wie man sofort nachprüft (vgl. 3.5.). Wir geben daher $F \in \mathfrak{H}''(N+1-k)$ vor und zählen die Matrizen $D' = (d_{ij}) \in \mathfrak{H}(d',d'')$ mit

(*) $D'_{\overline{\binom{d}{o}}} = F$: Sei dazu $d' = (\delta'_j)$, $d'' = (\delta''_j)$, ($\delta'_j, \delta''_j \in \{0,1\}$), $\delta'_{N+1} = 0$; die Koeffizienten d_{ij} mit $\delta'_i = 0$ und $\delta'_j = 0$ sind durch (*) bereits festgelegt. Wir halten nun ein $j \le N$ fest. Ist $\delta''_j = 0$, so muß wegen $(D+D^t)d' \sim d''$ für alle i mit $\delta'_i = 1$ $g_{ij} := d_{ij} + d_{ji} = 0$ gelten ($1 \le i , j \le N$). Sei daher $\delta''_j = 1$: Wegen $|d'| = k$ hat man höchstens 2^k Möglichkeiten in der Wahl der g_{ij} mit $\delta'_i = 1$.
Ist $a(d') < j \le N-b(d')$, so gibt es sogar höchstens $2^{k'+1} = 2^{k/2+1}$ Möglichkeiten:

$Dd \sqcap D^t d = 0$ und $d' \sqsubseteq d$ impliziert $Dd' \sqcap D^t d' = 0$, d.h. $\left(\sum_i d_{ji}\cdot\delta'_i\right)\left(\sum_i d_{ij}\cdot\delta'_i\right) = 0$, somit

(1) $d_{ij} = 0$ für alle i mit $\delta'_i = 1$ oder

(2) $d_{ji} = 0$ für alle i mit $\delta'_i = 1$.

Wegen $a(d') < j \le N-b(d')$ hat man

$$\sum_{i<j}\delta'_i = \sum_{i\le a(d')}\delta'_i = k' , \quad \sum_{i>j}\delta'_i = \sum_{i>N-b(d')}\delta'_i = k' .$$

Gilt nun (1), so ist $g_{ij} = 0$ für alle $i \le j$ mit $\delta'_i = 1$, und es bleiben höchstens k' verschiedene Indizes i, (nämlich diejenigen mit $i > j$ und $\delta'_i = 1$), für welche

g_{ij} noch frei wählbar ist. Analoges gilt im Fall (2), sodaß insgesamt höchstens $2^{k'} + 2^{k'} = 2^{k'+1}$ Möglichkeiten bleiben, wie behauptet.
Setzt man schließlich $|d''| = n$, $|d'' \sqcap \widetilde{d'}| = s$, und läßt j zwischen 1 und N variieren, so erhält man insgesamt höchstens

$$\prod_{j\le a(d')} 2^{k\cdot\delta''_j} \cdot \prod_{a(d')<j\le N-b(d')} 2^{(k'+1)\delta''_j} \cdot \prod_{j>N-b(d')} 2^{k\cdot\delta''_j}$$
$$= 2^{k\cdot s+(k'+1)(n-s)} = 2^{(k'+1)n+(k'-1)s}$$

Möglichkeiten für die Zahlen $g_{ij} = g_{ji}$ mit $\delta'_i = 1$, und damit auch für die d_{ij} mit $\delta'_i = 1$ oder $\delta'_j = 1$.
(Für $j = N+1$ ist $\delta'_j = 0$) .
Summation über die F aus $\mathfrak{H}''(N+1-k)$ ergibt
$|\mathfrak{H}(d',d'')| \le H''(N+1-k)\cdot 2^{(k'+1)n+(k'-1)s}$, falls $|d''| = n$, $|d'' \sqcap \widetilde{d'}| = s$. Es folgt für $c = c(d')$:

$$|\mathfrak{H}_L(d')|\cdot H''(N+1-k)^{-1} \le \sum_{0\le s\le n\le L} 2^{(k'+1)n+(k'-1)s} \cdot |\{d'' \in M_{N1} : |d''| = n, |d''\sqcap\widetilde{d'}| = s , d'\sqcap d'' = 0\}|$$
$$= \sum_{0\le s\le n\le L} 2^{(k'+1)n+(k'-1)s}\binom{c-k}{s}\binom{N-c}{n-s}$$, und dieser Ausdruck

ist für $4\cdot\mathrm{ld}\,N \le k \le \frac{N}{2}$, $c \le L+k$, höchstens gleich 2^{Lk+2}, wie eine kurze Rechnung zeigt.⌋

Aus den bisherigen Abschätzungen ergibt sich nun
$H''(N+1) \le \binom{N}{k}(k + 2^{N-L-k-1}\cdot H''(N) + 2^{Lk+2}\cdot H''(N+1-k))$.
Setzt man $k = 2\cdot[2\cdot\mathrm{ld}\,N + 1]$, $L = [\frac{N}{2} + 2\cdot\mathrm{ld}^2 N - 2\cdot\mathrm{ld}\,N + 1]$ so folgt Satz 4.2. durch vollständige Induktion nach N, wobei der Induktionsbeginn ($N=1,2,\ldots$ mit $\frac{N}{2} < 4\cdot\mathrm{ld}\,N$) wegen $\mathrm{ld}\,H''(N) \le \frac{1}{2}N^2$ trivial ist.

Daß die wahre Größenordnung des Restgliedes $R(N) = \mathrm{ld}\, A(N) - \frac{1}{4}N^2$ wahrscheinlich $N \cdot \mathrm{ld}\, N$ ist, legt die folgende Tabelle nahe:

N	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{R(N)}{N \cdot \mathrm{ld}\, N}$	0.549	0.557	0.560	0.559	0.556	0.553	0.548

Der Quotient $\frac{R(N)}{N \cdot \mathrm{ld}\, N}$ ist also zumindest für kleine N annähernd konstant, während $\frac{R(N)}{N \cdot \mathrm{ld}^2 N}$ monoton wie $\frac{1}{\mathrm{ld}\, N}$ fällt. Von besonderem Interesse für das Weitere sind die Quotienten

$$q(N) = \frac{A_o(N+1)}{A_o(N)} \quad , \quad p(N) = \frac{B(N+1)}{B(N)} \ .$$

<u>SATZ 4.3.</u> $p(N+1) \geq p(N)$, $q(N+1) \geq \frac{1}{2}\, q(N)$.

<u>Beweis:</u> 1) Sei für $D \in \mathfrak{B}(N)$

$$h(D) := \left| \{ d \in M_{N1} : Dd \sqsubset d \} \right| \ .$$

Wegen $\mathfrak{B}(N+1) = \left\{ \begin{pmatrix} D & d \\ o & 1 \end{pmatrix} : D \in \mathfrak{B}(N) \ , \ Dd \sqsubset d \right\}$ ist

$$B(N+1) = \sum_{D \in \mathfrak{B}(N)} h(D) \ .$$

Ebenso folgt aus

$$\mathfrak{B}(N+2) \supset \left\{ \begin{pmatrix} D & d_1 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} D \in \mathfrak{B}(N), d_1, d_2 \in M_{N1}, \\ Dd_1 \sqsubset d_1 \ , \ Dd_2 \sqsubset d_2 \end{array} \right\}$$

$$B(N+2) \geq \sum_{D \in \mathfrak{B}(N)} h(D)^2 \ .$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gibt das

$$B(N+2) \cdot B(N) \geq \sum_{D \in \mathfrak{B}(N)} h(D)^2 \cdot \sum_{D \in \mathfrak{B}(N)} 1 \geq \Big(\sum_{D \in \mathfrak{B}(N)} h(D) \Big)^2 = B(N+1)^2 \ ,$$

d.h. $\frac{B(N+2)}{B(N+1)} \geq \frac{B(N+1)}{B(N)}$.

2) Für $D \in \mathcal{L}(k_1, \dots, k_r) \subset \mathcal{D}(N)$ sei $k(D) := k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!$,

$$k_D := k_r \ , \ r_D := r,$$

$$\mathfrak{K}_1(D) := \left\{ D' = \begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : D' \in \mathcal{L}(k_1, \dots, k_r, 1), \text{d.h. } r_{D'} = r_D + 1 \right\},$$

$$\mathfrak{K}_2(D) := \left\{ D' = \begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : D' \in \mathcal{L}(k_1, \dots, k_r + 1), \text{d.h. } r_{D'} = r_D \right\},$$

$$K_1(D) := |\mathfrak{K}_1(D)| \ , \ K_2(D) := |\mathfrak{K}_2(D)| \ .$$

Dann folgt mit 3.7.

$$A_o(N) = \sum_{D \in \mathcal{D}(N)} \frac{N!}{k(D)} \ ;$$

$$A_o(N+1) = \sum_{D \in \mathcal{D}(N)} \left(\frac{(N+1)!}{k(D) \cdot 1!} K_1(D) + \frac{(N+1)!}{k(D) \cdot (k_D+1)} K_2(D) \right) =$$

$$= (N+1) \cdot \sum_{D \in \mathcal{D}(N)} \frac{N!}{k(D)} \left(K_1(D) + (k_D+1)^{-1} K_2(D) \right) \ .$$

$$A_o(N+2) = \sum_{D \in \mathcal{D}(N)} (N+2) \cdot \sum_{D' = \begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(N+1)} \frac{(N+1)!}{k(D')} \left(K_1(D') + (k_{D'}+1)^{-1} K_2(D') \right)$$

$$= (N+2)(N+1) \cdot \sum_{D \in \mathcal{D}(N)} \frac{N!}{k(D)} \Big(\sum_{D' \in \mathfrak{K}_1(D)} \left(K_1(D') + \tfrac{1}{2} K_2(D') \right)$$

$$+ (k_D+1)^{-1} \cdot \sum_{D' \in \mathfrak{K}_2(D)} \left(K_1(D') + (k_D+2)^{-1} K_2(D') \right) \Big) \ .$$

Ähnlich wie Lemma 1 weist man leicht die folgenden Implikationen nach :

1) $D' = \begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}_1(D) \Longrightarrow K_2(D') = K_1(D)$;

2) $D' = \begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}_2(D) \Longrightarrow$ a) $K_1(D') \geq K_1(D)$,

b) $K_2(D') = K_2(D)$.

Eingesetzt ergibt dies

$$A_o(N+2) \geq (N+2)(N+1) \sum_{D\,\varepsilon\,\mathcal{D}(N)} \frac{N!}{k(D)} \Big(\sum_{D'\,\varepsilon\,\mathcal{K}_1(D)} \tfrac{1}{2} K_1(D) +$$

$$+ (k_D+1)^{-1} \sum_{D'\,\varepsilon\,\mathcal{K}_2(D)} (K_1(D) + (k_D+2)^{-1} K_2(D)) \Big)$$

$$\geq (N+2)(N+1) \sum_{D\,\varepsilon\,\mathcal{D}(N)} \frac{N!}{k(D)} \Big(\tfrac{1}{2} K_1(D)^2 + (k_D+1)^{-1} K_2(D)(K_1(D) +$$

$$+ (k_D+2)^{-1} K_2(D))\Big) \geq \tfrac{1}{2}(N+2)(N+1) \sum_{D\,\varepsilon\,\mathcal{D}(N)} \frac{N!}{k(D)} (K_1(D) +$$

$$+ (k_D+1)^{-1} K_2(D))^2 .$$

In analoger Schlußweise wie für B(N) folgt

$$A_o(N+2) \cdot A_o(N) > \tfrac{1}{2} A_o(N+1)^2 .$$

<u>SATZ 4.4.</u> $\operatorname{ld} q(N) = \tfrac{1}{2} N + O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N)$,

$\operatorname{ld} p(N) = \tfrac{1}{2} N + O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N)$.

<u>Beweis:</u> Nach 4.2. ist $\tfrac{1}{4} N^2 \leq \operatorname{ld} A_o(N) \leq \tfrac{1}{4} N^2 + 3N \cdot \operatorname{ld}^2 N$. Nach 4.3. gilt $\operatorname{ld} q(N) \geq \operatorname{ld} q(N-1) - 1$, also $\operatorname{ld} q(N) \geq \operatorname{ld} q(N-j) - j$. Folglich hat man für $1 \leq k \leq N$:

$$k \cdot \operatorname{ld} q(N) \geq \sum_{j=1}^{k} (\operatorname{ld} q(N-j) - j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\operatorname{ld} A_o(N-j+1) - \operatorname{ld} A_o(N-j)) - \tfrac{1}{2} k(k+1) =$$

$$= \operatorname{ld} A_o(N) - \operatorname{ld} A_o(N-k) - \tfrac{1}{2} k(k+1)$$

$$\geq \tfrac{1}{4} N^2 - \tfrac{1}{4}(N-k)^2 - 3(N-k)\operatorname{ld}^2(N-k) - \tfrac{1}{2} k(k+1) ,$$

oder nach Division mit k :

$$\operatorname{ld} q(N) \geq \tfrac{1}{2} N - \tfrac{3}{4} k - \tfrac{1}{2} - 3(\tfrac{N}{k} - 1)\operatorname{ld}^2(N-k) .$$

Analog folgt

$$\operatorname{ld} q(N) \leq \tfrac{1}{2} N + \tfrac{3}{4} k - \tfrac{1}{2} + 3(\tfrac{N}{k} + 1)\operatorname{ld}^2(N+k) .$$

Für $k = [c \cdot N \operatorname{ld} N] \leq N$ mit einer geeigneten Konstanten c ergibt sich

$$\operatorname{ld} q(N) - \tfrac{1}{2} N = O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N) .$$

Eine entsprechende Abschätzung findet man für p(N) .

Durch einen einfachen Induktionsschluß gewinnt man aus der Rekursionsformel für P(n,N) die Abschätzung

$$P(n,N) \leq n^{2(N-n)} , \quad 1 \leq n \leq N .$$

Hieraus folgt nun leicht

<u>LEMMA 4.5.</u> $\operatorname{ld}\Big(P(N-n,N) \cdot \frac{A_o(N-n)}{A_o(N)}\Big) = -n \cdot (\tfrac{1}{2} N - \tfrac{1}{4} n + O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N)$.

<u>Beweis:</u> $\operatorname{ld} P(N-n,N) + \operatorname{ld} A_o(N-n) - \operatorname{ld} A_o(N) =$

$$- \sum_{k=N-n}^{N-1} \operatorname{ld} q(k) + n \cdot O(\operatorname{ld} N) = - \sum_{k=N-n}^{N-1} \tfrac{1}{2} k + O\Big(\sum_{k=N-n}^{N-1} k^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} k\Big) +$$

$$+ n \cdot O(\operatorname{ld} N) = - \tfrac{1}{2} N(N-1) + \tfrac{1}{4}(N-n)(N-n-1) + n \cdot O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N)$$

$$= n \cdot (\tfrac{1}{4} n - \tfrac{1}{2} N + O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N)) .$$

Wegen $P(N-1,N) = \binom{N}{2}$ erhält man aus 4.5. und 2.2.

<u>SATZ 4.6.</u> $\frac{A(N)}{A_o(N)} = 1 + \binom{N}{2} \cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N+O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N)}$

$$= 1 + 2^{-\frac{1}{2}N + O(N^{\frac{1}{2}} \operatorname{ld} N)} ,$$

<u>insbesondere</u> $A(N) \sim A_o(N)$.

Es ist nämlich $\frac{A(N)}{A_o(N)} = \sum_{n=1}^{N} P(N-n,n)\cdot \frac{A_o(N-n)}{A_o(N)}$

$$= \binom{N}{2}\cdot q(N-1)^{-1} + \sum_{n=2}^{N} 2^{-n(\frac{1}{2}N-\frac{1}{4}n+O(N^{\frac{1}{2}}\mathrm{ld}\ N))} \text{ , und}$$

$$-n(\tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{4}n + O(N^{\frac{1}{2}}\mathrm{ld}\ N) \le -N + O(N^{\frac{1}{2}}\mathrm{ld}\ N) \quad \text{für } 2 \le n \le N \text{ .}$$

Um einen asymptotischen Zusammenhang zwischen A(N) und Z(N) zu gewinnen, kann man den folgenden Satz heranziehen:

<u>SATZ 4.7.</u> a) $\sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}N]} \binom{N}{n} Z(N-n)A(n) \le A(N) - Z(N)$

$$\le \sum_{n=1}^{N-2} \binom{N}{n} Z(N-n)A(n) + 1 \text{ .}$$

b) <u>Analoges gilt für</u> $A_o(N)$ <u>und</u> $Z_o(N)$ <u>bzw.</u> $A_4(N)$ <u>und</u> $Z_4(N)$.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathfrak{z}(X,Y)$ die Menge der Topologien auf X, für die Y eine Zusammenhangskomponente mit maximaler Elementezahl ist ; $\mathfrak{z}(X) := \mathfrak{z}(X,X)$. Es ist dann $Z(N) = |\mathfrak{z}(X)|$. Durch

$$z_Y : \mathfrak{z}(X,Y) \longrightarrow \mathfrak{z}(Y) \times \mathcal{A}(X\setminus Y) \text{ , } \tau \longmapsto (\tau_Y, \tau_{X\setminus Y})$$

wird für $Y \subset X$ eine injektive Abbildung definiert, da nach 1.6.

$$\mathcal{M}(\tau) = \mathcal{M}(\tau_Y) \cup \mathcal{M}(\tau_{X\setminus Y}) \text{ gilt.}$$

Für $|Y| > N$ ist die Abbildung sogar bijektiv, da dann $\tau_Y \in \mathfrak{z}(Y)$ und $\tau_{X\setminus Y} \in \mathcal{A}(X\setminus Y)$ bereits $\tau \in \mathfrak{z}(X,Y)$ impliziert.

Geht man in $\bigcup_{n=0}^{[\frac{1}{2}N]} \bigcup_{|Y|=N-n} \mathfrak{z}(X,Y) \subset \mathfrak{z}(X) = \bigcup_{n=0}^{N-1} \bigcup_{|Y|=N-n} \mathfrak{z}(X,Y)$

zu den Mächtigkeiten über, so folgt aus der Disjunktheit der linken Vereinigung

$$\sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}N]} \sum_{|Y|=N-n} |\mathfrak{z}(X,Y)| \le A(N) - Z(N) \le \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{|Y|=N-n} |\mathfrak{z}(X,Y)| + 1 \text{ ;}$$

(da eine endliche total unzusammenhängende Topologie bereits diskret ist, erhält man $|\bigcup_{|Y|=1} \mathfrak{z}(X,Y)| = 1$) .

Aufgrund der Injektivität von z_Y gilt $|\mathfrak{z}(X,Y)| \le |\mathfrak{z}(Y)|\cdot|\mathcal{A}(X\setminus Y)|$, wobei für $|Y| > \frac{1}{2}N$ das Gleichheitszeichen steht (da z_Y dann bijektiv ist) . Daher hat man die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}N]} \sum_{|Y|=N-n} |\mathfrak{z}(Y)|\cdot|\mathcal{A}(X\setminus Y)| \le A(N) - Z(N) \le$$

$$\sum_{n=1}^{N-2} \sum_{|Y|=N-n} |\mathfrak{z}(Y)|\cdot|\mathcal{A}(X\setminus Y)| + 1 \text{ ,}$$

und da es $\binom{N}{n}$ Teilmengen von X mit N-n Elementen gibt, folgt a) mit $|\mathfrak{z}(Y)| = Z(|Y|)$ und $|\mathcal{A}(X\setminus Y)| = A(N-|Y|)$.

Analog beweist man die Formeln für $A_o(N)$ und $A_4(N)$ unter Berücksichtigung von 1.6.c).

<u>SATZ 4.8.</u> $\frac{A(N)}{Z(N)} = 1 + N\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac{1}{2}}\mathrm{ld}\ N)$

$$= 1 + 2^{-\frac{1}{2}N} + O(N\cdot \mathrm{ld}^{\frac{1}{2}}N) \text{ ,}$$

<u>insbesondere</u> $A(N) \sim Z(N)$.

<u>Die gleichen asymptotischen Aussagen gelten für</u> $\frac{A_o(N)}{Z_o(N)}$ <u>und</u> $\frac{A_4(N+1)}{Z_4(N+1)}$.

<u>Beweis</u>: Zunächst ergibt sich aus Satz 4.7. durch Division mit $A_o(N)$ (unter Beachtung von $A_o(1) = 1$ und $Z_o(n) \le A_o(n)$)

$$N\cdot\frac{Z_0(N-1)}{A_0(N)} \le 1 - \frac{Z_0(N)}{A_0(N)} \le n\cdot\frac{Z_0(N-1)}{A_0(N)} + \sum_{n=2}^{N-2}\binom{N}{n}\frac{A_0(N-n)\cdot A_0(n)}{A_0(N)}$$

$+ \frac{1}{A_0(N)}$. Die Asymptotik

$$\mathrm{ld}\left(\binom{N}{n}\frac{A_0(N-n)\cdot A_0(n)}{A_0(N)}\right) = -n\cdot(N-n+O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N))$$

erhält man in der selben Weise wie Lemma 4.5., und es folgt $1 - \frac{Z_0(N)}{A_0(N)} = N\cdot\frac{Z_0(N-1)}{A_0(N)} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N)$; dabei ist

$$\frac{Z_0(N-1)}{A_0(N)} = \frac{Z_0(N-1)}{A_0(N-1)}\cdot q(N-1)^{-1} = (1 + O(N\cdot q(N-2)^{-1}))\cdot q(N-1)^{-1}.$$

In die erste Gleichung eingesetzt ergibt dies

$1 - \frac{Z_0(N)}{A_0(N)} = N\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N)$, woraus ersichtlich $\frac{A_0(N)}{Z_0(N)} = 1 + N\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N)$ folgt.

Lemma 4.5. liefert nun

$$\mathrm{ld}(P(N-n,N)\frac{Z_0(N-n)}{Z_0(N)}) = \mathrm{ld}\,\frac{Z_0(N-n)}{A_0(N-n)} - \mathrm{ld}\,\frac{Z_0(N)}{A_0(N)} +$$

$$\mathrm{ld}(P(N-n,N)\frac{A_0(N-n)}{A_0(N)}) = O(1) - n\cdot(\tfrac12 N - n + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N)).$$

Analog zu Satz 4.6. gewinnt man daraus die Asymptotik

$$\frac{Z(N)}{Z_0(N)} = 1 + \binom{N}{2}\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N).$$

Die Zerlegung $\frac{A(N)}{Z(N)} = \frac{A_0(N)}{Z_0(N)}\cdot\frac{A(N)}{A_0(N)}\cdot\frac{Z_0(N)}{Z(N)}$

zeigt schließlich die Richtigkeit von

$$\frac{A(N)}{Z(N)} = 1 + N\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N) .$$

Aus diesen asymptotischen Gleichungen läßt sich in einem analogen Beweisverfahren die noch ausstehende Behauptung

$\frac{A_4(N+1)}{Z_4(N+1)} = 1 + N\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N)$ herleiten.

<u>KOROLLAR</u> : $\frac{A_4(N)}{A(N)} = N\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N)$,

<u>insbesondere</u> $A_4(N) \sim A(N) - Z(N)$.

$$\frac{A(N)}{Z_0(N)} = 1 + \frac{N(N+3)}{2q(N-1)} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N) .$$

<u>Beweis</u>: Die erste Aussage folgt aus den bisherigen asymptotischen Gleichungen und aus 2.3. mit Hilfe der Zerlegung

$$\frac{A_4(N)}{A(N)} = \frac{A_4(N)}{Z_4(N)}\cdot\frac{Z_4(N)}{A(N-1)}\cdot\frac{A(N-1)}{A_0(N-1)}\cdot\frac{A_0(N)}{A(N)}\cdot q(N-1)^{-1} ,$$

die zweite aufgrund von

$$\frac{A(N)}{Z_0(N)} = \frac{A(N)}{A_0(N)}\cdot\frac{A_0(N)}{Z_0(N)} .$$

Schließlich gewinnt man mit

$$\frac{A_0(N)}{Z(N)} = \frac{A_0(N)}{A(N)}\cdot\frac{A(N)}{Z(N)}$$

$$= 1 - (\binom{N}{2}-N)\cdot q(N-1)^{-1} + 2^{-N} + O(N^{\frac12}\mathrm{ld}\,N)$$

<u>SATZ 4.9.</u> <u>Für große</u> N <u>ist die Anzahl der zusammenhängenden Topologien auf</u> X <u>mit</u> $|X| = N$ <u>größer als die der</u> T_0<u>-Topologien auf</u> X, <u>d.h.</u>
$Z_0(N) < A_0(N) < Z(N) < A(N)$.

Abschließend sei noch eine Asymptotik erwähnt, die man in ähnlicher Weise wie die bisherigen Ergebnisse aus der in 2.2. angegebenen expliziten Formel herleiten kann : (vgl. [2], S.108)

<u>SATZ 4.10.</u> <u>Bezeichnet</u> ln <u>den natürlichen Logarithmus</u>, <u>so gilt</u> $\ln S(N) =$

$$N\cdot(\ln N - (\ln\ln N + 1)(1 - \frac{1}{\ln N}) + O(\frac{\ln\ln N}{\ln N}))$$

<u>insbesondere</u> $\mathrm{ld}\,S(N) = N\cdot\mathrm{ld}N + O(N\cdot\mathrm{ld}\,\mathrm{ld}\,N)$.

<u>KOROLLAR</u> : $\frac{S(N)}{A(N)} = \frac{A_3(N)}{A(N)} = 2^{-\frac14 N^2} + O(N\cdot\mathrm{ld}^2 N)$.

<u>Zusammenfassung der asymptotischen Ergebnisse</u> :

1) Für große N ist $A(N) < Z(N) < A_0(N) > Z_0(N)$,

$$A(N) \sim Z(N) \sim A_0(N) \sim Z_0(N) .$$

Genauer gilt $\dfrac{A(N)}{Z_0(N)} = 1 + 2^{-\frac{1}{2}N} + O(N^{\frac{1}{2}}\mathrm{ld}\, N)$.

2) $\dfrac{A(N+1)}{A(N)} \sim \dfrac{Z(N+1)}{Z(N)} \sim \dfrac{A_0(N+1)}{A_0(N)} \sim \dfrac{Z_0(N+1)}{Z_0(N)} \sim \dfrac{A_4(N+2)}{A_4(N+1)} \sim \dfrac{Z_4(N+2)}{Z_4(N+1)}$,

und $\mathrm{ld}\, \dfrac{A_0(N+1)}{A_0(N)} = \frac{1}{2}N + O(N\, \mathrm{ld}^{\frac{1}{2}}N)$.

3) $\overline{A(N)}$ bezeichne die Anzahl der Homöomorphieklassen von Topologien auf X ($|X| = N$) , analog $\overline{Z(N)}$ die der zusammenhängenden Topologien usw.
Dann gilt
$\mathrm{ld}\, A(N) \sim \mathrm{ld}\, A_0(N) \sim \mathrm{ld}\, Z(N) \sim \mathrm{ld}\, Z_0(N) \sim$
$\mathrm{ld}\, \overline{A(N)} \sim \mathrm{ld}\, \overline{A_0(N)} \sim \mathrm{ld}\, \overline{Z(N)} \sim \mathrm{ld}\, \overline{Z_0(N)} \sim \frac{1}{4}N^2$.

Das Restglied hat in allen Fällen höchstens die Größenordnung $N \cdot \mathrm{ld}^2 N$.

4) $\dfrac{S(N)}{A(N)} = \dfrac{A_3(N)}{A(N)} = 2^{-\frac{1}{4}N^2} + O(N\cdot \mathrm{ld}^2 N)$, insbesondere

$S(N) = o(A(N))$.

5) $A_4(N) \sim A(N) - Z(N)$; es gibt also asymptotisch gleich viele normale wie unzusammenhängende Topologien auf einer Menge mit N Elementen.

6) $A_4(N) \sim Z_4(N) \sim Z_{04}(N) \sim N\cdot A(N-1)$.

<u>Literatur</u>

1. Applied combinatorial mathematics, edited by E.F. BECKENBACH , J.Wiley and Sons, Inc., New York - London - Sydney (1966) .

2. N.G. DE BRUIJN, Asymptotic Methods in Analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1958).

3. L.COMTET, Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini, C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.A-B, 262 (1966) A1091-A1094 .

4. J.W.EVANS, F.HARARY and M.S.LYNN, On the computer enumeration of finite topologies, Comm.ACM 10 (1967) 295-298.

5. D.KLEITMAN and B.ROTHSCHILD, The number of finite topologies, Proc.Amer.Math.Soc. 25/2 (1970) 276-282.

6. J.KNOPFMACHER, Note on finite topological spaces, Austral.Math.Soc. 9 (1969) 252-256.

7. A.SHAFAAT, On the number of topologies definable for a finite set, Austral.Math.Soc. 8 (1968) 194-198.

8. H.SHARP JR., Quasi-orderings and topologies on finite sets, Proc.Amer.Math.Soc. 17 (1966) 1344-1349 .

9. R.E.STONG, Finite topological spaces, Trans.Amer.Math. Soc. 123 (1966) 325-340 .

Marcel Erné
Mathematisches Institut
der Universität Münster
<u>44 Münster/Westf.</u>
Roxeler Str. 64

(Eingegangen am 29. Juni 1973)