26 (1919)

d'abord à préciser l'énoncé de la question qui présente quelque ambiguïté. Si nous disons, en effet :

Parmi toutes les permutations des n premiers nombres entiers, combien y en a-t-il telles que la différence en valeur absolue de deux termes consécutifs soit différente de l'unité?

Nous voyons que pour $n = 4$ les permutations 2413 et 3142 répondent à la question, alors que l'auteur affirme qu'il n'en existe pas. La question doit sans doute être ainsi comprise :

Parmi toutes les permutations des n premiers nombres entiers, combien y en a-t-il telles que la différence en valeur absolue de deux termes consécutifs ou des termes extrêmes soit différente de 1 *et de* $n-1$?

L'avantage de ces restrictions supplémentaires est d'établir une symétrie parfaite entre tous les termes de la permutation. Le problème devient alors le même que le suivant :

Étant donnés n points sur un contour fermé, quel est le nombre des polygones que l'on peut former avec ces n points pour sommets, sans qu'aucun côté joigne deux sommets consécutifs sur le contour?

A chacun des polygones correspondent, en effet, $2n$ des permutations considérées.

Nous allons d'abord résoudre le problème ainsi posé; nous en déduirons, aisément du reste, la solution du premier énoncé.

Si nous appelons, pour abréger, *côté simple du polygone* un côté joignant deux sommets consécutifs, nous pouvons, d'une façon plus générale, chercher à calculer le nombre γ_n^k des polygones de n côtés, ayant k côtés simples, et le nombre Γ_n^k des permutations correspondantes, égal à $2n\gamma_n^k$.

Voici le Tableau de ces valeurs pour $n \leqq 11$:

n.	γ_n^0.	γ_n^1.	γ_n^2.	γ_n^3.	γ_n^4.	γ_n^5.	γ_n^6.	γ_n^7.	γ_n^8.	γ_n^9.	γ_n^{10}.
2.....	0	0	1	"	"	"	"	"	"	"	"
3.....	0	0	0	1	"	"	"	"	"	"	"
4.....	0	0	2	0	1	"	"	"	"	"	"
5.....	1	0	5	5	0	1	"	"	"	"	"
6.....	3	12	15	20	9	0	1	"	"	"	"
7.....	23	70	112	91	49	14	0	1	"	"	"
8.....	177	544	740	640	302	96	20	0	1	"	"
9.....	1553	4500	6003	4725	2439	747	165	27	0	1	"
10.....	14963	41740	53585	41420	20810	7076	1550	260	35	0	1
11.....	157931	426514	532950	403315	203236	70114	17050	2860	385	44	0

A2816

Δ = A326411

Pour construire ce Tableau, il suffit de connaître des formules de récurrence reliant chacun des termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne à ceux des lignes antérieures.

Nous avons obtenu de telles formules par trois méthodes qui se complètent l'une l'autre, et que nous donnons ci-dessous avec les résultats qu'elles nous ont fournis, mais sans entrer dans le détail des démonstrations qui sont un peu longues et qui demandent plus d'attention que de sagacité.

1° On considère une permutation particulière de $n-1$ termes, et l'on cherche, par l'intercalation du terme n, à obtenir une permutation de n termes correspondant à un polygone ayant $0, 1, 2, \ldots, n$ côtés simples.

En opérant ainsi, nous avons trouvé les formules

$$(1)\qquad \gamma_n^0 = (n-1)\gamma_{n-1}^0 + 2\frac{(n-4)}{(n-1)}\gamma_{n-1}^1 + \frac{2}{n-1}\gamma_{n-1}^2 - \frac{2}{n-2}\gamma_{n-2}^1,$$

$$(2)\qquad \gamma_n^1 = 4\gamma_{n-1}^0 + \frac{n^2-8n+18}{n-1}\gamma_{n-1}^1 + \frac{4(n-5)}{n-1}\gamma_{n-1}^2 + \frac{6}{n-1}\gamma_{n-1}^3 + \frac{6}{n-2}\gamma_{n-2}^1 - \frac{4}{n-2}\gamma_{n-2}^2.$$

Ces formules ne doivent pas être employées pour $n < 5$, car elles résultent de la simplification d'expressions plus étendues, dans lesquelles certains termes se présentent alors avec des coefficients négatifs, alors qu'ils doivent être simplement égalés à zéro. Cette remarque est générale.

2° On considère toutes les permutations qui commencent par 12 et qui correspondent à des polygones ayant k côtés simples, dont le nombre est évidemment $\frac{k}{n}\gamma_n^k$; si l'on supprime le chiffre 1, les permutations restantes ont $n-1$ termes consécutifs et correspondent, suivant les cas, à des polygones ayant $k-1$, k ou $k+1$ côtés simples, qu'il suffit de compter. Nous avons ainsi obtenu la *formule générale* suivante :

$$(3)\qquad \frac{k\gamma_n^k}{n} = \frac{2(n-k)}{n-1}\gamma_{n-1}^{k-1} + \frac{2k}{n-1}\gamma_{n-1}^k + \frac{k-2}{n-2}\gamma_{n-2}^{k-2} - \frac{2(k-1)}{n-2}\gamma_{n-2}^{k-1} + \frac{k}{n-2}\gamma_{n-2}^k.$$

Pour $k = 1$ et $k = 2$, cette formule se réduit à

$$(4)\qquad \frac{1}{n}\gamma_n^1 = 2\gamma_{n-1}^0 + \frac{2}{n-1}\gamma_{n-1}^1 + \frac{1}{n-2}\gamma_{n-2}^1,$$

$$(5)\qquad \frac{1}{n}\gamma_n^2 = \frac{n-2}{n-1}\gamma_{n-1}^1 + \frac{2}{n-1}\gamma_{n-1}^2 - \frac{1}{n-2}(\gamma_{n-2}^1 - \gamma_{n-2}^2).$$