

8 Elemente der Kombinatorik



Erscheint in einer Situation ein Laplace-Modell angemessen, so können wir nach (7.1) die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A als den Quotienten

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

ansetzen. Es entsteht somit zwangsläufig das Problem, Wahrscheinlichkeiten durch *Abzählen* der jeweils günstigen und der insgesamt möglichen Ergebnisse (Fälle) zu bestimmen. Folglich ist es von Nutzen, sich das kleine Einmaleins der *Kombinatorik*, der Lehre des Abzählens, anzueignen.

8.1 Fundamentalprinzip des Zählens (Multiplikationsregel)

Es sollen k -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_k) gebildet werden, indem man die k Plätze des Tupels nacheinander von links nach rechts besetzt.

Gibt es	j_1	Möglichkeiten für die Wahl von a_1 ,
gibt es (dann)	j_2	Möglichkeiten für die Wahl von a_2 ,
	\vdots	
gibt es (dann)	j_{k-1}	Möglichkeiten für die Wahl von a_{k-1} , und
gibt es (dann)	j_k	Möglichkeiten für die Wahl von a_k ,

so lassen sich insgesamt

$$j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_{k-1} \cdot j_k$$

verschiedene k -Tupel bilden.



BEWEIS: Vollständige Induktion über k . ■

Wichtig für den Gebrauch der Multiplikationsregel ist, dass die Besetzung der k Plätze des Tupels unter Umständen in einer *beliebigen anderen Reihenfolge*, also z.B. zuerst Wahl von a_3 , dann Wahl von a_7 , dann Wahl von a_1 usw., vorgenommen werden kann. Gibt es etwa j_3 Möglichkeiten für die Wahl von a_3 , dann j_7 Möglichkeiten für die Wahl von a_7 , dann j_1 Möglichkeiten für die Wahl von a_1 usw., so lassen sich ebenfalls insgesamt $j_1 j_2 \dots j_k$ Tupel bilden.

8.2 Zahlenlotto und Toto-Ergebniswette

Beim *Zahlenlotto 6 aus 49* werden aus einer Trommel mit 49 nummerierten Kugeln *nacheinander* sechs Kugeln als Gewinnzahlen gezogen. Betrachten wir die Ziehung der sechs Gewinnzahlen *in zeitlicher Reihenfolge* und besetzen die j -te Stelle eines Sechstupels mit der j -ten gezogenen Zahl a_j , so gibt es

49 Möglichkeiten für die Wahl von a_1 ,
 (dann) 48 Möglichkeiten für die Wahl von a_2 ,
 (dann) 47 Möglichkeiten für die Wahl von a_3 ,
 (dann) 46 Möglichkeiten für die Wahl von a_4 ,
 (dann) 45 Möglichkeiten für die Wahl von a_5 ,
 (dann) 44 Möglichkeiten für die Wahl von a_6 ,

insgesamt also $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$ Möglichkeiten für den Ziehungsverlauf *in zeitlicher Reihenfolge*. Dabei kommt es für die Anzahl der Fälle bei der Wahl von a_j im Fall $j \geq 2$ nicht darauf an, *welche* $j - 1$ Gewinnzahlen vorher gezogen wurden, sondern nur darauf, dass im j -ten Zug unabhängig von den $j - 1$ schon gezogenen Zahlen noch $49 - (j - 1)$ Zahlen in der Ziehungstrommel zur Verfügung stehen.

Ein weiteres Beispiel ist die *Toto-Ergebniswette*. Hier kann für 13 im Voraus bekannte Fußball-Spielpaarungen jeweils eine der Möglichkeiten 1 ($\hat{=}$ Heimsieg), 0 ($\hat{=}$ Unentschieden) oder 2 ($\hat{=}$ Auswärtssieg) angekreuzt werden. Die Ergebnisse stellen sich als 13-Tupel dar, wobei an jeder Stelle des Tupels eine der drei Möglichkeiten 0, 1 oder 2 stehen kann. Nach der Multiplikationsregel gibt es $3^{13} = 1\,594\,323$ solcher 13-Tupel.

8.3 Permutationen und Kombinationen



Da sich Tupel sehr gut zur Darstellung der Ergebnisse stochastischer Vorgänge eignen, gibt es hierfür eine eigene Terminologie: Ist M eine n -elementige Menge, so heißt ein k -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_k) mit Komponenten aus M eine **k -Permutation aus M mit Wiederholung** (von lateinisch *permutare*: *wechseln*, *vertauschen*). Mit *Wiederholung* bedeutet hier, dass Elemente aus M im k -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_k) mehrfach auftreten können. Die Menge aller k -Permutationen aus M mit Wiederholung ist somit das schon aus Kap. 1 bekannte k -fache kartesische Produkt

$$M^k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_j \in M \text{ für } j = 1, \dots, k\}.$$

Gewisse Permutationen zeichnen sich durch besondere Eigenschaften aus. Ist (a_1, a_2, \dots, a_k) eine k -Permutation aus M mit lauter verschiedenen Komponenten, so nennen wir (a_1, \dots, a_k) eine **k -Permutation aus M ohne Wiederholung**. Man beachte, dass diese Bildung nur im Fall $k \leq n$ möglich ist. Die n -Permutationen aus M ohne Wiederholung heißen kurz *Permutationen* von M .

Falls nichts anderes vereinbart ist, werden wir im Weiteren stets $M = \{1, 2, \dots, n\}$ wählen und dann auch von k -Permutationen (*mit* bzw. *ohne Wiederholung*) *der Zahlen* $1, 2, \dots, n$ sprechen. Die Menge aller k -Permutationen mit (bzw. ohne) Wiederholung aus $\{1, 2, \dots, n\}$ sei mit $\text{Per}_k^n(mW)$ (bzw. $\text{Per}_k^n(oW)$) bezeichnet, also

$$\text{Per}_k^n(mW) := \{(a_1, \dots, a_k) : 1 \leq a_j \leq n \text{ für } j = 1, \dots, k\},$$

$$\text{Per}_k^n(oW) := \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \neq a_j \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq k\}.$$

Im Sinne dieser Terminologie sind also die Ziehungen der Lottozahlen in zeitlicher Reihenfolge 6-Permutationen aus $\{1, 2, \dots, 49\}$ ohne Wiederholung und die Resultate der *Toto-Ergebniswette* 13-Permutationen aus $\{0, 1, 2\}$ mit Wiederholung.