## ESTIMATIONS D'ERREUR DANS $L^\infty$ POUR LES INEQUATIONS A OBSTACLE

C. BAIOCCHI
Istituto di Matematica dell'Università
et L.A.N. del C.N.R.
Pavia (Italie)

RESUME: Soit $w_h$ (resp. $u_h$) la solution approchée obtenue en discrétisant par éléments finis du premier ordre une équation (resp. une inéquation) variationnelle dont la solution est u. On compare les quantités $\|u-u_h\|_{L^\infty}$ et $\|u-w_h\|_{L^\infty}$ (cf. (4.2) suivante); on en déduit une estimation "presque optimale" pour $\|u-u_h\|_{L^\infty}$ (cf. (4.3) suivante).

NOTATIONS: $W^{k,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont dans $L^p(\Omega)$; $H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$; $H^1_o(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur $\partial\Omega$; $H^{-1}(\Omega)$ est le dual de $H^1_o(\Omega)$; $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ est l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont höldériennes de exposant $\alpha$ sur $\bar\Omega$. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

### 1. DESCRIPTION DU PROBLEME.

Il est bien connu (cf. p.ex. [5],[18]) que pour les problèmes aux limites du type:

(1.1) $\quad Au = f$ dans $\Omega$ ; $u = 0$ sur $\partial\Omega$

( $\Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^m$, $m\geq 1$; A opérateur différentiel linéaire du deuxième ordre, elliptique, à coefficients réguliers (1)),pour tout $k\in\mathbb{N}$, quitte à discrétiser en éléments finis d'ordre suffisamment élevé, on a (2):

(1.2) $\quad \|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} h^k;$

et il s'agit d'estimations "bien adaptées" car pour le problème (1.1) on a le résultat de régularité: $f\in H^{k-1}(\Omega) \rightarrow u\in H^{k+1}(\Omega)$.

---

(1) Pour préciser le signe (essentiel dans (1.3) suivante) on peut p. ex. choisir $A = -\sum_{i=1}^{m} \partial^2/\partial x_i^2$.

(2) h étant le pas de discrétisation, $u_h$ la correspondente solution discrète; cf. toujours [5],[18], pour les hypothèses précises.

Au contraire, pour la discrétisation d'inéquations, du type:

$$(1.3)\quad \begin{cases} u \geq \psi \text{ et } Au \geq f \text{ dans } \Omega \; ; \; u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ Au = f \text{ où } u > \psi \end{cases}$$

une estimation du type (1.2) (si elle était valable!)ne serait utilisable que pour k=1 ([3]) car en général, même pour $\psi$,f très régulières, on n'a pas $u \in H^3(\Omega)$.

Pour le problème (1.3) on a toutefois des résultats de régularité, p.ex. (cf. [8],[3],[13]):

$$(1.4)\quad f \in L^p(\Omega), \psi \in W^{2,p}(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{2,p}(\Omega)$$

et donc il serait intéressant d'étendre à la approximation de (1.3) la validité d'estimations du type ([4]):

$$(1.5)\quad \text{si } \quad u \in W^{2,p}(\Omega) \;\; \forall_{p<+\infty}, \text{ on à } \|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)} = O(h^{2-\varepsilon}) \;\; \forall_{\varepsilon>0}.$$

On va montrer qu'en effet, discrétisant (1.3) en éléments finis linéaires, et imposant la contrainte $u \geq \psi$ uniquement aux noeuds de la triangulation ([5]), sous des conditions géométriques simples sur la triangulation, (1.5) est valable.

Avant de passer aux détails on veut souligner l'intérêt d'estimations $L^\infty$ pour les problèmes à obstacle. Posons, u étant la solution de (1.3):

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \,|\, u(x) > \psi(x)\};$$

il est évident ([6]) qu'aucune convergence de $u_h$ à u ne peut assurer la convergence à $\Omega^+$ des $\Omega_h^+ = \{x \in \Omega \,|\, u_h(x) > \psi(x)\}$ ([7]); toutefois on peut montrer ([8]) que si $\varepsilon_h$ satisfait:

$$\varepsilon_h > 0; \; \lim_{h \to 0^+} \varepsilon_h = \lim_{h \to 0^+} \|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)} / \varepsilon_h = 0,$$

posant $\tilde{\Omega}_h^+ = \{x \in \Omega \,|\, u(x) > \psi(x) + \varepsilon_h\}$ on a que $\tilde{\Omega}_h^+$ est une approximation de $\Omega$

---

([3]) Pour k=1 (1.3) est valable (et utilisable!);cf. [7],[12]. En employant les espaces de Sobolev fractionnaires on peut arriver jusqu'à k<3/2; cf. [4]. Pour des généralités sur ce sujet on renvoye à la conférence de Mosco [10] de ce Symposium.

([4]) Pour la validité de (1.5) dans le cas des équations cf.[14],[15] pour le problème de Dirichlet et [16] pour le problème de Neumann.

([5]) Ce qui fournit un problème discret "plus simple" à résoudre (cf.le n. 3 suivant). Un résultat analogue, dans le quel on impose la contrainte $u_h \geq \psi$ partout, a été présenté à ce Symposium par Nitsche [15].

([6]) Il suffit de choisir $u \equiv \psi \equiv 0$; $u_h \equiv h$ (donc $u_h \to u$ "au mieux") pour avoir $\Omega_h^+ \equiv \Omega$, $\Omega^+ = \emptyset$.