Modelli Matematici Ambientali - 11 Luglio 2017
seconda parte

Esercizio 1. Un inquinante viene riversato in un lago con flusso costante $a > 0$, $[l/t]$ (l = litri, t = tempo) e viene smaltito mediante un sistema di depurazione con un tasso di smaltimento pari allo 1% $[1/t]$.
Si determini l'equazione differenziale che descrive la quantita' di inquinante $x(t)$ presente nel lago e la si risolva supponendo $x(0) = 10^2$. Si determini, inoltre, la quantita' d'inquinante presente nel lago nel lungo periodo.

Esercizio 2. Una specie di volatili emigra dall'Africa in Europa con destinazione Italia e Grecia. I volatili dapprima transitano in Italia con un flusso costante pari a $k > 0$ $[v/t]$ (ove v = volatili, t = tempo). Viene osservato un flusso in uscita dall'Italia con tasso del 50% $[1/t]$: una frazione $\alpha \in (0, 1)$ del flusso uscente dall'Italia e' diretto in Grecia mentre la frazione rimanente $(1 - \alpha)$ ritorna nei luoghi di origine.
Si osserva ulteriormente un flusso migratorio dalla Grecia con un tasso del 50% $[1/t]$: una frazione pari a $\frac{3}{4}$ di tale flusso lascia definitivamente l'Europa mentre una frazione pari a $\frac{1}{4}$ ritorna in Italia.
Si definisca un sistema di equazioni differenziali che formalizza il comportamento dei volatili e se ne determinino i punti di equilibrio studiandone la stabilita'.

Esercizio 3. 1) Si consideri il modello dell'esercizio 2 con $\alpha = 0.1$ e $k = 100$, e si scriva del codice Matlab che simula il sistema sull'intervallo temporale $[0, 20]$. Come punto di partenza, si prenda $S_1(0) = S_2(0) = 10$. Si ricopi sul foglio il codice utilizzato e i valori calcolati di $S_1(20)$ e $S_2(20)$. Essi coincidono con il valore teorico che si può ricavare dalla formula calcolata nell'esercizio precedente?

2) Per il caso $\alpha = 0.1$, si tracci un grafico S_2 in funzione di S_1 (grafico delle fasi). Si riporti sommariamente questo grafico sul foglio, evidenziando la posizione sul grafico del punto di equilibrio trovato.

Soluzione esercizio 1. L'equazione differenziale cercata e'

$$x'(t) = a - \frac{1}{100}x(t).$$

L'equazione differenziale e' lineare e puo' essere risolta tramite la formula diretta, oppure osservando che $x(t) = 100a$ e' una soluzione particolare e risolvendo l'equazione omogenea associata. Supponendo $x(0) = 10^2$, la soluzione dell'equazione é:

$$x(t) = 100a + (100 - 100a)e^{-\frac{1}{100}t}.$$

La quantita' di inquinante presente nel lago nel lungo periodo é data da:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}[100a + (100 - 100a)e^{-\frac{1}{100}t}] = 100a.$$

Soluzione esercizio 2. Siano $S_1(t)$ ed $S_2(t)$ il numero dei volatili presenti in Italia e Grecia al tempo t. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} S_1' = k + \frac{1}{8}S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_2' = \frac{\alpha}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} k + \frac{1}{8}S_2 - \frac{1}{2}S_1 = 0 \\ \frac{\alpha}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio del sistema e':

$$(S_1, S_2) = \left(\frac{8k}{4-\alpha}, \frac{8\alpha k}{4-\alpha}\right). \tag{1}$$

Per quanto concerne lo studio della stabilita', la matrice Jacobiana delle derivate parziali associata al sistema e':

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{\alpha}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{4}$. Essendo tali valori negativi per ogni $\alpha \in (0, 1)$, il punto di equilibrio é asintoticamente stabile.

Soluzione esercizio 3.

Una soluzione basata sul metodo di Eulero esplicito è la seguente.

```
alpha = 0.1;
k = 100;
```

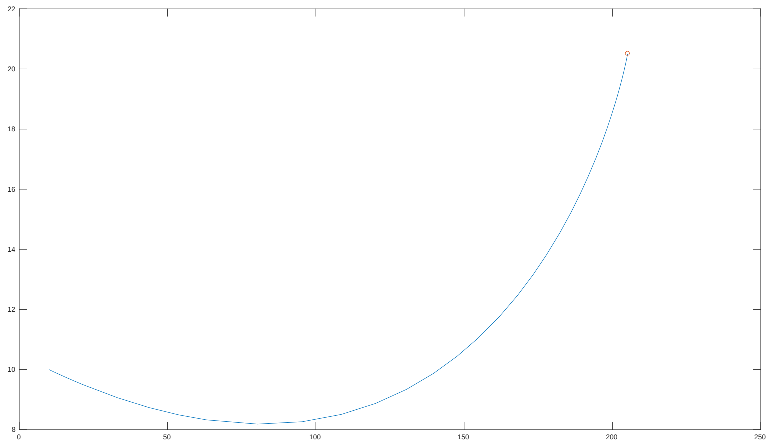
```
tempo_finale = 20;

valore_iniziale = [10;10];

n = 1000;

S1 = zeros(1, n+1);
S2 = zeros(1, n+1);
t = zeros(1, n+1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
S1(1) = valore_iniziale(1);
S2(1) = valore_iniziale(2);


for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    S1(i+1) = S1(i) + h * (k + 1/8*S2(i) - 1/2*S1(i));
    S2(i+1) = S2(i) + h * (alpha/2*S1(i) - 1/2*S2(i));
end

plot(S1, S2);
```

Una soluzione basata sulla funzione `ode45` di Matlab è la seguente.

```
alpha = 0.1;
k = 100;

tempo_finale = 20;

valore_iniziale = [10;10];

f = @(t, S) [k + 1/8*S(2) - 1/2*S(1); alpha/2*S(1) - 1/2*S(2)];
[t, S] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

plot(S(:,1), S(:,2));
```

La prima soluzione fornisce $S_1(20) = 205.1049, S_2(20) = 20.4991$. La seconda $S_1(20) = 205.1039, S_2(20) = 20.4985$. Entrambi i valori sono vicini al punto di equilibro calcolato con la formula (1), che è $(205.1282, 20.5128)$.

Il grafico delle fasi è simile al seguente, in cui abbiamo evidenziato in rosso il punto di equilibrio (che sta vicino al termine della linea blu presente nel grafico).


22
20
18
16
14
12
10
8
0
50
100
150
200
250