Modelli Matematici Ambientali - 12 Giugno 2017
seconda parte

Esercizio 1. In una cisterna di un acquedotto viene riscontrata la presenza di una quantita di piombo $x(t)$, che si accresce con un flusso costante $k > 0$, $[mg/mesi]$. Le tecniche di depurazione adottate consentono di ottenere un tasso di smaltimento pari ad $a(t) = \frac{1}{t+1}$ $[1/mesi]$. Si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento della quantita' di piombo presente nella cisterna e la si risolva supponendo $x(0) = 0$. Si determini, inoltre, la quantita' di piombo presente nella cisterna nel lungo periodo calcolando il $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

Esercizio 2. Si considerino due popolazioni X di prede ed Y di predatori per le quali si assumono le seguenti ipotesi (ove t = tempo, u = unita' di popolazione):

- X si accresce con flusso costante k $[u/t]$ ed un tasso di natalita' pari a 1 $[1/t]$;
- X ha un tasso di mortalitá proporzionale alla presenza dei predatori Y con costante di proporzionalita' pari a 0.1 $[1/(ut)]$;
- Y ha un flusso di crescita proporzionale ad X con costante di proporzionalita' 1 $[1/t]$;
- Y ha un tasso di mortalitá pari a 0.1 $[1/t]$.

1) Si determini il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento delle due popolazioni.

2) Si determinino, in funzione del parametro k, i punti di equilibrio ammissibili del sistema e se ne studi la stabilita' nel caso particolare $k = 2$.

Esercizio 3. 1) Si consideri il modello dell'esercizio 2 con $k = 2$, e si scriva del codice Matlab che simula il sistema sull'intervallo temporale $[0, 30]$. Come valori iniziali, si prenda $X(0) = Y(0) = 50$. Si tracci un grafico dell'andamento delle due popolazioni in funzione del tempo. Si ricopi sul foglio il codice utilizzato e il valore calcolato di $X(40)$ e $Y(40)$.

2) Si ripeta l'esperimento con valori iniziali $X(0) = Y(0) = 10$. É possibile dedurre sperimentalmente (dai grafici oppure dai valori di X e Y) in quale dei due casi la convergenza verso il punto di equilibrio é piú rapida?

Soluzione esercizio 1. L'equazione differenziale cercata e'

$$x'(t) = k - \frac{1}{t+1}x(t).$$

L'equazione differenziale e' lineare e puo' essere risolta tramite la formula diretta, oppure determinando una soluzione particolare della forma $x(t) = \gamma(t+1)$ (si trova una soluzione particolare per $\gamma = \frac{k}{2}$) e risolvendo l'equazione omogenea associata. La soluzione dell'equazione puo' essere scritta nella forma:

$$x(t) = \frac{kt}{t+1}\left(\frac{t}{2}+1\right).$$

La quantita' di piombo nel lungo periodo é data da:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{kt}{t+1}\left(\frac{t}{2}+1\right) = +\infty.$$

Soluzione esercizio 2. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} x' = k + x - 0.1xy \\ y' = x - 0.1y \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} k + x - 0.1xy = 0 \\ x - 0.1y = 0 \end{cases}$$

I punti di equilibrio del sistema sono:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}, 5(1+\sqrt{1+4k})\right),\ (x_2, y_2) = \left(\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}, 5(1-\sqrt{1+4k})\right).$$

E' facile osservare che il punto (x_2, y_2) non é ammissibile per il problema dato in quando non soddisfa le condizioni $x \geq 0$ ed $y \geq 0$.

Per quanto concerne lo studio della stabilita', la matrice Jacobiana delle derivate parziali associata al sistema e':

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1-0.1y & -0.1x \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Posto $k = 2$, si ha $(x_1, y_1) = (2, 20)$ e

$$A(2,20) = \begin{pmatrix} -1 & -0.2 \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.6$ Pertanto il punto di equilibrio $(2, 20)$ é asintoticamente stabile.

3) Riportiamo due soluzioni, una basata su ode45 e una sul metodo di Eulero esplicito.

```
k = 2;

tempo_finale = 30;

valore_iniziale = [50;50];

f = @(t, Z) [k + Z(1)-0.1*Z(1)*Z(2); Z(1)-0.1*Z(2)];
[t, Z] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

plot(Z);
```

```
k = 2;
tempo_finale = 30;

valore_iniziale = [50;50];

n = 1000;

X = zeros(1, n+1);
Y = zeros(1, n+1);
t = zeros(1, n+1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
X(1) = valore_iniziale(1);
Y(1) = valore_iniziale(2);


for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    X(i+1) = X(i) + h * (k + X(i) - 0.1*X(i)*Y(i));
    Y(i+1) = Y(i) + h * (X(i) - 0.1*Y(i));
end

plot(t, X, t, Y);
```

Il primo metodo produce $X(30) = 1.9984, Y(30) = 20.0044$. Il secondo $X(30) = 1.9985, Y(30) = 20.0042$.

Tracciando i due grafici oppure confrontando direttamente i valori di $X(30), Y(30)$ si vede che nel secondo caso che la convergenza è più veloce.