Modelli Matematici Ambientali - 12 Settembre 2017
seconda parte

Esercizio 1. Il tasso di natalità di una popolazione P di molluschi [unità di misura: u] nella laguna di Orbetello è proporzionale al fattore $\sqrt{t}$ (t = mesi) con costante di proporzionalitá $\alpha > 0$ $[1/(t^{3/2})]$. Supponendo che sia presente un flusso di mortalità proporzionale al fattore $\sqrt{t}$ con costante di proporzionalitá pari a 2 $[\ u/(t^{3/2})]$, si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento della popolazione e la si risolva supponendo $P(0) = 100$ $[u]$. Si determini, inoltre, per quali valori di α la popolazione di molluschi non va incontro all'estinzione.

Esercizio 2. Si considerino due popolazioni X di erbivori ed Y di carnivori per le quali si assumono le seguenti ipotesi (ove t = tempo, u = animali):

- X si accresce con flusso costante $4[u/t]$;
- X ha un tasso di mortalitá proporzionale alla presenza dei carnivori con costante di proporzionalità α $[1/(tu)]$, si suppone $\alpha \in (1/2, 1)$;
- Y ha un tasso di natalità proporzionale ad X con costante di proporzionalita' $\alpha > 0$;
- Y ha un tasso di mortalitá proporzionale alla presenza dei carnivori stessi con costante di proporzionalita' 0.25 $[1/(tu)]$

1) Si determini il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento delle due popolazioni.

2) Si determini (in funzione di α) il punto di equilibrio ammissibile del sistema e se ne studi la stabilita'.

Esercizio 3. 1) Si consideri il modello dell'esercizio 2 con $\alpha = 0.75$, e si scriva del codice Matlab che simula il sistema sull'intervallo temporale $[0, 5]$ e traccia un grafico dell'andamento delle popolazioni rispetto al tempo. Come punto di partenza, si prenda $X(0) = 10$, $Y(0) = 10$. Si ricopi sul foglio il codice utilizzato (inclusa l'istruzione per tracciare il grafico) e il valore di $X(5)$ e $Y(5)$ (popolazione al tempo finale) calcolato dal metodo numerico utilizzato.

2) Sempre utilizzando Matlab, si determini qual è il valore massimo raggiunto dalla variabile Y lungo l'intervallo di tempo considerato. *Suggerimento: potete usare la funzione* `max`*.*

Soluzione esercizio 1. L'equazione differenziale cercata è

$$P'(t) = \alpha\sqrt{t}P(t) - 2\sqrt{t}.$$

L'equazione differenziale e' lineare e puo' essere risolta tramite la formula diretta, oppure osservando che $P(t) = \frac{2}{\alpha}$ e' una soluzione particolare e risolvendo l'equazione omogenea associata. La soluzione dell'equazione è:

$$P(t) = \frac{2}{\alpha} + (100 - \frac{2}{\alpha})(e^{\frac{2}{3}\alpha t^{\frac{3}{2}}}).$$

Affinchè la popolazione non si estingua deve essere $100 - \frac{2}{\alpha} > 0$, ossia $\alpha \geq \frac{1}{50}$.

Soluzione esercizio 2. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} x' = 4 - \alpha xy \\ y' = \alpha xy - 0.25y^2 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 4 - \alpha xy = 0 \\ \alpha xy - 0.25y^2 = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio ammissibile del sistema e':

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{\alpha}, 4\right).$$

Per quanto concerne lo studio della stabilita', la matrice Jacobiana delle derivate parziali associata al sistema e':

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -\alpha y & -\alpha x \\ \alpha y & \alpha x - 0.5y \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} -4\alpha & -1 \\ 4\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $A(\bar{x}, \bar{y})$ sono

$$\lambda = \frac{-4\alpha - 1 \pm \sqrt{16\alpha^2 + 1 - 24\alpha}}{2},$$

che nell'ipotesi $\alpha \in (1/2, 1)$ risultano complessi con $Re(\lambda) = \frac{-4\alpha-1}{2} < 0$. Pertanto il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$ é asintoticamente stabile.

Soluzione esercizio 3.

1) e 2) Utilizzando `ode45`, una soluzione possibile è

```
alpha = 0.75;

tempo_finale = 5;

valore_iniziale = [10;10];

f = @(t, Z) [4 - alpha*Z(1)*Z(2); alpha*Z(1)*Z(2)-0.25*Z(2)^2];
[t, Z] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

plot(t, Z);
```

Il calcolo delle altre quantità richieste si può effettuare con i comandi

```
>> Z(end,:)
ans =
    1.3333    4.0002
>> max(Z(:,2))
ans =
   12.5546
```

Alternativamente, con il metodo di Eulero e $n = 1000$ intervalli,

```
alpha = 0.75;
tempo_finale = 5;

valore_iniziale = [10;10];

n = 1000;

X = zeros(1, n+1);
Y = zeros(1, n+1);
t = zeros(1, n+1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
X(1) = valore_iniziale(1);
Y(1) = valore_iniziale(2);


for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    X(i+1) = X(i) + h * (4 - alpha*X(i)*Y(i));
    Y(i+1) = Y(i) + h * (alpha*X(i)*Y(i) - 0.25*Y(i)^2);
end

plot(t, X, t, Y);
```

e successivamente

```
>> X(end)
ans =
    1.3333
>> Y(end)
ans =
    4.0002
>> max(Y)
ans =
   12.6338
```