Modelli Matematici Ambientali - 13 Settembre 2016
seconda parte

Esercizio 1. Un invaso contenente la quantita' d'acqua $x(t)$, riceve un flusso costante $k > 0$, $[l/t]$ (l = litri) ed e' soggetto ad un tasso di evaporazione pari allo 0.2% $[1/t]$. Si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento del sistema e la si risolva supponendo $x(0) = 0$. Si determini, inoltre, la quantita' d'acqua presente nell'invaso nel lungo periodo.

Esercizio 2. Si considerino due popolazioni X di piante ed Y di animali erbivori per le quali si assumono le seguenti ipotesi (ove t = tempo):

- X si accresce con flusso costante k ed un tasso di natalita' pari a 0.1 $[1/t]$;
- X ha un flusso di decrescita proporzionale alla presenza degli erbivori con costante di proporzionalita' pari a 0.3 $[1/t]$;
- Y ha un flusso di crescita proporzionale ad X con costante di proporzionalita' $\alpha > 0$ $[1/t]$;
- 0.1 $[1/t]$ é il tasso di mortalità degli erbivori Y;

1) Si determini il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento delle due popolazioni.

2) Si determini per quali valori di α il sistema ammette un punto di equilibrio ammissibile e se ne studi la stabilita'.

Esercizio 3. 1) Si consideri il modello dell'esercizio 2 con $\alpha = 0.1$ e $k = 1$, e si scriva del codice Matlab che simula il sistema sull'intervallo temporale $[0, 200]$. Come punto di partenza, si prenda $X(0) = 5.1$, $Y(0) = 5.1$. Si disegni con Matlab la traiettoria del sistema sul grafico delle fasi (X, Y). Si ricopi sul foglio il codice utilizzato e il valore calcolato di $X(200)$ e $Y(200)$.

2) Utilizzando i risultati dell'esercizio precedente, si dica quale è il valore numerico del punto di equilibrio ammissibile del sistema nel caso $\alpha = 0.1$, $k = 1$. Si ripeta l'esperimento precedente utilizzando tale punto di equilibrio come punto di partenza, e si riportino i nuovi valori di $X(200)$ e $Y(200)$. I risultati numerici ottenuti confermano che il punto calcolato è davvero un punto di equilibrio?

Soluzione esercizio 1. L'equazione differenziale cercata e'

$$x'(t) = k - \frac{0.2}{100}x(t).$$

L'equazione differenziale e' lineare e puo' essere risolta tramite la formula diretta, oppure osservando che $x(t) = 500k$ e' una soluzione particolare e risolvendo l'equazione omogenea associata. La soluzione dell'equazione é:

$$x(t) = 500k[1 - e^{-\frac{0.2}{100}t}].$$

La numerosita' della popolazione nel lungo periodo é data da:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 500k[1 - e^{-\frac{0.2}{100}t}] = 500k.$$

Soluzione esercizio 2. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} x' = k + 0.1x - 0.3y \\ y' = \alpha x - 0.1y \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} k + 0.1x - 0.3y = 0 \\ \alpha x - 0.1y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio del sistema e':

$$(x, y) = \left(\frac{10k}{30\alpha - 1}, \frac{100\alpha k}{30\alpha - 1}\right).$$

Affinche' tale punto sia ammissibile deve essere $x \geq 0$ ed $y \geq 0$, da cui $\alpha > \frac{1}{30}$.

Per quanto concerne lo studio della stabilita', la matrice Jacobiana delle derivate parziali associata al sistema e':

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.3 \\ \alpha & -0.1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda = \pm\sqrt{-0.3\alpha + 0.01}$, che nell'ipotesi di ammissibilita' $\alpha > \frac{1}{30}$ risultano complessi con $Re(\lambda) = 0$. Pertanto il punto di equilibrio é instabile e si evince un comportamento oscillatorio attorno al punto di equilibrio.

Soluzione esercizio 3.
1) Utilizzando `ode45`, una soluzione possibile è

```
alpha = 0.1;
kappa = 1;

tempo_finale = 200;

valore_iniziale = [5.1; 5.1];

f = @(t, x) [kappa + 0.1*x(1) - 0.3*x(2); alpha*x(1) - 0.1*x(2)];
[t, x] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

plot(x(:,1), x(:,2));
```

Oppure, con il metodo di Eulero e $n = 1000$ intervalli,

```
kappa = 1;
alpha = 1/10;

tempo_finale = 200;

valore_iniziale = [5.1;5.1];

n = 1000;

X = zeros(1, n+1);
Y = zeros(1, n+1);
t = zeros(1, n+1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
X(1) = valore_iniziale(1);
Y(1) = valore_iniziale(2);


for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    X(i+1) = X(i) + h * (kappa + 0.1 * X(i) - 0.3*Y(i));
    Y(i+1) = Y(i) + h * (alpha*X(i) - 0.1*Y(i));
end

plot(X, Y);
```

Utilizzando `ode45` i valori calcolati sono dati da `x(end, :) = [4.9048, 4.8834]`. Utilizzando il metodo di Eulero con $n = 1000$ sono `[X(end), Y(end)] = [4.8513, 4.8508]`.

I grafici delle fasi ottenuti con i due metodi sono riportati in Figura ??.

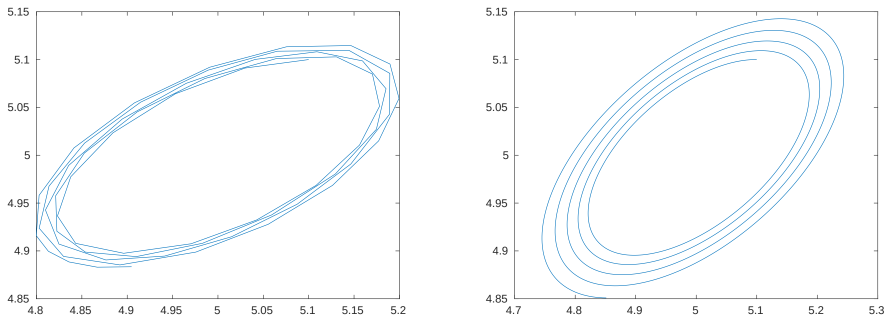

Figura 1: I grafici delle fasi ottenuti con `ode45` e con il metodo di Eulero con $n = 1000$.

Osservazione: La traiettoria calcolata con il metodo di Eulero ha la forma di un'ellisse che tende ad allargarsi leggermente con il passare del tempo. Questo è un errore dovuto alle approssimazioni numeriche; difatti modificando il valore di n la traiettoria diverge più o meno velocemente. In realtà la traiettoria è più simile a quella calcolata da `ode45`, e non diverge.

2) Utilizzando le formule del punto precedente, il punto di equilibrio è $(5, 5)$. Con entrambi i metodi, le traiettorie calcolate in questo caso sono costanti: $X(t) = Y(t) = 5$ per ogni t. Questo conferma numericamente che $(5, 5)$ è un punto di equilibrio del sistema.