Modelli matematici ambientali - 14 Febbraio 2018

seconda parte

Esercizio 1. In una coltivazione di girasoli si registra la nascita di k piante ogni mese e si stima che ogni pianta appassisca dopo circa 4 mesi.
Si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento della popolazione P dei girasoli e la si risolva supponendo noto il numero dei girasoli al tempo $t = 0$ (lo si indichi con $P(0)$). Si determini, inoltre, per quali valori di k è possibile attendersi che il numero di girasoli sia superiore a 1000 unità nel lungo periodo.

Esercizio 2. Un allevatore possiede un gregge di ovini che si accresce con un tasso massimo di natalità pari a 0.2 $[1/T]$ (T = tempo). Per motivi di capienza delle stalle il gregge non puo' superare le 100 unita' [U].
La comparsa di parassiti genera un tasso di mortalità per il gregge proporzionale alla numerosità dei parassiti con costante di proporzionalità 0.2 $[1/(T * U)]$. E' noto inoltre che, in assenza degli ovini, i parassiti si estinguerebbero con un tasso di mortalità pari alla costante positiva α $[1/T]$, mentre il loro tasso di natalità risulta essere proporzionale alla numerositá degli ovini con costante di proporzionalità 0.04 $[1/(T * U)]$.

1) Si determini il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento degli ovini e dei parassiti.

2) Si determini, in funzione di α, la numerosità approssimativa degli ovini che e' possibile attendersi nel lungo periodo.

3) Si dica per quali valori di α i parassiti tenderanno ad estinguersi nel lungo periodo.

Esercizio 3.

Si consideri il modello dell'esercizio **1**, e si scriva del codice Matlab (script o funzione, a vostra scelta) che simula l'equazione differenziale trovata sull'intervallo temporale $[0, 100]$, con $k = 200$ e una popolazione iniziale di $P(0) = 500$ girasoli, e traccia un grafico dell'andamento della popolazione rispetto al tempo.

Si ricopi sul foglio il codice utilizzato e il valore $P(100)$ del numero di girasoli al termine dell'intervallo di simulazione.

Si ripeta l'esperimento per $k = 250$ e $k = 300$. Qual il valore di $P(100)$ in questi due casi ulteriori?

Soluzione esercizio 1. L'equazione differenziale cercata e'

$$P'(t) = k - \frac{1}{4}P(t).$$

L'equazione differenziale e' lineare e puo' essere risolta tramite la formula diretta o con il metodo delle variabili separabili, oppure osservando che $P(t) \equiv 4k$ e' una soluzione particolare e risolvendo l'equazione omogenea associata. La soluzione dell'equazione é:

$$P(t) = 4k + (P(0) - 4k)e^{-\frac{t}{4}}.$$

La numerosita' della popolazione nel lungo periodo é data dal

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 4k.$$

Pertanto per $k > 250$ è possibile attendersi che il numero di girasoli sia superiore a 1000 unità nel lungo periodo.

Soluzione esercizio 2. Indichiamo con x la popolazione degli ovini e con y quella dei parassiti. Dalle ipotesi segue che x si evolve, in assenza di y, seguendo una funzione logistica. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} x' = 0.2x - 0.002x^2 - 0.2xy \\ y' = -\alpha y + 0.04xy \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 0.2x - 0.002x^2 - 0.2xy = 0 \\ -\alpha y + 0.04xy = 0 \end{cases}$$

e considerando la seconda equazione e' facile vedere che deve essere $y = 0$ oppure $x = 25\alpha$. Sostituendo nella prima equazione si ottengono i punti di equilibrio:

$$(0,0), \quad (100,0), \quad \left(25\alpha, 1 - \frac{\alpha}{4}\right).$$

E' noto che: $(0,0)$ e' un punto di equilibrio instabile,

$$(100,0) \text{ e' un punto di equilibrio asintoticamente stabile per } 1 - \frac{\alpha}{4} < 0,$$

$$\left(25\alpha, 1 - \frac{\alpha}{4}\right) \text{ e' asintoticamente stabile per } 1 - \frac{\alpha}{4} > 0.$$

Dai precedenti risultati si deduce che esistono opportuni valori iniziali positivi $x(0)$ ed $y(0)$ tali che, nel lungo periodo:

$$x \approx 100, \quad y \approx 0, \text{ per } \alpha > 4$$

$$x \approx 25\alpha, \quad y \approx 1 - \frac{\alpha}{4}, \text{ per } \alpha < 4$$

Pertanto, per opportuni valori iniziali, i parassiti si estingueranno per $\alpha > 4$.

Soluzione esercizio 3. Una soluzione calcolata utilizzando ode45 è

```
tempo_finale = 100;
valore_iniziale = 500;

k = 200;

f = @(t, x) k - 1/4*x;
[t, x] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

plot(t, x);
```

Il valore risultante di $P(100)$ è 8.0000e+02, vale a dire 800 girasoli. Per $k = 250$ e $k = 300$ questi valori diventano invece rispettivamente 1000 e 1200, in accordo con la formula trovata.

La stessa soluzione può essere calcolata anche con il metodo di Eulero esplicito con il seguente codice.

```
tempo_finale = 100;
valore_iniziale = 500;

k = 250;

n = 1000;

P = zeros(1, n+1);
t = zeros(1, n+1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
P(1) = valore_iniziale;


for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    P(i+1) = P(i) + h * (k - P(i)/4);
end

plot(t, P);
```