Modelli Matematici Ambientali - 4 luglio 2018
seconda parte

Esercizio 1. In un allevamento di cavalli é stato riscontrato un tasso di mortalità annuale del 1%. Vengono immessi nell'allevamento 3 cavalli ogni anno. Si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento della popolazione dei cavalli e la si risolva supponendo che al tempo $t = 0$ il livello della popolazione sia pari a 200 unità. Si determini, inoltre, la quantità di cavalli presenti nell'allevamento nel lungo periodo.

Esercizio 2. Si considerino due popolazioni X di prede ed Y di predatori per le quali si assumono le seguenti ipotesi (ove T = unità di tempo, U = unità di popolazione):

- La popolazione X si accresce con flusso costante $k > 0$ [U/T] ed un tasso di natalità costante pari a 0.1 $[1/T]$;
- X ha un tasso di mortalità proporzionale alla presenza dei predatori Y con costante di proporzionalita' pari a 0.3 $[1/TU]$;
- La popolazione dei predatori Y ha un flusso di crescita proporzionale ad X con costante di proporzionalità $\frac{1}{30}$ $[1/T]$;
- Y ha un tasso di mortalità pari a 0.2 $[1/T]$.

1) Si determini il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento delle due popolazioni.

2) Si determinino, in funzione di k, i punti di equilibrio ammissibili del sistema e se ne studi la stabilita' per $k = 6$.

Esercizio 3. 1) Si consideri il modello dell'esercizio 2, e si scriva una `function [t, X] = simulazione(k)` che simula il sistema sull'intervallo temporale $[0, 30]$, per un dato valore del parametro k, restituendo un array contenente un numero appropriato di tempi di discretizzazione $[t(1); t(2); \ldots; t(n)]$ e uno contenente i corrispondenti valori del numero di prede $[X(t(1)); X(t(2)); \ldots; X(t(n))]$, come negli esempi visti. Come punto di partenza, si prenda $X(0) = Y(0) = 0$. Si riporti il codice di questa function sul foglio.

2) Quali sono i valori finali di X al tempo 30 ottenuti per $k = 6$ e $k = 4$? Con che istruzioni Matlab potete determinarli? Coincidono con il punto di equilibrio calcolato nell'esercizio precedente?

Soluzione esercizio 1. Indicando con $x(t)$ la popolazione dei cavalli, l'equazione differenziale cercata è

$$x'(t) = 3 - \frac{1}{100}x(t).$$

L'equazione differenziale è lineare e pu ò essere risolta tramite la formula diretta, oppure osservando che $x(t) = 300$, per ogni t, è una soluzione particolare e risolvendo l'equazione omogenea associata. La soluzione dell'equazione é:

$$x(t) = 300 - 100e^{-\frac{1}{100}t}.$$

La numerosità della popolazione nel lungo periodo é data da:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} [300 - 100e^{-\frac{1}{100}t}] = 300.$$

Soluzione esercizio 2. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} x' = k + 0.1x - 0.3xy \\ y' = \frac{1}{30}x - 0.2y \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} k + 0.1x - 0.3xy = 0 \\ \frac{1}{30}x - 0.2y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio ammissibile del sistema è:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(1 + \sqrt{1 + 20k}, \frac{1 + \sqrt{1 + 20k}}{6}\right).$$

Per quanto concerne lo studio della stabilita', la matrice Jacobiana delle derivate parziali associata al sistema è:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0.1 - 0.3y & -0.3x \\ \frac{1}{30} & -0.2 \end{pmatrix}.$$

Per $k = 6$, il punto di equilibrio risulta essere $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 2)$, e si ha

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} -0.5 & -3.6 \\ \frac{1}{30} & -0.2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $A(\bar{x}, \bar{y})$ sono $\lambda = \frac{-7 \pm i\sqrt{39}}{20}$, che risultano complessi con $Re(\lambda) < 0$. Pertanto il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 2)$ è asintoticamente stabile.

Soluzione esercizio 3.
1) Utilizzando `ode45`, una soluzione possibile è

```
function [t,x] = simulazione(k)

tempo_finale = 30;

valore_iniziale = [0, 0];

f = @(t, x) [k + 0.1*x(1) - 0.3*x(1)*x(2); 1/30*x(1) - 0.2*x(2)];
[t, x] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

x = x(:, 1); %restituisce solo il numero di prede
```

Oppure, con il metodo di Eulero e $n = 1000$ intervalli,

```
function [t, X] = simulazione(k)

tempo_finale = 30;
valore_iniziale = [0;0];
n = 1000;

X = zeros(n+1, 1);
Y = zeros(n+1, 1);
t = zeros(n+1, 1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
X(1) = valore_iniziale(1);
Y(1) = valore_iniziale(2);

for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + h;
    X(i+1) = X(i) + h * (k + 0.1*X(i) -0.3*X(i)*Y(i));
    Y(i+1) = Y(i) + h * (1/30*X(i) - 0.2*Y(i));
end
```

2)

```
>> [t1, x1] = simulazione(6);
>> x1(end)
ans =
   1.2000e+01
>> [t2, x2] = simulazione(4);
>> x2(end)
ans =
   1.0003e+01
>> plot(t1, x1, t2, x2) % se si desidera un grafico che confronta i due casi
```

I valori ottenuti sono sufficientemente vicini ai punti di equilibrio determinati teoricamente, che sono rispettivamente 12 e 10.