Modelli Matematici Ambientali - 6 Luglio 2016
seconda parte

Esercizio 1. Una popolazione $P(t)$ cresce con flusso e^{-t} e decresce con un tasso costante pari a $0.1[1/t]$. Si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento della popolazione e la si risolva supponendo $P(0) = 0$. Si determini, inoltre, la numerosita' della popolazione nel lungo periodo.

Esercizio 2. Si considerino due popolazioni di individui S (individui sani) e I (individui infetti) per le quali si assumono seguenti ipotesi (ove $U =$ individui, $T =$ tempo):

- $\alpha \in (0,1)[1/(T * U)]$ e' la probabilita' di contagio nell'unita' di tempo ad ogni incontro, ossia il numero di individui sani che divengono infetti ad ogni incontro nell'unita' di tempo.
- 0.1 $[1/T]$ é il tasso di mortalità degli individui infetti.
- 0.2 $[1/T]$ é il tasso di guarigione degli individui infetti.
- Il tasso di natalità degli individui sani S è dato dalla costante positiva β $[1/T]$.

1) Si determini il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento delle due popolazioni.

2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilita'.

Esercizio 3. 1) Si consideri il modello dell'esercizio 2 con $\alpha = 0.001$ e $\beta = 0.2$, e si scriva del codice Matlab (script o funzione, a vostra scelta) che simula il sistema sull'intervallo temporale $[0, 50]$ a partire da $S(0) = I(0) = 100$. Si ricopi sul foglio il codice utilizzato e il valore calcolato di $S(50)$ e $I(50)$.

2) si dica quale è il punto di equilibrio stabile del sistema nel caso $\alpha = 0.001, \beta = 0.2$. Esso corrisponde ai valori di $S(50)$ e $I(50)$ trovati?

Soluzione esercizio 1. L'equazione differenziale cercata e'

$$P'(t) = e^{-t} - 0.1P(t).$$

L'equazione differenziale e' lineare e puo' essere risolta tramite la formula diretta, oppure osservando che $P(t) = -\frac{10}{9}e^{-t}$ e' una soluzione particolare e risolvendo l'equazione omogenea associata. La soluzione dell'equazione é:

$$P(t) = \frac{10}{9}[e^{-0.1t} - e^{-t}].$$

La numerosita' della popolazione nel lungo periodo é data da:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{10}{9}[e^{-0.1t} - e^{-t}] = 0.$$

Soluzione esercizio 2. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} S' = \beta S - \alpha SI + 0.2I \\ I' = \alpha SI - 0.2I - 0.1I \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \beta S - \alpha SI + 0.2I = 0 \\ \alpha SI - 0.2I - 0.1I = 0 \end{cases}$$

I punti di equilibrio del sistema sono:

$$(0,0), \quad \left(\frac{0.3}{\alpha}, \frac{3\beta}{\alpha}\right).$$

La matrice Jacobiana delle derivate parziali e':

$$A(S,I) = \begin{pmatrix} \beta - \alpha I & -\alpha S + 0.2 \\ \alpha I & \alpha S - 0.3 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} \beta & 0.2 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $A(0,0)$ sono $\lambda_1 = \beta$, $\lambda_2 = 0.3$ da cui, essendo $\beta > 0$, il punto $(0,0)$ é instabile. Consideriamo il secondo punto di equilibrio.

$$A\left(\frac{0.3}{\alpha}, \frac{3\beta}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} -2\beta & -0.1 \\ 3\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A sono soluzioni della equazione:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + 0.3\beta = 0,$$

ed e' facile vedere che, per ogni $\beta > 0$ gli autovalori della matrice A sono negativi oppure hanno parte reale negativa, da cui il punto $\left(\frac{0.3}{\alpha}, \frac{3\beta}{\alpha}\right)$ é asintoticamente stabile.

Soluzione esercizio 3. 1) Utilizzando `ode45`, una soluzione possibile è

```
alpha = 0.001;
beta = 0.2;

tempo_finale = 50;

valore_iniziale = [100; 100];

f = @(t, x) [beta*x(1)-alpha*x(1)*x(2)+0.2*x(2);
             alpha*x(1)*x(2) - 0.2*x(2) - 0.1*x(2)];
[t, x] = ode45(f, [0, tempo_finale], valore_iniziale);

plot(t, x);
legend('sani', 'infetti');
```

Oppure, con il metodo di Eulero e $n = 100$ intervalli,

```
alpha = 0.001;
beta = 0.2;

tempo_finale = 50;

valore_iniziale = [100; 100];

n = 100;

S = zeros(1, n+1);
I = zeros(1, n+1);
t = zeros(1, n+1);

h = tempo_finale / n;
t(1) = 0;
S(1) = valore_iniziale(1);
I(1) = valore_iniziale(2);


for k = 1:n
    t(k+1) = t(k) + h;
    S(k+1) = S(k) + h * (beta*S(k) - alpha*S(k)*I(k) + 0.2*I(k));
    I(k+1) = I(k) + h * (alpha*S(k)*I(k) - 0.2*I(k) - 0.1*I(k));
end

plot(t, S, t, I);
legend('sani', 'infetti');
```

Utilizzando `ode45` i valori calcolati sono $S(50) = 300.1490$, $I(50) = 599.3045$. Utilizzando il metodo di Eulero con $n = 100$ sono $S(50) = 300.2072$, $I(50) = 599.0923$.

2) Utilizzando le formule del punto precedente, il punto di equilibrio stabile è $(300, 600)$. Esso è molto vicino ai valori trovati di $S(50)$ e $I(50)$; questo (insieme al grafico di $S(t)$ e $I(t)$) indica che (almeno numericamente) si ha convergenza al punto di equilibrio stabile.