Modelli matematici ambientali

Prova scritta dell'8 giugno 2016 - prima parte

Esercizio 1 Si determini il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2$$

nell'insieme $E = \{(x,y) : \ x^2+y^2 \leq 9\}$.

Esercizio 2 Posto

$$D = \{(x,y) : \ x^2+y^2 \leq 1, \ (x-\sqrt{3})^2+y^2 \geq 4, \ y \geq 0\},$$

si calcoli:

(i) l'integrale

$$\int_D (x-\sqrt{3})y \, dxdy,$$

(ii) la lunghezza di ∂D.

Modelli Matematici Ambientali - 8 Giugno 2016
seconda parte

Esercizio 1. Si determinino i punti di equilibrio del seguente sistema di equazioni differenziali e se ne studi la stabilita':

$$\begin{cases} x' = 2x - xy \\ y' = x^2 y - 2 \end{cases}$$

Soluzione. I punti di equilibrio sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x - xy = 0 \\ x^2 y - 2 = 0 \end{cases}$$

Si ottengono i punti $(1, 2)$ e $(-1, 2)$. La matrice Jacobiana delle derivate parziali e':

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - y & -x \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$A(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $A(1, 2)$ sono $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$, con parte reale positiva, da cui il punto $(1, 2)$ é instabile.

$$A(-1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $A(-1, 2)$ sono $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$, con parte reale positiva, da cui il punto $(-1, 2)$ é instabile.

Esercizio 2. Una popolazione $P(t)$ cresce con flusso αt ($\alpha > 0$) e decresce con un tasso pari alla metà del flusso stesso. Si determini l'equazione differenziale che descrive il comportamento della popolazione e la si risolva supponendo $P(0) = 0$. Si determini, inoltre, la numerosita' della popolazione nel lungo periodo.

Soluzione. L'equazione differenziale cercata e'

$$P'(t) = \alpha t - \frac{\alpha t}{2} P(t).$$

L'equazione differenziale e' lineare e puo' essere risolta tramite la formula diretta o con il metodo delle variabili separabili, oppure osservando che $P(t) \equiv 2$ e' una soluzione particolare e risolvendo l'equazione omogenea associata. La soluzione dell'equazione é:

$$P(t) = 2 - 2e^{-\frac{\alpha t^2}{4}}.$$

La numerosita' della popolazione nel lungo periodo é data dal

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 2.$$

Esercizio 3. In un lago coesistono le due specie di pesci X (prede) e Y (predatori) per le quali si assumono seguenti ipotesi (ove U = unità, T = tempo):

- In assenza della specie Y, la specie X si evolve secondo una funzione logistica con tasso massimo di crescita pari a 0.1 $[1/T]$ e può sostenere un valore massimo pari a 400 $[U]$.
- Il tasso di mortalità di X è proporzionale ad Y con costante di proporzionalità 0.002 $[1/(T * U)]$.
- In assenza della specie X, la specie Y tende a estinguersi con tasso di mortalità costante pari a 0.3 $[1/T]$.
- Il tasso di natalità di Y è proporzionale ad X con costante di proporzionalità positiva β $[1/(T * U)]$.

1) Si determini il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento delle due specie.

2) Si determini, in funzione di β, la numerosità approssimativa delle due specie che e' possibile attendersi nel lungo periodo.

3) Si dica per quali valori di β la specie Y non va incontro all'estinzione.

Soluzione. Il sistema di equazioni differenziali cercato é:

$$\begin{cases} x' = 0.1x - \frac{1}{4000}x^2 - 0.002xy \\ y' = -0.3y + \beta xy \end{cases}$$

Posto $a = 0.1$, $\frac{1}{4000}$, $\alpha = 0.002$, $b = 0.3$, i punti di equilibrio del sistema sono:

$$(0,0), \quad (\frac{a}{\gamma}, 0), \quad \left(\frac{b}{\beta}, \frac{1}{\alpha\beta}(a\beta - \gamma b)\right).$$

E' noto che: $(0,0)$ e' un punto di equilibrio instabile.

$(\frac{a}{\gamma}, 0)$ e' un punto di equilibrio asintoticamente stabile per $a\beta - \gamma b < 0$,

$\left(\frac{b}{\beta}, \frac{1}{\alpha\beta}(a\beta - \gamma b)\right)$ e' asintoticamente stabile per $a\beta - \gamma b > 0$.

Dai precedenti risultati si deduce che nel lungo periodo, esistono opportuni valori iniziali positivi $X(0)$ ed $Y(0)$ tali che:

$$X \approx 400, \quad Y \approx 0, \text{ per } \beta < 0.00075$$

$$X \approx \frac{0.3}{\beta}, \quad Y \approx 50 - \frac{0.0375}{\beta}, \text{ per } \beta > 0.00075$$

Pertanto supponendo $Y(0) > 0$ opportuno, la popolazione Y non va incontro all'estinzione per $\beta > 0.00075$.

Esercizio 4. Si consideri il modello dell'esercizio 3, e si scriva del codice Matlab (script o funzione, a vostra scelta) che simula il sistema di equazioni differenziali trovato sull'intervallo temporale $[0, 200]$, a partire da $X(0) = Y(0) = 100$, scegliendo $\beta = 0.001$. Si ricopi sul foglio il codice utilizzato e il valore calcolato di $X(200)$ e $Y(200)$.

Potete utilizzare, a vostra scelta, la discretizzazione con il metodo di Eulero (dividendo l'intervallo in almeno $n = 200$ punti), oppure il comando `ode45` di Matlab.