Algoritmi per la programmazione lineare: il metodo del simplesso

Giandomenico Mastroeni

Dipartimento di Informatica, Universita' di Pisa

A.A. 2018/2019

Contenuti della lezione

- Problemi di programmazione lineare, forma standard
- Poliedri, facce, vertici
- Il metodo grafico delle curve di livello
- Cenni sulla teoria della dualitá
- L'algoritmo del simplesso

Forma standard di un problema di programmazione lineare

Un problema di programmazione lineare nella forma standard e' definito dalla seguente formulazione:

$$\min \ \langle c, x \rangle$$

$$\text{soggetto ai vincoli} \quad x \in P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \tag{$\mathcal{P}$}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e' una matrice di rango n, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione.

E' possibile dimostrare che, tramite opportune trasformazioni, un qualsiasi sistema di vincoli lineari puo' essere posto nella forma standard.

Cenni storici

Principali metodi risolutivi per la programmazione lineare

- Metodo del simplesso
- Metodo dell'ellissoide
- Metodi di punto interno

Metodo del simplesso

Fu introdotto da Dantzig all'inizio degli anni 50. Anche se nella maggior parte delle applicazioni l'algoritmo risulta molto efficiente, vi sono degli esempi nei quali il numero delle iterazioni cresce esponenzialmente rispetto alle dimensioni dello spazio di definizione del problema.

Il metodo dell'ellissoide e di punto interno

Il metodo dell'ellissoide ha avuto origin negli anni 60 e 70 in Unione Sovietica, e' stato introdotto nell'ambito della programmazione lineare da Khachiyian nel 1978. L'idea alla base del metodo e' di determinare una successione di ellissoidi, di dimensioni decrescenti, tali che la regione ammissibile del problema sia contenuta in ciascuno di essi. Il principale contributo di Khachiyian e' stato di dimostrare, in due lavori del 1979 e del 1980, che, sotto opportune ipotesi, il metodo dell'ellissoide, applicato al problema della determinazione di una soluzione di un sistema lineare di di m disequazioni in $\mathbb{R}^n$, ha complessita' polinomiale $O(n^2)$.

Metodi di punto interno

Tali metodi, gia' noti in letteratura per la risoluzione di problemi non lineari, hanno ricevuto un notevole interesse nell'ambito della programmazione lineare dopo l'introduzione del metodo dell'ellissoide. L'Algoritmo di Karmarkar del 1984 ne e' il primo esempio. La complessita' dell' Algoritmo di Karmarkar e' polinomiale e la sua efficienza paragonabile al metodo del simplesso.

Poliedri

La regione ammissibile P del problema $(\mathcal{P})$ e' un poliedro.

Definizione.

Si dice poliedro l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$.

La rappresentazione algebrica di un poliedro P e' data, in generale, da un sistema lineare di disuguaglianze, ossia

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una matrice e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore.

Osservazione.

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di disuguaglianze o uguaglianze (ciascuna di queste ultime può essere rimpiazzata equivalentemente da una coppia di disuguaglianze) è un poliedro.

Facce di un poliedro

- Sia $I := \{1, \ldots, m\}$ l'insieme degli indici delle righe di A e degli elementi di b; $I' \subseteq I$ un generico sottoinsieme di indici;
- $A_{I'}$ e $b_{I'}$ denotano, rispettivamente, la sottomatrice di A ed il sottovettore di b associati all'insieme di indici I';

Definizione. Dato un sottoinsieme di indici $I' \subseteq I$, l'insieme

$$F_{I'} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : A_{I'}x = b_{I'};\ A_{I \setminus I'}x \leq b_{I \setminus I'} \right\},$$

è detto *faccia* del poliedro P.

Vertici di un poliedro

Definizione.

Un punto $\bar{x} \in P$ è detto *vertice* se e solo se non è possibile trovare x', $x'' \in P$ tali che $\bar{x} \in (x', x'')$.

Teorema

$\bar{x} \in P$ e' un vertice se e solo se coincide con una faccia di dimensione 0, ossia costituita dal un singolo punto.

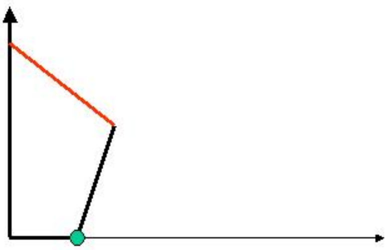
Esempio. Consideriamo il poliedro P definito dal sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x} := (0, 0)$ e' un vertice. $\bar{x} := (1/2, 0)$ e' un vertice.

Facce e vertici di un poliedro

Il segmento in rosso e' una faccia del poliedro, il punto in verde un vertice.



Il metodo delle curve di livello

Un problema di produzione

Un'azienda vinicola produce due diverse qualita' Q_1 e Q_2 di un vino, avendo a disposizione 300 ettolitri di mosto. L'azienda assume le seguenti ipotesi:

- per produrre un ettolitro di ciascuna qualita' sono necessarie 12 ore di lavorazione e 8 ettolitri di mosto per la qualita' Q_1 e 5 ore di lavorazione e 15 ettolitri di mosto per la qualita' Q_2;
- i prezzi di vendita per ettolitro sono 20 euro per Q_1 e 18 euro per Q_2;
- le ore di lavorazione per la produzione complessiva del vino di qualita' Q_1 devono essere minori di 120 piu' le ore complessive per la produzione della qualita' Q_2.

Si vuole formulare un problema di programmazione lineare per determinare le quantita' di Q_1 e Q_2 che e' conveniente produrre per massimizzare il ricavo complessivo derivante dalla vendita.

Il modello

Siano x_1 e x_2 gli ettolitri delle qualita' Q_1 e Q_2 prodotte.

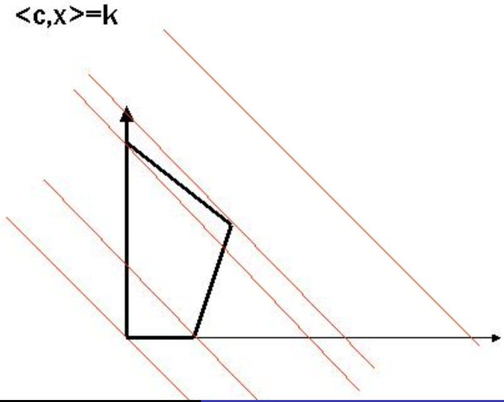
- La funzione obiettivo e' il ricavo globale dato da $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 18x_2$;
- Vincolo relativo al numero di ettolitri di mosto disponibili: $8x_1 + 15x_2 \leq 300$;
- Vincolo relativo alle ore di produzione: $12x_1 \leq 120 + 5x_2$.

Il seguente problema di estremo fornisce la soluzione cercata:

$$\begin{cases} max[20x_1 + 18x_2] \\ 8x_1 + 15x_2 \leq 300 \\ 12x_1 - 5x_2 \leq 120 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

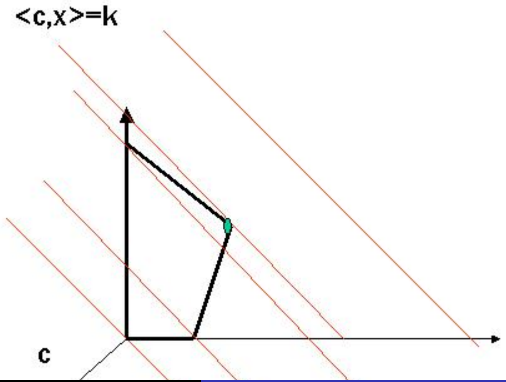
Algoritmo risolutivo: metodo grafico delle curve di livello

Consideriamo il fascio di rette $\langle c, x\rangle = 20x_1 + 18x_2 = k$. Il poliedro in figura definisce la regione ammissibile del problema.



Il fascio di rette $20x_1 + 18x_2 = k$ si sposta verso l'alto al crescere di k.

Il vertice in verde e' l'ultimo punto che e' intersezione della regione ammissibile con una retta del fascio al crescere di k, pertanto tale punto e' di massimo per il problema.



Il seguente sistema fornisce la soluzione cercata:

$$\begin{cases} 8x_1 + 15x_2 = 300 \\ 12x_1 - 5x_2 = 120 \end{cases}$$

Otteniamo la soluzione $(x_1^*, x_2^*) = (15, 12)$.

Analisi dei risultati

- La produzione ottimale e' data da 15 ettolitri per la qualita' $Q1$ e 12 ettolitri per la qualita' $Q2$,
- Il ricavo ottenibile da tale produzione e' $f(x_1^*, x_2^*) = 20x_1^* + 18x_2^* = 20 \cdot 15 + 18 \cdot 12 = 516$ Euro.

Teorema.

L'insieme dei punti di minimo del problema $(\mathcal{P})$ e' una faccia del poliedro P che definisce la regione ammissibile.

Una descrizione informale del metodo del simplesso

- Analizzando piu' in dettaglio il metodo delle curve di livello e' facile osservare che l'insieme delle soluzioni ottime del problema $(\mathcal{P})$, se non vuoto, contiene sempre un vertice del poliedro P.
- L'algoritmo del simplesso analizza in maniera "intelligente" l'insieme dei vertici del poliedro P;
- A partire da un vertice del poliedro P, l'algoritmo ne valuta l'ottimalita' ed in caso contrario passa a considerare un vertice adiacente tale che la funzione obbiettivo risulti di valore maggiore.
- Se sappiamo a priori che il problema $(\mathcal{P})$ ammette una soluzione ottima, essendo il numero di vertici finito, l'algoritmo termina in un numero finito di passi.

Esempio

Consideramo il problema di produzione. I vertici di P sono i punti $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 20)$ e $(15, 12)$. L'algoritmo del simplesso a partire dal punto $(0, 0)$ si sposta su $(10, 0)$ o $(0, 20)$ e infine sul punto ottimale $(15, 12)$.

Dualitá

Il problema duale

Consideriamo un problema di programmazione lineare nella forma:

$$\max \langle c, x \rangle$$

con i vincoli

$$x \in P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Il problema duale

Il problema duale e' dato da:

$$\min \langle y, b \rangle$$

con i vincoli

$$y \in D := \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, \quad y \geq 0\}.$$

Relazioni fondamentali

Dualita' debole

Risulta:

$$\langle c, x\rangle \leq \langle y, b\rangle, \quad \forall x \in P, \ \forall y \in D.$$

Dualita' forte

$\bar{x} \in P$ e $\bar{y} \in D$ sono le rispettive soluzioni ottime del problema primale e del problema duale se e solo se risulta:

$$\langle c, \bar{x}\rangle = \langle \bar{y}, b\rangle.$$

Condizioni di ottimalita'

Le precedenti relazioni consentono di riformulare un problema di programmazione lineare mediante un opportuno sistema lineare.

Teorema

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e' soluzione ottima del problema $(\mathcal{P})$ se e solo se esiste $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ sia soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \\ Ax \leq b \\ \langle c, x \rangle = \langle y, b \rangle \end{cases} \qquad (1)$$

Definizione (Base)

Chiameremo *base* un insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$, tale che la sottomatrice A_B, ottenuta da A estraendo le righe A_i con indici $i \in B$, sia invertibile, cioe' $\det(A_B) \neq 0$.
La matrice A_B si chiamerá matrice di base.

Indicheremo con N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B.
Dalla partizione degli m indici di riga in B e N si ha l'analoga partizione per i vettori b e $y \in \mathbb{R}^m$ e per la matrice A:

$$b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix}.$$

Data una base B, definiamo:

Soluzione di base primale: $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$

Soluzione di base duale: $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$, $\bar{y}_N = 0$.

Soluzioni di base ammissibili

Una soluzione di base primale $\bar{x}$ é ammissibile, se $\bar{x} \in P$, ossia se per ogni $i \in N$ si ha $A_i \, \bar{x} \leq b_i$.
Una soluzione di base duale $\bar{y}$ é ammissibile, se $\bar{y} \in D$, ossia se per ogni $i \in B$ si ha $\bar{y}_i \geq 0$.

Teorema.

(i) Condizione necessaria e sufficiente affinche' un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sia un vertice di P e' che $\bar{x}$ sia una soluzione di base primale ammissibile.

(ii) Condizione necessaria e sufficiente affinche' un vettore $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sia un vertice di D e' che $\bar{y}$ sia una soluzione di base duale ammissibile.

Due soluzioni di base primale e duale associate alla stessa base B vengono dette complementari.
E' facile dimostrare che due soluzioni di base x ed y associate alla stessa base soddisfano la condizione

$$\langle c, x \rangle = \langle y, b \rangle$$

Algoritmo del simplesso

Abbiamo osservato che $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e' soluzione ottima del problema $(\mathcal{P})$ se e solo se esiste $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ sia soluzione del sistema (1). Affinche' cio' accada basta che, data la soluzione di base $\bar{x}$ ammissibile per $(\mathcal{P})$, la soluzione di base duale complementare $\bar{y}$ sia ammissibile.

Descriviamo l'algoritmo del simplesso per la risoluzione di un problema di PL in forma primale standard in cui la matrice A, di dimensione $m \times n$, ha rango uguale a n. L'algoritmo parte da una soluzione di base primale ammissibile (cioe' un vertice). Se la soluzione di base duale complementare é ammissibile, allora esse sono ottime rispettivamente per il primale ed il duale, altrimenti si cambia base. Il cambio di base é definito in modo che se la nuova soluzione di base primale e' diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo cresce, mentre se la nuova soluzione di base primale coincide con quella vecchia, si evita di ciclare sulle stesse basi con opportune regole anticiclo.

Algoritmo del simplesso

1. Trova una base B che genera una soluzione di base primale ammissibile.
2. Calcola la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$ e la soluzione di base duale
$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad \bar{y}_B^{\mathsf{T}} = c^{\mathsf{T}} A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$
3. Se $\bar{y}_B \geq 0$ allora STOP ($\bar{x}$ é ottima per $(\mathcal{P})$ e $\bar{y}$ é ottima per $(\mathcal{D})$).
   Altrimenti calcola l'indice uscente $h = \min\{i \in B : \ \bar{y}_i < 0\}$.
   Poni $W = -A_B^{-1}$ ed indica con W^h la h–esima colonna di W.
4. Se $A_i\, W^h \leq 0$ per ogni $i \in N$ allora STOP ($(\mathcal{P})$ ha valore ottimo $+\infty$ e $(\mathcal{D})$ é vuoto). Altrimenti calcola
   $\theta = \min \left\{ \dfrac{b_i - A_i\, \bar{x}}{A_i\, W^h} : \ i \in N, \ A_i\, W^h > 0 \right\}$, e l'indice entrante
   $k = \min \left\{ i \in N : \ A_i\, W^h > 0, \ \dfrac{b_i - A_i\, \bar{x}}{A_i\, W^h} = \theta \right\}$.
   Aggiorna la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e torna al passo 2.

Esempio

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max(5x_1 - 3x_2) \\ \qquad -x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Applichiamo l'algoritmo del Simplesso a partire dalla base $B = \{1, 5\}$.

Iterazione 1. $B = \{1, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_N^T = 0$, $\bar{y}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$,

$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 1,$

$$W^h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N W^h = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\theta = \min\left\{ \frac{(b_i - A_i\bar{x})}{A_i W^h}, \ A_i W^h > 0, i \in N \right\} = \min\{2, \ \frac{9}{2}\} = 2$$

$$k = \min\left\{ i \in N : \ A_i\, W^h > 0, \ \frac{b_i - A_i\,\bar{x}}{A_i\, W^h} = \theta \right\} = 2.$$

Iterazione 2.

$$B = \{2,5\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \end{bmatrix}, y_N^T = 0,$$

$$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 5,$$

$$W^h = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N W^h = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\theta = \min\left\{\frac{(b_i - A_i\bar{x})}{A_i W^h},\ A_i W^h > 0, i \in N\right\} = \min\{1,\ 3\} = 1$$

$$k = \min\left\{i \in N:\ A_i\, W^h > 0,\ \frac{b_i - A_i\,\bar{x}}{A_i\, W^h} = \theta\right\} = 3.$$

Iterazione 3. $B = \{2, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} =$
$\begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & 7/5 \end{bmatrix},\quad \bar{y}_N^T = 0,$$

$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & -4/5 & 7/5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $h = 2$,

$W^h = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$, $A_N W^h = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$,

$$\theta = \min\{5,\ 5\} = 5 \quad k = \min\{1, 4\} = 1$$

Iterazione 4. $B = \{1,3\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N^T = 0,$$

$$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 5/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

Poiché $\bar{y}_B^T \geq 0$ segue che $\bar{x} = [1,0]^T$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $\bar{y}^T = [4/3, 0, 5/3, 0, 0]$ è una soluzione ottima per il problema duale ad esso associato. Essendo la soluzione ottima duale $\bar{y}^T$ non degenere, la soluzione ottima $\bar{x}$ del problema e' unica.