Modelli matematici ambientali
a.a. 2015/16
Dinamiche di crescita

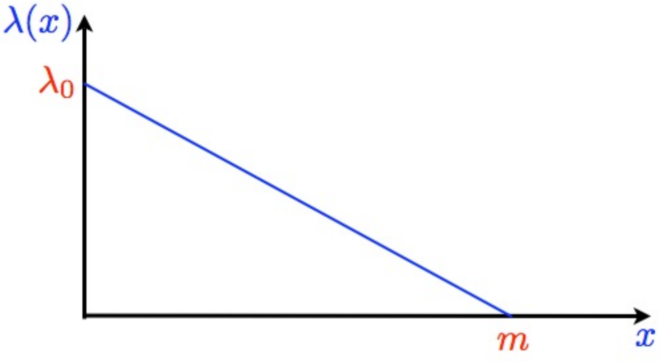
Dinamiche di crescita

Consideriamo la crescita di una popolazione, assumendo che ci siano limiti alle risorse utilizzabili

- x_0 entità della popolazione al tempo $t = 0$
- λ_0 massimo tasso di crescita (nel caso di risorse illimitate)
- $\lambda(x)$ tasso di crescita in funzione della popolazione x
- m massima popolazione sostenibile, date le risorse (capacitá di carico dell'ecosistema)

Possibile andamento della funzione $\lambda(x)$

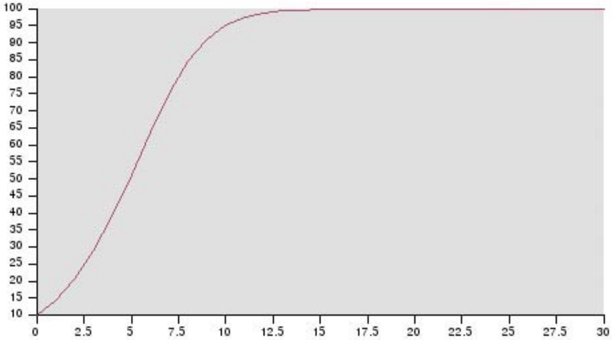
$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{m - x}{m}$$



$$\frac{dx}{dt} = x\lambda(x) = x\lambda_0 \frac{m-x}{m}$$

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t} - 1)}$$

Questa funzione viene detta **logistica** e il suo andamento è:



Integrazione mediante separazione delle variabili

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda_0}{m} x(m-x)$$

Soluzioni costanti

$$x \equiv 0 \qquad x \equiv m$$

Per determinare le altre soluzioni riscriviamo l'equazione come

$$\frac{dx}{x(m-x)} = \frac{\lambda_0}{m} dt$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{x(m-x)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{m-x}\right)$$

$$\int \frac{1}{m}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{m-x}\right)dx = \int \frac{\lambda_0}{m}dt$$

da cui

$$log(x) - log(m-x) = \lambda_0 t + C$$

$$log\left(\frac{x}{m-x}\right) = \lambda_0 t + C$$

$$\frac{x}{m-x} = e^{\lambda_0 t + C}$$

Ricavando x otteniamo la soluzione

$$x(t) = \frac{me^{\lambda_0 t + C}}{1+e^{\lambda_0 t + C}} = \frac{me^{C}e^{\lambda_0 t}}{1+e^{C}e^{\lambda_0 t}}$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow e^{C} = \frac{x_0}{m-x_0}$$

Sostituendo otteniamo la soluzione

$$x(t) = \frac{m\frac{x_0}{m-x_0}e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m-x_0}e^{\lambda_0 t}}$$

da cui moltiplicando numeratore e denominatore per $m - x_0$

$$x(t) = \frac{mx_0 e^{\lambda_0 t}}{m - x_0 + x_0 e^{\lambda_0 t}}$$

Dividendo per m si ha

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t} - 1)}$$

Dinamiche di crescita: punti di equilibrio

In generale la dinamica di una specie può essere definita dall'equazione differenziale

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)),$$

$F(x(t))$ è il tasso di crescita della popolazione.
La popolazione raggiunge un valore di equilibrio per un valore x^* tale che risulti

$$F(x^*) = 0.$$

$x(t) = x^*, \forall t$ e' soluzione dell'equazione differenziale

Stabilita' dell' equilibrio

Un equilibrio può essere stabile o instabile. È stabile quando piccole perturbazioni vengono riassorbite, per cui il sistema ritorna dopo un po' all'equilibrio, o comunque tende all'equilibrio quando $t \to \infty$.

Sia $x(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale avente $x(0)$ come valore iniziale.

Equilibrio stabile

x^* e' una soluzione stabile dell'equazione differenziale se $\forall \epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$, ed inoltre $\epsilon \geq \delta$, tale che

$$|x(0) - x^*| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x^*| < \epsilon, \ \forall t \geq 0$$

Equilibrio asintoticamente stabile

x^* e' una soluzione asintoticamente stabile se e' stabile ed inoltre risulta

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*.$$

Equilibrio instabile

Un punto di equilibrio che non e' stabile viene detto instabile.

Nel caso di un equilibrio asintoticamente stabile, detta $\epsilon(t)$ una perturbazione rispetto all'equilibrio, considerata una soluzione dell'equazione nella forma

$$x(t) = x^* + \epsilon(t)$$

si ha che

$$\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*.$$

Consideriamo la perturbazione rispetto all'equilibrio

$$x(t) = x^* + \epsilon(t),$$

Espandendo in serie di Taylor la funzione F come funzione di x, e trascurando i termini di grado superiore al primo abbiamo

$$F(x^* + \epsilon) = F(x^*) + \frac{dF}{dx}(x^*)\epsilon = F(x^*) + a\epsilon, \quad ove\ a = \frac{dF}{dx}(x^*).$$

Sostituendo $x(t) = x^* + \epsilon(t)$ nell'equazione data e ricordando che $F(x^*) = 0$, si ha

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\epsilon(t)}{dt} = a\epsilon(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\epsilon(t) = \epsilon(0)e^{at}$$

$a < 0 \Longrightarrow$ equilibrio (asintoticamente) stabile

$a > 0 \Longrightarrow$ equilibrio instabile

Teorema

Sia data l'equazione differenziale $x'(t) = F(x(t))$ *ove* F *e' derivabile con continuita'. Allora*

- *Se* $F(x^*) = 0$ *e* $\frac{dF}{dx}(x^*) < 0$*, allora* x^* *e' un punto di equilibrio asintoticamente stabile;*
- *Se* $F(x^*) = 0$ *e* $\frac{dF}{dx}(x^*) > 0$*, allora* x^* *e' un punto di equilibrio instabile;*

Applicazioni al modello di crescita

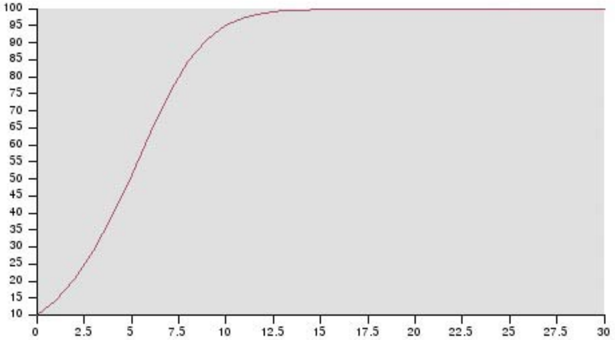
Consideriamo la funzione **logistica**:

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t} - 1)}$$

Osserviamo che

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = m,$$

cosicche' $x^* = m$ e' un punto di equilibrio asintoticamente stabile.



Punti di equilibrio

$$x(t)\lambda_0\frac{m-x(t)}{m}=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc}x^* & = & 0\\ x^* & = & m\end{array}\right.$$

$$x^*=0:\quad a=\frac{d}{dx}\left(\lambda_0\frac{m-x}{m}x\right)\bigg|_{x=0}=\lambda_0\Rightarrow\lambda_0<0$$

$$x^*=m:\quad a=\frac{d}{dx}\left(\lambda_0\frac{m-x}{m}x\right)\bigg|_{x=m}=-\lambda_0\Rightarrow\lambda_0>0$$

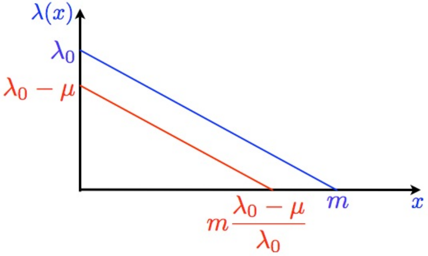
Presenza di un tasso di mortalità costante

Supponiamo ora che $\lambda_0 \frac{m-x}{m}$ sia il tasso di natalitá e che ci sia un **tasso di mortalità** μ costante. Il tasso di crescita sará allora:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \lambda_0 \frac{m-x}{m} - \mu = \frac{\lambda_0 m - \lambda_0 x - \mu m}{m} \\ &= \frac{\lambda_0' m - \lambda_0' \frac{\lambda_0}{\lambda_0'} x}{m} = \lambda_0' \frac{m - \frac{\lambda_0}{\lambda_0'} x}{m} = \lambda_0' \frac{m' - x}{m'}\end{aligned}$$

con

$$\lambda_0' = \lambda_0 - \mu \text{ e } m' = m \frac{\lambda_0'}{\lambda_0} = m \frac{\lambda_0 - \mu}{\lambda_0}$$



Punti di equilibrio

$$x(t)\lambda_0' \frac{m' - x(t)}{m'} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x^* & = & 0 & & \\ x^* & = & m' & = & m\frac{\lambda_0 - \mu}{\lambda_0} \end{array} \right.$$

Ricordando che l'equilibrio è stabile se $a < 0$, si ha

$$x^* = 0 : \quad a = \frac{d}{dx}\left(\lambda_0' \frac{m' - x}{m'} x\right)\Bigg|_{x=0} = \lambda_0' \Rightarrow \lambda_0 < \mu$$

$$x^* = m' : \quad a = \frac{d}{dx}\left(\lambda_0' \frac{m - x}{m} x\right)\Bigg|_{x=m} = -\lambda_0' \Rightarrow \lambda_0 > \mu$$

Esempio 1

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x'(t) = x^2(t) - 1$$

$x^* = \pm 1$ sono punti di equilibrio

$$\frac{dF}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad x^* = 1 \text{ e' punto di equilibrio instabile}$$

$$x^* = -1 \text{ e' punto di equilibrio (asintoticamente) stabile.}$$

Esempio 2

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x'(t) = 1 - \alpha x^2(t), \qquad \alpha > 0$$

$x^* = \pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ sono punti di equilibrio

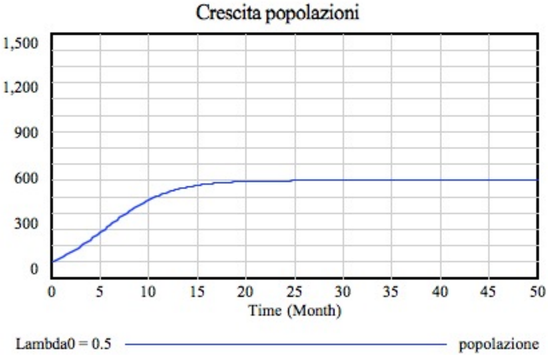
$$\frac{dF}{dx} = -2\alpha x \quad \Rightarrow \quad x^* = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ e' punto di equilibrio instabile}$$

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ e' punto di equilibrio (asintoticamente) stabile.}$$

Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (1)

$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(x)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 0.5$
- $x^* = 1000\frac{0.5-0.2}{0.5} = 600$



Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (2)

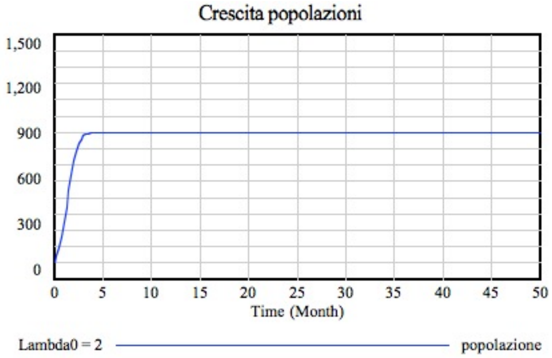
$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(x)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 1$
- $x^* = 1000\frac{1-0.2}{1} = 800$

Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (3)

$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(x)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

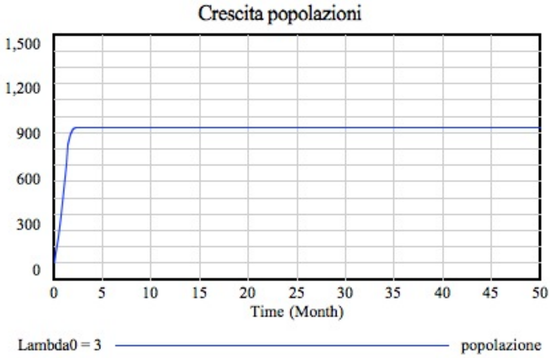
- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 2$
- $x^* = 1000\frac{2-0.2}{2} = 900$



Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (4)

$$x(t+\Delta t) = x(t) + [\lambda(x)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 3$
- $x^* = 1000\frac{3-0.2}{3} = 933.33$



Andamenti (1) – (4) a confronto

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(x)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$