Modelli matematici ambientali
a.a. 2015/16
Introduzione alle equazioni differenziali

Argomenti trattati

- Introduzione ai modelli
- Equazioni differenziali del primo ordine
- Metodi risolutivi:integrazione diretta e discretizzazione
- Equazioni differenziali del secondo ordine
- Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

Obiettivi del corso

- Acquisire la capacità di analizzare in modo formale problemi reali e di costruirne modelli
- Acquisire la capacità di usare alcuni strumenti informatici per la modellazione:
  - MATLAB
  - OCTAVE

Modelli

- I modelli sono lo strumento normale con cui interagiamo con la realtà, la conosciamo, anche se non sempre ne siamo coscienti.
- I modelli sono costruzioni concettuali a vari livelli di astrazione, non sono la realtà.
- I modelli vengono costruiti in modo incrementale .
- I modelli svolgono principalmente funzioni conoscitive.

Linguaggi per rappresentare modelli

I linguaggi che si usano per rappresentare i modelli sono classificati in base alle seguenti caratteristiche:

- espressività : capacità di rappresentare situazioni diverse e complesse
  - metafore
  - linguaggi naturali
- potenza : rigore e precisione nella descrizione; efficacia ed utilizzabilità del modello
  - linguaggi formali
  - modelli matematici

Tipologie di modelli matematici

I modelli che si usano di solito appartengono alle seguenti categorie:

- modelli statici
- modelli dinamici

che, a loro volta, possono essere suddivisi in

- I modelli deterministici
- I modelli probabilistici

Modelli matematici

- Problemi di estremo vincolato;
- Sistemi di equazioni;
- Sistemi di equazioni differenziali;
- Matrici;
- Grafi;

Equazioni differenziali

Definizione

Un'equazione differenziale e' un'equazione della forma

$$F(t, u, u', u'', ..., u^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

che stabilisce una relazione tra la variabile indipendente t, la funzione incognita $u(t)$ e le sue derivate $u'(t), ..., u^{(n)}(t)$.

La funzione $u(t)$ e' soluzione dell'equazione differenziale (1) se $u(t)$ e'continua su (a, b) insieme con le sue derivate $u'(t), ..., u^{(n)}(t)$ e, per ogni $t \in (a, b)$ la relazione (1) e' soddisfatta.

Esempio: ricerca di una primitiva

L'esempio piu' semplice di equazione differenziale e' quello della ricerca di una primitiva di una data funzione $f(t)$:

$$u'(t) = f(t) \tag{2}$$

E' noto che, se f e' continua su $[a, b]$, la soluzione della (2) e' data da

$$u(t) = \int_a^t f(s)ds + C \quad (\text{simbolicamente } \int f(t)dt + C)$$

ove C e' una costante arbitraria.

Esempi:integrali elementari

- $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \qquad (u'(t) = t^n)$
- $\int \frac{1}{t} dt = log|t| + C, \qquad (u'(t) = \frac{1}{t})$
- $\int \frac{1}{t^2+1} dt = arctg(t) + C, \qquad (u'(t) = \frac{1}{t^2+1})$
- $\int e^t dt = e^t + C$
- $\int sin(t) dt = -cos(t) + C$
- $\int cos(t) dt = sin(t) + C$
- $\int \frac{1}{cos^2(t)} dt = tg(t) + C$

Equazioni del primo ordine

Un'equazione differenziale della forma

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

e' detta del primo ordine (perche' contiene solo la funzione incognita e la sua derivata prima), in forma normale (perche' la derivata compare isolata a primo membro). In particolare, se f e' lineare rispetto ad u l'equazione e' detta lineare.

Equazioni lineari

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine ha la forma:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \tag{3}$$

Esempio

$$u'(t) = u(t) + 2 \tag{4}$$

Soluzione generale

La soluzione generale dell'equazione

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

e' data da

$$u(t) = e^{A(t)}\Big(\int e^{-A(t)} b(t)dt + C\Big)$$

ove

$$A(t) = \int a(t)dt$$

e' una primitiva della funzione $a(t)$ e C e' una costante arbitraria.

Osservazione

Il problema della determinazione della soluzione si riduce al calcolo di opportune primitive

Esempio

$$u'(t) = u(t) + 2$$

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 2$$

$$A(t) = \int a(t)dt = \int 1dt = t$$

$$\int e^{-A(t)} b(t)dt = \int e^{-t} 2dt = -2e^{-t}$$

Soluzione generale

$$u(t) = e^t(-2e^{-t} + C) = Ce^t - 2$$

Equazione omogenea associata

Ponendo $b(t) \equiv 0$ si ottiene l'equazione

$$u'(t) = a(t)u(t)$$

detta equazione omogenea associata a quella assegnata.

Soluzione dell'equazione omogenea

$$u(t) = Ce^{A(t)} \quad \text{ove } A(t) = \int a(t)dt$$

e' una primitiva della funzione $a(t)$ e C e' una costante arbitraria.

Teorema

Se V_0 e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea e $\bar{u}$ e' una soluzione particolare dell'equazione assegnata allora l'insieme delle soluzioni del'equazione assegnata e' dato da:

$$u(t) = \bar{u}(t) + w(t), \quad w \in V_0$$

Dall'espressione della soluzione generale

$$u(t) = e^{A(t)}\Big(\int e^{-A(t)} b(t) dt + C\Big)$$

(ove $A(t) = \int a(t)dt$)

si ha che

$$u(t) = e^{A(t)}\Big(\int e^{-A(t)} b(t) dt\Big)$$

e' una soluzione particolare dell'equazione assegnata.

Un semplice esempio: la dinamica di una popolazione

- Popolazione: *P(t)*
- Tasso di natalità: N costante
- Tasso di mortalità: M costante
- Flusso di natalità: *N x P(t)*
- Flusso di mortalità: *M x P(t)*

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = (N - M)P(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (N - M)P(t)$$

Supponendo Δt sufficientemente piccolo:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + ((N - M)P(t))\Delta t$$

Soluzione tramite formula generale

Nel nostro caso

$$P'(t) = a(t)P(t)$$

ove $a(t) = N - M$. Dalla soluzione generale

$$P(t) = e^{A(t)}\left(\int e^{-A(t)}b(t)dt + C\right)$$

(ove $A(t) = \int a(t)dt$)

ponendo $b(t) \equiv 0$ si ottiene la

Soluzione

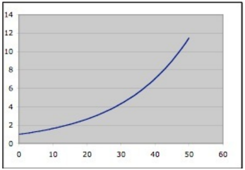
$$P(t) = Ce^{A(t)} \quad \text{ove } A(t) = \int (N - M)dt = (N - M)t$$

.

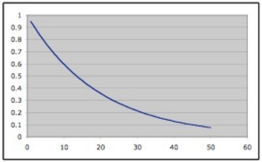
$P(t) = Ce^{(N-M)t}$ e ponendo $t = 0$ si ha:

$$P(0) = C$$

$$\boxed{P(t) = P(0)e^{(N-M)t}}$$



$N > M$

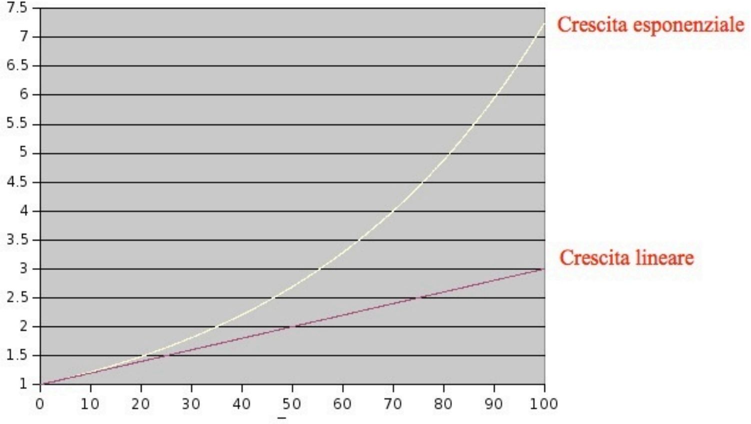


$N < M$

Crescita esponenziale: i dati

	Crescita lineare (+.02)	Crescita esponenziale tasso del 0.02
0	1.0000	1.0000
1	1.0200	1.0200
2	1.0400	1.0404
3	1.0600	1.0612
4	1.0800	1.0824
5	1.1000	1.1041
6	1.1200	1.1262
7	1.1400	1.1487
8	1.1600	1.1717
9	1.1800	1.1951
10	1.2000	1.2190

Crescita esponenziale: andamenti a confronto



Crescita lineare $P(t) = 1 + 0.02 * t$.
Crescita esponenziale $P(t) = e^{0.02*t}$: con un tasso di crescita del 2% annuo, si ha un raddoppio ogni 35 anni

Esempio 2

- Tasso di natalità: N costante
- Tasso di mortalità: $M(t) = \frac{M}{t+1}$

$$P'(t) = (N - M(t))P(t) = (N - \frac{M}{t+1})P(t)$$

$$a(t) = N - \frac{M}{t+1}, \quad b(t) = 0$$

$$A(t) = \int (N - \frac{M}{t+1})dt = Nt - Mlog(t+1)$$

$$P(t) = Ce^{Nt - Mlog(t+1)} = C\frac{e^{Nt}}{e^{Mlog(t+1)}} = C\frac{e^{Nt}}{(t+1)^M}$$

Soluzione

$$P(t) = P(0)\frac{e^{Nt}}{(t+1)^M}$$

Esempio 3

- Tasso di natalità: $N(t) = Nt$
- Tasso di mortalità: $M(t) = M\sqrt{t}$

$$P'(t) = (N(t) - M(t))P(t) = (Nt - M\sqrt{t})P(t)$$

$$a(t) = Nt - M\sqrt{t}, \quad b(t) = 0$$

$$A(t) = \int (Nt - M\sqrt{t})dt = N\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}Mt\sqrt{t}$$

da cui
$$P(t) = Ce^{N\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}Mt\sqrt{t}}$$

Soluzione

$$P(t) = P(0)e^{N\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}Mt\sqrt{t}}$$

Metodi risolutivi

Abbiamo gia' visto la formula risolutiva per una equazione differenziale lineare del primo ordine.
Analizziamo brevemente

- le equazioni differenziali a variabili separabili
- il metodo di approssimazione di Eulero

Equazioni a variabili a separabili

Si chiama *equazione a variabili separabili* un'equazione differenziale del primo ordine della forma

$$u'(t) = f(u)g(t)$$

Osserviamo preliminarmente che se α e' uno zero della funzione f

$$f(\alpha) = 0$$

allora la funzione costante $u \equiv \alpha$ e' soluzione dell'equazione.

Supponiamo $f(u) \neq 0$. Utilizzando la simbologia

$$\frac{du}{dt} = f(u)g(t)$$

da cui

$$\frac{du}{f(u)} = g(t)dt$$

integrando ambo i membri si perviene alla soluzione nella forma

$$\int \frac{du}{f(u)} = \int g(t)dt + C$$

Esempio 2: soluzione tramite separazione delle variabili

- Tasso di natalità: N costante
- Tasso di mortalità: $M(t) = \frac{M}{t+1}$

$$P'(t) = (N - M(t))P(t) = (N - \frac{M}{t+1})P(t)$$

$$\frac{dP}{dt} = (N - \frac{M}{t+1})P(t)$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int (N - \frac{M}{t+1}))dt$$

$$log(P(t)) = Nt - Mlog(t+1) + C$$

$$P(t) = e^{Nt - Mlog(t+1) + C} = e^C \frac{e^{Nt}}{e^{Mlog(t+1)}} = C_1 \frac{e^{Nt}}{(t+1)^M}$$

Ponendo $t = 0$, si ha $C_1 = P(0)$ e $P(t) = P(0)\frac{e^{Nt}}{(t+1)^M}$

Esempio 3: soluzione tramite separazione delle variabili

- Tasso di natalità: $N(t) = Nt$
- Tasso di mortalità: $M(t) = M\sqrt{t}$

$$P'(t) = (N(t) - M(t))P(t) = (Nt - M\sqrt{t})P(t)$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int (Nt - M\sqrt{t}))dt$$

$$log(P(t)) = N\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}Mt\sqrt{t} + C$$

$$P(t) = e^{N\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}Mt\sqrt{t} + C} = e^C e^{N\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}Mt\sqrt{t}}$$

Ponendo $t = 0$ si ha $e^C = P(0)$ e $P(t) = P(0)e^{N\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}Mt\sqrt{t}}$

Esercizio 1

- Tasso di natalità: $N(t) = \frac{N}{t+1}$
- Tasso di mortalità: $M(t) = M$

$$P'(t) = (\frac{N}{t+1} - M)P(t)$$

Esercizio 2

Risolvere l'equazione differenziale

$$u'(t) = -\frac{1}{t}u + t^2 + 1$$

Esercizio 3

Risolvere l'equazione differenziale

$$u'(t) = tu + t$$

Discretizzazione (1)

$$\frac{dP(t)}{dt} = (N - M)P(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (N - M)P(t)$$

$$\Downarrow$$

$$P(t + \Delta t) = P(t) + (N - M)P(t)\Delta t$$

Metodo di Eulero

Consideriamo l'equazione

$$u'(t) = f(t, u)$$

La soluzione avente un fissato punto iniziale puo' essere approssimata tramite una linea spezzata che congiunge i punti (t_i, u_i) ove $u_i = u(t_i)$, $i = 1, 2, ...$

- (t_0, u_0) e' il punto iniziale
- $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
- Δt e' il passo del processo
- $u_{i+1} = u_i + f(t_i, u_i)\Delta t$, $i = 1, 2, ...$

$$P(t_{i+1}) = P(t_i) + P(t_i)(N - M)\Delta t = P(t_i)(1 + (N - M)\Delta t)$$

In generale avremo, supponendo Δt costante,

$$P(t_1) = P(t_0)(1 + (N - M)\Delta t)$$

$$P(t_2) = P(t_1)(1 + (N - M)\Delta t) = P(t_0)(1 + (N - M)\Delta t)^2,$$

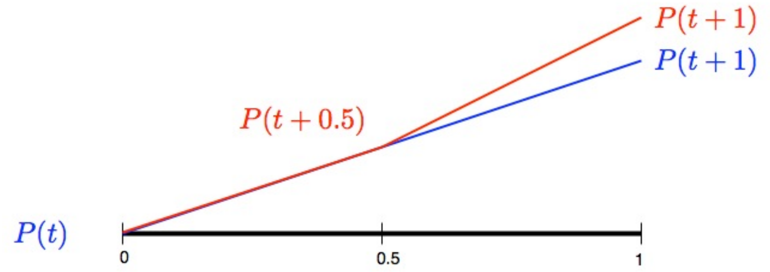
$$P(t_i) = P(t_0)(1 + (N - M)\Delta t)^i, \quad i = 1, 2, ...$$

Osservazione

$(N - M)\Delta t > 0$ (ossia $N > M$) $\Rightarrow$ $P(t_i) \to +\infty$, $i \to +\infty$;
$-1 < (N - M)\Delta t < 0$ (ossia $N < M$, $\Delta t < 1$) $\Rightarrow$ $P(t_i) \to 0$;
$(N - M)\Delta t = 0$ (ossia $N = M$) $\Rightarrow$ $P(t_i) = P(t_0)$, $i = 1, 2, ...$

Se $\Delta t = 1$:

$$\begin{aligned} P(t+0.5) &= P(t) + P(t)(N-M)0.5 = P(t)(1+0.5(N-M)) \\ P(t+1) &= P(t+0.5)(1+0.5(N-M)) = P(t)(1+0.5(N-M))^2 \end{aligned}$$



Una simulazione

	A	B	C	D	E
1	**Anni**	**Pop. (DT=1)**	**Pop. (DT=0.5)**	**Natalita'**	**Mortalita'**
2	0	1.000.000	1.000.000		
3	1	1.020.000	1.020.100	0,05	0,03
4	2	1.040.400	1.040.604		
5	3	1.061.208	1.061.520		
6	4	1.082.432	1.082.857		
7	5	1.104.081	1.104.622		
8	6	1.126.162	1.126.825		
9	7	1.148.686	1.149.474		
10	8	1.171.659	1.172.579		
11	9	1.195.093	1.196.147		
12	10	1.218.994	1.220.190		
13	11	1.243.374	1.244.716		
14	12	1.268.242	1.269.735		
15	13	1.293.607	1.295.256		
16	14	1.319.479	1.321.291		
17	15	1.345.868	1.347.849		
18	16	1.372.786	1.374.941		
19	17	1.400.241	1.402.577		
20	18	1.428.246	1.430.769		
21	19	1.456.811	1.459.527		
22	20	1.485.947	1.488.864		
23	21	1.515.666	1.518.790		
24	22	1.545.980	1.549.318		
25	23	1.576.899	1.580.459		
26	24	1.608.437	1.612.226		
27	25	1.640.606	1.644.632		
28	26	1.673.418	1.677.689		
29	27	1.706.886	1.711.410		
30	28	1.741.024	1.745.810		
31	29	1.775.845	1.780.901		
32	30	1.811.362	1.816.697		

Consideriamo un'equazione lineare a coefficienti costanti:

$$u'' + au' + bu = f(t)$$

L'equazione omogenea associata e':

$$u'' + au' + bu = 0 \tag{5}$$

Cercando una soluzione particolare della forma $u(t) = e^{\alpha t}$, sostituendo nella (5), siamo ricondotti a risolvere l'equazione numerica

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

Equazioni omogenee del secondo ordine

$$u'' + au' + bu = 0$$

Risolvendo l'equazione $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, si possono avere vari casi:

- L'equazione ammette due radici reali e distinte
- L'equazione ammette due radici reali coincidenti
- L'equazione ammette due radici complesse coniugate

Trattiamo in successivi esempi i precedenti casi.

Radici reali e distinte

Siano α_1, α_2 le radici, allora la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea e'

$$u(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

Esempio

Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' + 3u' + 2u = 0$$

Risolvendo l'equazione numerica associata $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$, troviamo

$$\alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = -2$$

da cui segue che la soluzione generale dell'equazione e' data da:

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Esempio

Radici reali coincidenti

Siano $\alpha_1 = \alpha_2$ le radici, allora la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea e'

$$u(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 t e^{\alpha_1 t}$$

Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' - 2u' + u = 0$$

Risolvendo l'equazione numerica associata $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$, troviamo

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1$$

da cui segue che la soluzione generale dell'equazione e' data da:

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

Esempio

Radici complesse

Siano $\alpha = \gamma \pm \omega i$ le radici, allora la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea e'

$$u(t) = c_1 e^{\gamma t} sen(\omega t) + c_2 e^{\gamma t} cos(\omega t)$$

Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' + 2u' + 5u = 0$$

Risolvendo l'equazione numerica associata $\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0$, troviamo

$$\alpha = -1 \pm 2i$$

da cui segue che la soluzione generale dell'equazione e' data da:

$$u(t) = c_1 e^{-t} sen(2t) + c_2 e^{-t} cos(2t)$$

Esercizio

Consideriamo l'equazione differenziale non omogenea

$$u'' = e^t + 1$$

Ponendo $y = u'$ otteniamo

$$y' = e^t + 1$$

da cui segue che

$$y(t) = e^t + t + c_1$$
$$u' = e^t + t + c_1$$

Integrando nuovamente, la soluzione generale dell'equazione e' data da:

$$u(t) = e^t + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Sistemi di equazioni differenziali lineari

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases}$$

Derivando la prima equazione otteniamo

$$u_1'' = a_{11}u_1' + a_{12}u_2'$$

Supponiamo $a_{12} \neq 0$: risolvendo rispetto a u_2' abbiamo

$$u_2' = \frac{u_1'' - a_{11}u_1'}{a_{12}}.$$

Sempre dalla prima equazione abbiamo

$$u_2 = \frac{u_1' - a_{11}u_1}{a_{12}}.$$

Sostituendo u_2' e u_2 nella seconda equazione otteniamo:

$$\frac{u_1'' - a_{11} u_1'}{a_{12}} = a_{21} u_1 + a_{22} \frac{u_1' - a_{11} u_1}{a_{12}}.$$

da cui

$$u_1'' - u_1'(a_{11} + a_{22}) + u_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Questa e' un' equazione lineare del secondo ordine risolubile con il metodo descritto in precedenza.

Osservazione

E' possibile dimostrare che le radici dell'equazione numerica associata alla precedente equazione differenziale

$$\alpha^2 - \alpha(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

coincidono con gli autovalori della matrice A di ordine 2 avente componenti a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Esempio

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + u_2 \\ u_2' = u_1 - u_2 \end{cases}$$

Derivando la prima equazione otteniamo

$$u_1'' = u_1' + u_2'$$

Risolvendo rispetto a u_2' abbiamo

$$u_2' = u_1'' - u_1'.$$

Sempre dalla prima equazione abbiamo

$$u_2 = u_1' - u_1.$$

Sostituendo u_2' e u_2 nella seconda equazione otteniamo:

$$u_1'' - u_1' = u_1 - u_1' + u_1$$

ossia $\qquad u_1'' - 2u_1 = 0$

Risolviamo l'equazione

$$u_1'' - 2u_1 = 0$$

L'equazione numerica associata e'

$$\alpha^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}$$

da cui

$$u_1(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

e

$$u_2(t) = c_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} - c_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}$$

Casi particolari

Nel caso in cui nel sistema

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases}$$

si avesse $a_{12} = 0$,

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}u_1 \\ u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases}$$

allora la prima equazione e' direttamente risolubile. Otteniamo

$$u_1(t) = c_1 e^{a_{11}t}$$

da cui

$$u_2'(t) = a_{21}c_1 e^{a_{11}t} + a_{22}u_2(t)$$

Quest'ultima equazione e' lineare del primo ordine.

Punti di equilibrio di un sistema di equazioni differenziali lineare

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases} \tag{6}$$

Un punto di equilibrio del sistema e' una soluzione (u_1^*, u_2^*) del sistema numerico

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = 0 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = 0 \end{cases}$$

Chiaramente, se la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo allora $(0, 0)$ e' l'unico punto di equilibrio del sistema.

Stabilita' del punto di equilibrio $(0, 0)$

Vogliamo stabilire sotto quali condizioni il punto di equilibrio $(0, 0)$ e' asintoticamente stabile ossia risulti

$$\lim_{t \to +\infty} (u_1(t), u_2(t)) = (0, 0)$$

per ogni soluzione $(u_1(t), u_2(t))$ del sistema dato.
L' analisi dei metodi risolutivi precedentemente esposti consente di stabilire il seguente risultato:

Teorema 1

Condizione necessaria e sufficiente affinche' il punto di equilibrio $(0, 0)$ sia asintoticamente stabile per il sistema (6) e' che la matrice A abbia autovalori aventi tutti parte reale negativa.

Punti di equilibrio di un sistema non omogeneo

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineari non omogeneo

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + b_1 \\ u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + b_2 \end{cases} \tag{7}$$

Un punto di equilibrio del sistema e' una soluzione (u_1^*, u_2^*) del sistema numerico

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + b_1 = 0 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + b_2 = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema (7) puo' essere rappresentato nella forma

$$(u_1^*, u_2^*) + (u_1, u_2), \quad (u_1, u_2) \in S,$$

ove S e' l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo (6).

Stabilita' di un punto di equilibrio

Affinche' il punto di equilibrio (u_1^*, u_2^*) sia asintoticamente stabile deve risultare

$$\lim_{t \to +\infty} (u_1^* + u_1(t), u_2^* + u_2(t)) = (u_1^*, u_2^*)$$

ossia

$$\lim_{t \to +\infty} (u_1(t), u_2(t)) = (0, 0)$$

per ogni soluzione $(u_1(t), u_2(t))$ del sistema omogeneo, cioe' il punto $(0, 0)$ dovra' essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema omogeneo (6).
Il Teorema 1 consente di stabilire il seguente risultato:

Teorema 2

Condizione necessaria e sufficiente affinche' il punto di equilibrio (u_1^*, u_2^*) sia asintoticamente stabile per il sistema (7) e' che la matrice A abbia autovalori aventi tutti parte reale negativa.

Esempio

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + u_2 - 1 \\ u_2' = u_1 - u_2 - 1 \end{cases}$$

Il punto di equilibrio e' soluzione del sistema

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - 1 = 0 \\ u_1 - u_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo il punto di equilibrio $(1, 0)$. La matrice associata al sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

E' facile calcolare che gli autovalori della matrice sono $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, cosicche' $(1, 0)$ e' un punto di equilibrio instabile.