Introduzione ai modelli

Giandomenico Mastroeni

Corso di Modelli matematici ambientali A.A. 2018/19

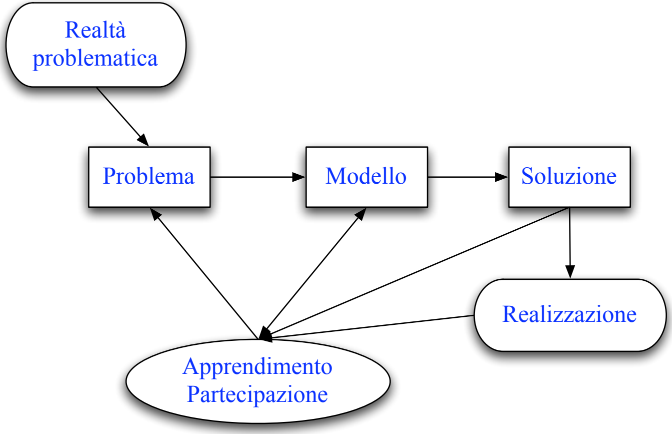
Contenuti delle lezioni

1. La metodologia della matematica applicata
2. Problemi e modelli
3. Modelli matematici
4. Un modello di programmazione dei trasporti
5. Il problema della dieta
6. Il problema di assegnamento
7. Il problema di copertura

La metodologia della matematica applicata

- Problema reale
- Definizione del modello matematico
- Algoritmo risolutivo
- Analisi dei risultati

Processo di apprendimento o decisionale



Reperimento dei dati

Il problema reale, deve essere caratterizzato dalla possibilita' di reperire dati sufficientemente corretti ed esaustivi per la formulazione di un opportuno modello matematico.

Definizione degli obbiettivi

Ad esempio, determinare la quantita' di un inquinante presente in un materiale

Definizione dei vincoli

La composizione del materiale analizzato

Modelli

Una definizione comune di modello: persona o cosa che puo' essere portata come esempio da imitare.

- modelli sono lo strumento normale con cui interagiamo con la realtá e la conosciamo, anche se non sempre ne siamo coscienti.
- modelli sono costruzioni concettuali a vari livelli di astrazione, non sono la realtà.
- modelli vengono costruiti in modo incrementale .
- modelli svolgono principalmente funzioni conoscitive.

Linguaggi per rappresentare modelli

I linguaggi che si usano per rappresentare i modelli possono essere classificati in base alle seguenti caratteristiche:

- espressività : capacità di rappresentare situazioni diverse e complesse (ad esempio di tipo emozionale). Linguaggi naturali.
  - metafore
  - linguaggi letterari, musicali.
- rigore e precisione nella descrizione: capacitá di rappresentare eventi quantificabili, efficacia ed utilizzabilitá computazionale del modello
  - linguaggi formali
  - linguaggi matematici

Modelli formali

I modelli svolgono il duplice ruolo di:

- strumenti di apprendimento;
- strumenti decisionali.

I modelli, infatti, rappresentano un modo di diffondere la conoscenza e di far partecipare vari attori al processo decisionale. La costruzione di un modello è un processo a due vie: da un lato i nostri modelli mentali e dall'altro la realtá in una continua interazione attraverso un processo di confronto. Inoltre l'apprendimento ha anche una caratteristica partecipatoria: procede attraverso il coinvolgimento di diversi attori.
I modelli , inoltre, consentono di analizzare e proporre azioni organizzate per modificare la situazione corrente e produrre la soluzione voluta.

Modelli matematici

Un modello matematico é una descrizione del problema reale mediante l'uso del linguaggio matematico e viene formulato a partire da un insieme di ipotesi sul problema reale che devono essere adeguatamente motivate. Tali ipotesi costituiscono i limiti del modello studiato e devono essere sempre tenute in considerazione, in particolar modo nell'analisi dei risultati ottenuti.

Tipologie di modelli

- Modelli deterministici: i dati del problema sono valori certi;
- Modelli probabilistici:i dati sono caratterizzati da una distribuzione di probabilita';
- Modelli dinamici: i dati del problema dipendono dal tempo; in tal caso, l'output del modello e' una funzione del tempo;
- Modelli statici: i dati del problema sono fissati e non variano in funzione del tempo.

Modelli matematici

Problemi di ottimizzazione vincolata

Determinazione del massimo o del minimo di una funzione

$$\min(\max)\ f(x) \quad x \in R$$

$f(x)$ viene detta "funzione obbiettivo".
L'insieme R viene detto "regione ammissibile" del problema.

Sistemi di equazioni lineari e non lineari

Equazioni e sistemi di equazioni differenziali lineari e non lineari

Modelli basati sulla teoria dei grafi

Algoritmo risolutivo

- Un algoritmo e' una sequenza di istruzioni univocamente determinate che portino in un tempo limitato ad una soluzione del problema o ad una sua opportuna approssimazione.
- Un algoritmo determina una particolare soluzione e non necessariamente tutto l'insieme delle possibili soluzioni.
- Gli algoritmi piu' comuni sono quelli iterativi mediante i quali viene generata una successione di punti convergente ad una soluzione ottimale del problema.

Analisi dei risultati

La ricaduta dei risultati ottenuti sulla formulazione del problema reale (feedback) e' di fondamentale importanza: riesaminando la formulazione del problema e confrontandola con il modello si possono evidenziare eventuali incongruenze o lacune sui dati utilizzati.
Un ulteriore esame della validita' del modello puo' essere effettuato variando i parametri di input e controllando se l'output e' compatibile con tali variazioni: tale esame e' particolarmente efficace quando vengano assegnati ai parametri valori prossimi agli estremi del loro intervallo di variazione.

Problemi di ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione consiste nel determinare un punto $x \in R \subseteq X$ che renda minimo (o massimo) il valore di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, ove X e' un opportuno insieme. Tale problema viene indicato con la notazione

$$\min_{x \in R} \; (\max) \; f(x). \tag{1}$$

Dalla relazione

$$\max_{x \in R} \; f(x) = -\min_{x \in R} \; (-f(x)),$$

segue che il problema della ricerca del massimo di una funzione puo' essere ricondotto a quello della ricerca del minimo.

Osservazione

Se $R = X$, il problema (1) si dice non vincolato.

Problemi di programmazione matematica

Un problema di programmazione matematica e' un problema di ottimizzazione nel quale $X = \mathbb{R}^n$, ed inoltre i vincoli sono espressi mediante funzioni, ossia, l'insieme R e' definito nella forma

$$R := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ \ i = 1, .., p,\ \ h_j(x) = 0,\ \ j = 1, .., m\},$$

ove $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Useremo la notazione:

$$g(x) := (g_1(x), .., g_p(x))^T, \quad h(x) := (h_1(x), .., h_m(x))^T.$$

Definizione

Si definisce "problema di programmazione matematica", il problema:

$$\min_{x \in R}\ (\max_{x \in R})\ f(x) \tag{2}$$

ove $R := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ \ h(x) = 0, \}$.

La funzione f viene anche detta "funzione obbiettivo" mentre g ed h sono dette funzioni vincolari.

A seconda delle proprieta' della funzione obbiettivo e delle funzioni vincolari, si distiguono varie classi di problemi di programmazione matematica.
Nel caso in cui le funzioni siano lineari, (2) e' detto "problema di programmazione lineare" le cui formulazioni sono della forma:

$$\begin{cases} \min\ (\max) \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ Ax = b, \quad (Ax \le b) \\ x \ge 0 \end{cases}$$

ove $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
(Spesso si usa la notazione: $\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$).

Osservazione

Mediante opportune trasformazioni, e' sempre possibile ricondursi ad una qualsiasi delle precedenti formulazioni.

Un problema di programmazione dei trasporti

Siano dati un insieme $A_1, A_2, .., A_m$ di origini nelle quali e' disponibile la quantita' $a_1, a_2, .., a_m$ di un materiale omogeneo che si desidera trasportare nelle destinazioni $B_1, B_2, .., B_n$ che hanno capacita' di ricezione di una quantita' pari a $b_1, b_2, .., b_n$, rispettivamente.

Problema

Detto c_{ij} il costo unitario di trasporto dall'origine A_i alla destinazione B_j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$, si intende formulare un problema di programmazione lineare per la minimizzazione del costo totale di trasporto del materiale disponibile nelle origini A_i alle destinazioni B_j.

Facciamo dapprima l'ulteriore ipotesi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (A1)$$

Dette x_{ij} le variabili che rappresentano la quantita' di materiale da trasportare dall'origine A_i alla destinazione B_j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$, il problema di programmazione dei trasporti puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, .., m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, .., n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, .., m, \quad j = 1, .., n \end{cases} \qquad (3)$$

Il caso generale

In generale non possiamo aspettarci che la quantita' di materiale presente nelle origini sia esattamente uguale a quella presente nelle destinazioni. Analizziamo i due casi che si possono presentare, il primo e' che risulti:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (A2)$$

In tal caso, possiamo supporre che tutto il materiale presente nelle origini venga trasferito nelle destinazioni, senza che le capacita' di queste ultime siano completamente saturate. Il problemai puo' essere formulato:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, .., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, .., n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, .., m, \quad j = 1, .., n \end{cases} \qquad (4)$$

Il caso generale

Il secondo caso e' che risulti:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{A3}$$

In tal caso, possiamo supporre che non tutto il materiale presente nelle origini venga trasferito nelle destinazioni, ma che le capacita' di queste ultime siano completamente saturate. Il problema puo' essere formulato:

$$\begin{cases} \min \ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, .., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, .., n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, .., m, \quad j = 1, .., n \end{cases} \tag{5}$$

Un problema di smaltimento dei rifiuti

Due aziende $A1$ e $A2$ necessitano di smaltire i loro rifiuti tossici (misurati in tonnellate t) e possono scegliere, a tal fine, le discariche $D1$, $D2$ e $D3$. Nella seguente tabella sono indicati i costi unitari di smaltimento (euro/t) dei rifiuti delle singole aziende nelle tre discariche, unitamente alle quantità che ciascuna azienda deve smaltire (QS) e alle capacitá di smaltimento (CS) delle discariche.

	D1	D2	D3	QS
A1	5	3	4	120
A2	4	7	3	230
CS	200	150	100	

Nell'ulteriore ipotesi che l'utilizzo delle discariche $D2$ e $D3$ e' subordinato al fatto che la discarica $D1$ abbia saturato la sua capacità di smaltimento, si vuole formulare un problema di programmazione lineare per determinare un programma di smaltimento dei rifiuti tossici in modo che risulti minimo il costo complessivo di smaltimento.

Si indichi con x_{ij} la quantitá di rifiuti tossici dell'industria Ai da smaltire nella discarica Dj, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

Il modello puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min\ [5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 4x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23}] \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 230 \\ x_{11} + x_{21} = 200 \\ x_{12} + x_{22} \leq 150 \\ x_{13} + x_{23} \leq 100 \\ x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1, 2\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Il problema della dieta

Si consideri un insieme $C_1, C_2, .., C_n$ di n cibi nei quali sono presenti m sostanze nutritive $S_1, S_2, .., S_m$, dei quali sono noti i seguenti dati:

- il costo unitario c_j del cibo C_j, $j = 1, .., n$;
- la quantita' a_{ij} di sostanza S_i presente in un'unita' di cibo C_j, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$.
- b_i la quantita' minima di sostanza S_i richiesta dalla dieta, $i = 1, .., m$.

Problema

Si vuole formulare un problema di programmazione lineare per determinare una dieta di minimo costo che soddisfi l'apporto nutritivo richiesto.

Dette x_j, $j = 1, .., n$ le variabili che rappresentano la quantita' di cibo C_j presente nella dieta, il problema puo' essere formulato nel modo seguente:

Formulazione

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ \ i = 1, .., m \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, .., n \end{cases} \tag{6}$$

Esempio

Una dieta giornaliera consiste di tre cibi C_1, C_2 e C_3, che vengono assunti nella quantità complessiva di 800 grammi. I tre cibi contengono proteine, carboidrati e grassi nelle quantità percentuali indicate nella seguente tabella:

	proteine	carboidrati	grassi
C_1	25%	40%	20%
C_2	20%	40%	0
C_3	30%	0	30%

Si vuole che nella dieta vengano assunti giornalmente almeno 100 grammi di proteine, almeno 150 grammi di carboidrati ed almeno 100 grammi di grassi. Si vuole, inoltre, che la quantità di grassi non superi i 200 grammi e che la quantità complessiva dei cibi C_1 e C_2 sia almeno l'80% della quantità di C_3.
Sapendo che il costo per 100 grammi di ciascuno dei cibi C_1, C_2 e C_3, è 2, 0.4 e 1.5 euro, rispettivamente, si vuole formulare un problema di programmazione lineare per determinare una dieta giornaliera di minimo costo.

Formulazione

Variabili decisionali:
x_i = quantitá (in ettogrammi) di cibo C_i, $i = 1, 2, 3$, da assumere giornalmente nella dieta;

Modello:

$$\begin{cases} \min\ (2x_1 + 0.4x_2 + 1.5x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 0.25x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geq 1 \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 \geq 1.5 \\ 0.2x_1 + 0.3x_3 \geq 1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - 0.8x_3 \geq 0 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

Un problema di inquinamento ambientale

Un terreno agricolo è costituito dalla miscela di tre tipi di terra T_1, T_2 e T_3. Da un'analisi di laboratorio viene rilevata, nei tre tipi di terra, la presenza di sostanze inquinanti, in particolare, amianto (A), ferro (Fe) e piombo (Pb), nelle quantità percentuali indicate nella seguente tabella:

	A	Fe	Pb
T_1	0.5%	4%	2%
T_2	0.2%	4%	0
T_3	1%	0	3%

Si supponga che tutte le sostanze siano misurate in grammi. Viene prelevato dal terreno un campione di 1000 grammi. Sapendo che la quantità di ferro del campione assume valori che variano trà l'1% ed il 2% del peso del campione e che la quantità di piombo non potrà mai superare l' 1.5% del peso del campione, si vuole formulare un problema di programmazione lineare per determinare quale è la quantità massima di amianto che è possibile aspettarsi che sia presente nel campione stesso.

Formulazione

Variabili decisionali:
x_i = quantitá (in grammi) di terra di tipo T_i, $i = 1, 2, 3$, presente nel campione prelevato;

Modello:

$$\begin{cases} \max \ \frac{1}{100}(0.5x_1 + 0.2x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \\ 0.04x_1 + 0.04x_2 \geq 10 \\ 0.04x_1 + 0.04x_2 \leq 20 \\ 0.02x_1 + 0.03x_3 \leq 15 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Il problema di assegnamento

Supponiamo di dover eseguire n lavori avendo a disposizione n lavoratori, ciascuno dei quali sappia fare tutti i lavori. Conosciamo inoltre la tabella dei costi c_{ij} per far svolgere il lavoro j al lavoratore i. Dobbiamo assegnare ad ogni lavoratore un solo lavoro e minimizzare il costo totale. Introduciamo le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoratore } i \text{ svolge il lavoro } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il problema di assegnamento si puó formulare come:

$$\begin{cases} \min \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \text{per ogni lavoro } j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \text{per ogni lavoratore } i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Esempio: un problema di dislocazione di impianti

Tre impianti di riciclaggio della plastica, della carta e del materiale organico devono essere costruiti nelle cittá di Firenze, Pisa e Grosseto. nella seguente tabella sono riportati i costi di costruzione (in milioni di euro) di ogni impianto nelle varie cittá.

	Plastica	Carta	Mat. org.
Firenze	7	3	4
Pisa	5	6	5
Grosseto	4	5	4

Si vogliono assegnare i tre impianti a ciascuna delle tre cittá in modo tale che il costo totale di costruzione sia minimo.

Formulazione

Denotiamo con $i = 1, 2, 3$ le cittá di Firenze, Pisa e Grosseto e con $j = 1, 2, 3$ gli impianti di riciclaggio della plastica, della carta e del materiale organico.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'impianto } j \text{ viene costruito nella cittá } i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il modello puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min \, [7x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 5x_{21} + 6x_{22} + 5x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33}] \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{ij} \geq 0, \;\; i = 1, 2, 3 \; j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Il problema di copertura

Consideriamo un insieme $I = \{1, ..., m\}$ e l'insieme $P = \{1, ..., n\}$, ove $P_j \subseteq P$, $j \in J := \{j = 1, ..., n\}$.

Definizione

Un sottoinsieme $J^* \subseteq J$ definisce una copertura dell'insieme I se

$$\cup_{j \in J^*} P_j = I.$$

Se, inoltre, per ogni $j, k \in J^*$, $j \neq k$, risulta

$$P_j \cap P_k = \emptyset$$

allora J^* definisce una partizione di I.

Sia $c_j > 0$ il costo associato al sottoinsieme P_j, $j \in J$. Il problema di copertura, consiste nel determinare un insieme J^* che definisca una copertura di minimo costo, ove il costo di J^* e' dato dalla quantita':

$$\sum_{j \in J^*} c_j$$

Formulazione

Consideriamo la matrice A di ordine $(m \times n)$ di componenti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in P_j \ , \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che gli elementi coperti da P_j corrispondondo alle righe delle componenti pari ad 1 della colonna $j-$esima di A.
Introduciamo le variabili binarie:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in J^* \ , \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il problema di copertura si puó formulare come:

$$\begin{cases} \min \ \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, .., n \end{cases}$$

Esempio

In un allevamento di bovini devono essere effettuate le seguenti vaccinazioni su ogni animale: (V_1) antitetanica, (V_2) antirabbica, (V_3) antivaiolosa, (V_4) antiinfluenzale, (V_5) antimeningococcica. Le vaccinazioni vengono fatte in somministrazioni polivalenti $P_j \subseteq \{V_1, ..., V_5\}$, $j = 1, .., 8$. La percentuale di animali avente una reazione negativa alla soministrazione P_j é data da c_j. Nella tabella seguente sono elencati gli insiemi P_j e le percentuali c_j, $j = 1, .., 8$.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
V_1	*		*		*	*		
V_2	*	*					*	
V_3	*	*	*				*	*
V_4	*	*		*		*		
V_5			*	*				*
c	10	8	6	3	3	4	7	6

Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare quali elementi P_j conviene somministrare per effettuare tutte le vaccinazioni minimizzando la percentuale complessiva di reazioni negative.

Formulazione

Facendo l'ulteriore ipotesi che non sia nocivo effettuare piu' volte la stessa vaccinazione su ogni animale, possiamo formulare il modello come problema di copertura:

Variabili decisionali:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{se si effettua la somministrazione } P_j \\ 0, \ \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..., 8;$$

Modello:

$$\begin{cases} \min \ 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 7x_7 + 6x_8 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_7 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_8 \geq 1 \\ x_j \in \{0, 1\} \ \ j = 1, ..8. \end{cases}$$