Modelli su grafi

Giandomenico Mastroeni

Modelli Matematici Ambientali, Corso di laurea magistrale in Scienze Ambientali
Anno Accademico 2018-19

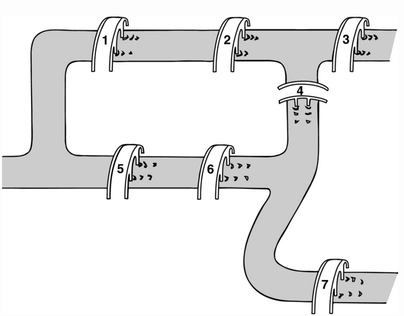
Contenuti

- Cenni storici sui grafi
- Nozioni introduttive: grafi orientati e non orientati, reti, matrici associate ad un grafo, cammini, connessione;
- Il problema del flusso di costo minimo;
- Cammini di costo minimo;
- Il problema del massimo flusso su una rete.

Origini storiche

La nascita della teoria dei grafi risale al 1736, anno in cui il matematico svizzero Eulero cominciò il proprio studio discutendo il cosiddetto *Problema dei ponti di Königsberg*.

Fu posto ad Eulero il problema di stabilire se fosse possibile attraversare una e una sola volta tutti i ponti, che collegano le zone della città, e tornare al punto di partenza.



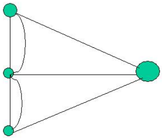
Origini storiche

Se definiamo un "cammino" come una successione di archi che connette una coppia di nodi, nel linguaggio della teoria dei grafi, la domanda si presenta in questa forma:

È possibile, dato un grafo connesso, trovare un cammino che attraversi tutti gli archi una e una sola volta, tornando al punto di partenza?

Tale cammino, se esiste, è detto *cammino di Eulero*.

I ponti di Konisberg



Grafi: definizione formale

Definizione. Un grafo $G = (N, A)$ e' una coppia di insiemi $N := \{1, 2, 3, ..., n\}$, ed A sottoinsieme del prodotto cartesiano $N \times N$, ossia un insieme di coppie (i, j), $i, j \in N$.
Se le coppie si considerano ordinate, il grafo si dice orientato, altrimenti, non orientato.
Il grafo si dice *rete* se ad ogni arco e' associato un numero reale detto peso o costo.

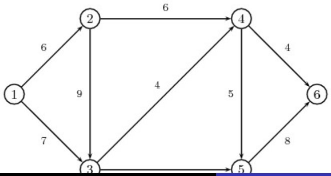
- N e' detto l'insieme dei nodi;
- A l'insieme degli archi, $|A| = m$;
- c_{ij} e' il costo dell'arco (i, j);
- Un arco (i, j) si dice incidente nei nodi i e j, in tal caso i nodi i e j sono detti adiacenti.

Alcuni classici problemi sui grafi

- Il problema del flusso di costo minimo;
- Il problema del cammino di costo minimo;
- Il problema del massimo flusso;
- La determinazione delle componenti connesse di un grafo;
- Il problema dell'orientazione;

Nelle successive definizioni ci riferiremo ad un grafo orientato e supporremo, inoltre, che non esistano archi che connettono lo stesso nodo, cioe' A non contenga coppie della forma $(\bar{n}, \bar{n})$, $\bar{n} \in N$.

Rete: grafo orientato pesato



Matrici associate a un grafo

Definizione

La matrice di adiacenza associata al grafo $G = (N, A)$ e' una matrice quadrata B di ordine n le cui componenti sono

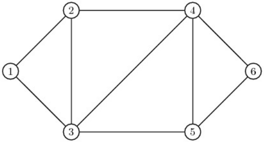
$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione

La matrice di incidenza associata al grafo (orientato) $G = (N, A)$ e' una matrice E di ordine $n \times m$ le cui componenti sono

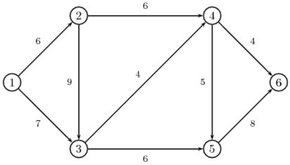
$$e_{ij} := \begin{cases} -1 & \text{se } i \text{ e' il nodo iniziale dell'arco } j \\ +1 & \text{se } i \text{ e' il nodo finale dell'arco } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio:matrice di adiacenza



$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio:matrice di incidenza



$$E := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il problema del flusso di costo minimo

Dato il grafo $G = (N, A)$ siano:

- E la matrice di incidenza di G;
- x il vettore (colonna) di componenti x_{ij}, $(i, j) \in A$, x_{ij} e' detto *flusso* sull'arco $(i, j) \in A$;
- $c := (c_{ij},\ (i, j) \in A)$ il vettore dei costi associati a ciascun arco $(i, j) \in A$;
- $u := (u_{ij},\ (i, j) \in A)$ il vettore delle capacita' superiori associate a ciascun arco $(i, j) \in A$;
- $b := (b_1, .., b_n)$ il vettore dei bilanci associati a ciascun nodo $k \in N$;

Il problema del flusso di costo minimo sul grafo G e' definito dal seguente problema di programmazione lineare:

Formulazione esplicita

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

con i vincoli

$$\sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = b_k, \quad k = 1, .., n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_i j \quad (i,j) \in A$$

Lo scalare b_k stabilisce quale sia la differenza tra il flusso entrante e il flusso uscente, nel nodo k, $k = 1, .., n$.
I nodi tali che $b_k < 0$ vengono detti *sorgenti* mentre quelli tali che $b_k > 0$ sono detti *pozzi*.

Si puo' supporre che l'insieme degli archi $(i, j) \in A$ e di conseguenza il vettore x sia ordinato mediante l'ordinamento lessicografico.

Formulazione matriciale

$$\begin{cases} \min \langle c, x \rangle \\ Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

Come e' evidente dalla definizione della matrice E, condizione necessaria affinche' la regione ammissibile del problema sia non vuota e' che

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0. \tag{1}$$

Osservazione

Nel caso in cui la condizione (1) non fosse verificata, e' sempre possibile formulare un problema analogo a quello dato tale che (1) sia soddisfatta. Infatti, se fosse $\sum_{i=1}^{n} b_i \neq 0$, si puo' considerare il grafo G' ottenuto aggiungendo a G un nodo fittizio $n+1$ con

$$b_{n+1} := -\sum_{i=1}^{n} b_i$$

e gli archi che connettono il nodo $n+1$ con ogni pozzo se $b_{n+1} < 0$, o che connettono ogni sorgente con il nodo $n+1$ se $b_{n+1} > 0$. Tali archi avranno costo nullo e capacita' $+\infty$ in modo da non alterare il valore della funzione obbiettivo.

Cammino

Definizione

Sia dato un grafo $G = (N, A)$. **(i)** Un *cammino orientato* dal nodo n_1 al nodo n_k, $k \geq 2$, e' un sottografo di G definito da una coppia di successioni $n_1, \ldots, n_k$ ed $a_1, \ldots, a_{k-1}$ tali che $n_i \in N$, $i = 1, \ldots, k$ e $a_i = (n_i, n_{i+1}) \in A$, per $i = 1, \ldots, k-1$.

(ii) Un *cammino non orientato* dal nodo n_1 al nodo n_k, $k \geq 2$, e' un sottografo di G definito da una coppia di successioni $n_1, \ldots, n_k$ ed $a_1, \ldots, a_{k-1}$ tali che $n_i \in N$, $i = 1, \ldots, k$ e $a_i = (n_i, n_{i+1}) \in A$ oppure $a_i = (n_{i+1}, n_i) \in A$, per $i = 1, \ldots, k-1$.

Osservazione 1

Un cammino orientato dal nodo i al nodo j e' una successione di archi consecutivi di A tale tale che il primo arco sia uscente dal nodo i e l'ultimo sia entrante nel nodo j. (Due archi sono consecutivi se il nodo finale del primo arco coincide con quello iniziale del secondo).

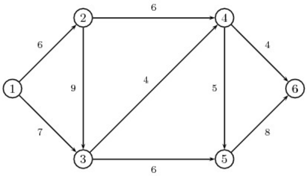
Osservazione 2

Un cammino non orientato dal nodo i al nodo j e' una successione di archi che collega i nodi i e j tale che due archi successivi siano incidenti ma non aventi necessariamente la stessa orientazione.

Osservazione 3

Un cammino orientato risulta univocamente determinato dalla successione dei nodi $n_1, ..., n_k$. E' facile riconoscere che cio' non accade per un cammino non orientato.

Esempio. (1,2) (2,4) (4,6) e' un cammino orientato dal nodo 1 al nodo 6, mentre (1,3) (3,5) (4,5) (4,6) e' un cammino non orientato.



Connessione

Definizione

(i) Un grafo $G = (N, A)$ si dice *fortemente connesso* se, per ogni coppia di nodi n_i,$n_j \in N$, esiste un cammino orientato da n_i a n_j.

(ii) Un grafo $G = (N, A)$ si dice *connesso* se, per ogni coppia di nodi n_i,$n_j \in N$, esiste un cammino non orientato da n_i a n_j.

Grado

Definizione. Si dice grado del nodo n, il numero degli archi $g(n)$ incidenti in tale nodo.

Teorema

Un grafo G possiede un ciclo euleriano se e solo se e' connesso ed ogni nodo ha grado pari.

Componenti connesse di un grafo

Se un grafo non e' connesso e' di interesse determinare quali siano i sottografi di G che risultano connessi.

Componente connessa

Una componente connessa G' di un grafo G e' un sottografo connesso massimale di G.

Un grafo puo' essere sempre partizionato nelle sue componenti connesse.

Il problema del cammino di costo minimo

Supponiamo che

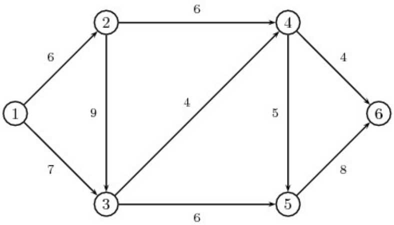
- $c_{ij} > 0$ sia il costo dell'arco (i, j);
- il costo di un cammino sia data dalla somma dei costi degli archi che lo compongono;

Il problema del cammino di costo minimo

Fissata una coppia di nodi i e j si vuole determinare un cammino orientato di costo minimo che connette i e j;

Esempio

Siano $i = 1$, $j = 6$, i nodi tra i quali si vuole determinare il cammino di costo minimo.
$(1,2),(2,4),(4,6)$ e' il cammino di costo minimo.



Supponiamo che

- I nodi 1 ed n siano il nodo iniziale e finale del cammino C cercato;
- Poniamo

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & se\ (i,j) \in C \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Formulazione del problema

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

con i vincoli

$$\sum_{j:(1,j)\in A} x_{1j} - \sum_{i:(i,1)\in A} x_{i1} = 1$$

$$\sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = 0, \quad k = 2, .., n-1$$

$$\sum_{i:(i,n)\in A} x_{in} - \sum_{j:(n,j)\in A} x_{nj} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$

Formulazione mediante la matrice di incidenza

- E sia la matrice di incidenza del grafo $G = (N, A)$;
- x il vettore (colonna) di componenti x_{ij}, $(i, j) \in A$;
- c il vettore di componenti c_{ij}, $\quad (i, j) \in A$;
- $b = (-1, 0, ..., 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$;

$$\min c^T x$$

con i vincoli

$$\begin{cases} Ex = b \\ x \in \{0, 1\}^m \end{cases}$$

Albero dei cammini di costo minimo

In modo analogo, il problema della ricerca dell'albero dei cammini di costo minimo di radice il nodo $r = 1$, ossia dell' insieme dei cammini di costo minimo dal nodo r ad un qualsiasi altro nodo del grafo G, puo' essere formulato mediante il problema

$$\min c^T x$$

con i vincoli

$$\begin{cases} Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ove $b := (-(n-1), 1, 1, .., 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione

Si puo' dimostrare che se il problema ammette ottimo finito, allora ammette una soluzione ottima $\bar{x}$ a componenti intere, in particolare $\bar{x}_{ij}$ coincide con il numero di cammini minimi passanti per l'arco (i, j) ed il valore ottimo coincide con la somma dei costi dei cammini minimi.

Algoritmo SPT

Descriviamo l'Algoritmo SPT (*shortest path tree*), dovuto a Dijkstra, per la ricerca dell'albero dei cammini minimi. Definiamo i seguenti elementi:

- $\pi \in \mathbb{R}^n$, il vettore delle etichette associate ai nodi;
- $p \in \mathbb{R}^n$, il vettore dei predecessori di ciascun nodo;
- $Q \subseteq N$, l'insieme dei nodi candidati ad essere considerati ad ogni passo dell'algoritmo.

Algoritmo SPT (Dijkstra)

1. Si ponga $\pi(r) = 0$, $\pi(i) = +\infty$, $p(i) = -1$, $\forall i \neq r$ e $Q = \{r\}$.
2. Si selezioni $i \in Q$ e si consideri l'insieme $U(i) := \{j \in N : (i,j) \in A\}$; si ponga $Q = Q \setminus \{i\}$ e, per ogni $j \in U(i)$, se
$$\pi(i) + c_{ij} < \pi(j),$$
allora si ponga $\pi(j) = \pi(i) + c_{ij}$, $p(j) = i$ e $Q = Q \cup \{j\}$ (potrebbe essere j gia' incluso in Q).
3. Se $Q = \emptyset$ allora l'algoritmo termina, altrimenti si vada al Passo 2.

Diciamo π un vettore di costi ammissibili se $\pi(r) = 0$ ed esiste un insieme di cammini $\mathcal{P}_{r,i}$, $i \in N, i \neq r$ che connette r con il nodo i tale che $\pi(i)$ sia uguale al costo del cammino $\mathcal{P}_{r,i}$, $i \in N, i \neq r$.
Vale il seguente risultato:

Teorema 1

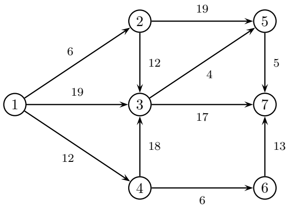
$\pi \in \mathbb{R}^n$ e' il vettore dei minimi costi per un insieme di cammini orientati dal nodo r agli altri nodi del grafo G se e solo se π e' un vettore di costi ammissibili e risulta:

$$\pi(i) + c_{ij} \geq \pi(j), \quad \forall (i,j) \in A. \tag{2}$$

L'Algoritmo di Dijkstra e' un caso particolare dell'Algoritmo SPT e si ottiene scegliendo al Passo 2 il nodo $i \in Q$ in modo tale che:

$$\pi_i = \min_{j \in Q} \pi_j$$

Esempio. Applichiamo l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	19	1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	25	2	25	2	22	3	22	3	22	3	22	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	18	4	18	4	18	4	18	4	18	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	3	31	6	27	5	27	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

Il problema del massimo flusso

Fissiamo sul grafo $G = (N, A)$ una coppia di nodi s e t detti nodo sorgente e nodo pozzo (in tal caso il grafo viene anche detto "rete"). Supponiamo che

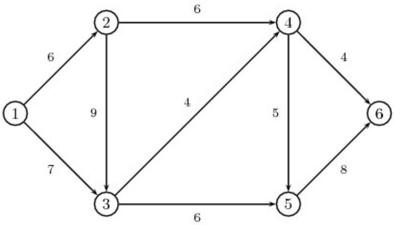
- u_{ij} sia la capacita' dell'arco (i, j);
- non vi sia dispersione di flusso nella rete;

Il problema del massimo flusso

Consiste nel determinare la massima quantita' di flusso che si puo' immettere nella rete attraverso il nodo s in modo tale che transiti attraverso la rete, rispettando le capacita' degli archi e ne fuoriesca, senza dispersioni, attraverso il nodo t;

Esempio

Sia $s = 1$ il nodo sorgente e $t = 6$ il nodo pozzo.



Formulazione del problema del massimo flusso

Supponiamo che

- I nodi 1 ed n siano il nodo sorgente e il nodo pozzo della rete;
- u_{ij} sia la capacita' dell'arco (i, j);
- x_{ij} sia il flusso dell'arco (i, j);

Il problema del massimo flusso

$$\max \ F$$

con i vincoli

$$\sum_{j:(1,j)\in A} x_{1j} = F$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\sum_{j:(j,n)\in A} x_{jn} = F$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i,j) \in A$$

Formulazione tramite la matrice di incidenza

In forma compatta, il problema del massimo flusso su una rete puo' essere formulato nel modo seguente:

$$\max F$$

con i vincoli

$$\begin{cases} Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

ove $b := (-F, 0, 0, ..0, F)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_{ij})_{(i,j) \in A}$.

Un algoritmo per il problema del massimo flusso

Descriviamo l'Algoritmo di Ford-Fulkerson per il problema dellla determinazione del massimo flusso su una rete. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione

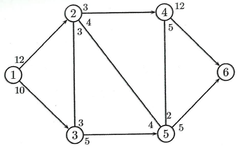
Dato un cammino (orientato) $\mathcal{P}$ dal nodo sorgente s al nodo pozzo t, diciamo *flusso di* $\mathcal{P}$ la minima capacita' degli archi che lo compongono.

Osserviamo, che mediante la precedente definizione, il problema del massimo flusso su una rete puo' essere riformulato come il problema della ricerca di un insieme di cammini da s a t tali che la somma dei loro flussi sia massima. Tale insieme deve essere inoltre determinato in modo che, se due o piu' cammini hanno un arco in comune, la somma dei loro flussi non deve eccedere la capacita' di tale arco.

Algoritmo di Ford-Fulkerson.

- Passo 1. Sia $F := 0$ il flusso della rete.
- Passo 2. Si determina un cammino $\mathcal{P}$ da s a t avente flusso $f > 0$ (tale cammino e' detto *aumentante*). Se tale cammino non esiste, si va al Passo 4, altrimenti si vada al Passo 3.
- Passo 3. Per ogni arco $(i, j) \in \mathcal{P}$, si riduce della quantita' f la capacita' dell'arco (i, j) e si accresce di f la capacita' dell'arco (j, i) (se l'arco $(j, i) \notin A$, viene aggiunto alla rete G, generando cosi' una rete fittizia). Si pone $F := F + f$ e si torna al Passo 2.
- Passo 4. Il flusso corrente F e' il massimo flusso della rete. Si determina una soluzione ottima $\bar{x}$ per il problema considerando la rete fittizia generata dall'algoritmo, ed associando ad ogni riduzione di capacita' q_{ij} sull'arco $(i, j) \in A$, un flusso $\bar{x}_{ij} = q_{ij}$.

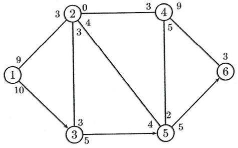
Determiniamo il flusso massimo dal nodo $s = 1$ al nodo $t = 6$ sulla seguente rete



La mancanza di orientazione di un arco che connette i nodi i e j denota la presenza di entrambi gli archi (i, j) e (j, i).

Le reti fittizie generate ad ogni iterazione dell'algoritmo di Ford-Fulkerson sono le seguenti.

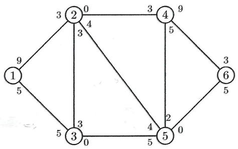
Prima iterazione:



Cammino aumentante: $(1, 2, 4, 6)$ di flusso $f = 3$.

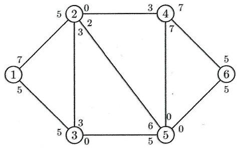
Flusso della rete: $F = 3$.

Seconda iterazione:



Cammino aumentante: $(1, 3, 5, 6)$ di flusso $f = 5$.
Flusso della rete: $F = 8$.

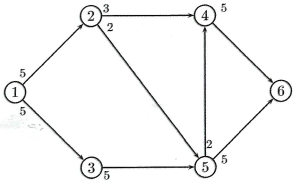
Terza iterazione:



Cammino aumentante: $(1, 2, 5, 4, 6)$ di flusso $f = 2$.
Flusso della rete: $F = 10$.

Nella generazione della rete precedente e' stato considerato il cammino aumentante $(1, 2, 5, 4, 6)$ di flusso $f = 2$. Il flusso della rete e' ora $F = 10$. Considerando gli archi aventi capacita' nulla nella corrente rete fittizia e' facile provare che non esistono ulteriori cammini aumentanti, pertanto il flusso massimo della rete e' $F = 10$.

Una soluzione ottima e' la seguente (si osservi che gli archi aventi flusso nullo non sono stati inseriti):



Tagli

Definizione

- Un taglio sulla rete $G = (N, A)$ e' una partizione (N_1, N_2) dei nodi, $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, tale che $s \in N_1$, $t \in N_2$.
- Si dice *capacita' del taglio* la quantita'

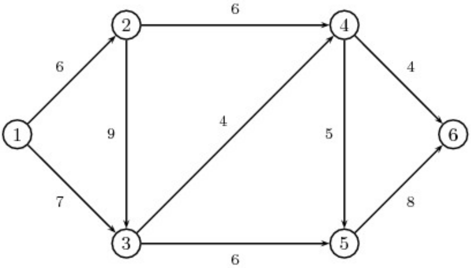
$$U(N_1, N_2) := \sum_{\substack{i \in N_1, j \in N_2 \\ (i,j) \in A}} u_{ij}.$$

Gli archi che compaiono nella sommatoria vengono anche detti *archi del taglio*.

Osserviamo che un qualunque cammino dal nodo sorgente al nodo pozzo contiene almeno un arco del taglio. Pertanto la capacita' di ogni taglio costituisce un limite superiore al flusso massimo della rete.

Esempio

Le partizioni
$N_1 := \{1\}$, $N_2 := \{2,3,4,5,6\}$ oppure $N_1 := \{1,2,3\}$, $N_2 := \{4,5,6\}$ definiscono dei tagli i cui archi sono, rispettivamente, $(1,2)$ $(1,3)$ oppure $(2,4)$ $(3,4)$ $(3,5)$.



Lemma

Sia x una soluzione ammissibile per il problema del massimo flusso e sia (N_1, N_2) un taglio sulla rete. Allora il flusso della rete $F(x) := \sum_{(s,j)\in A} x_{sj}$ e' dato da

$$F(x) = \sum_{\substack{i\in N_1, j\in N_2 \\ (i,j)\in A}} x_{ij} - \sum_{\substack{i\in N_1, j\in N_2 \\ (j,i)\in A}} x_{ji}. \qquad (3)$$

Dimostrazione. Per semplicita' di notazione , omettiamo nelle sommatorie le condizioni $(i,j) \in A$ e $(j,i) \in A$. In generale risulta:

$$\sum_{\substack{i\in N_1 \\ j\in N}} x_{ij} - \sum_{\substack{i\in N_1 \\ j\in N}} x_{ji} = \sum_{j\in N} x_{sj} + \sum_{\substack{i\in N_1\setminus\{s\} \\ j\in N}} x_{ij} - \sum_{\substack{i\in N_1\setminus\{s\} \\ j\in N}} x_{ji}. \qquad (4)$$

Per il principio della conservazione del flusso si ha:

$$\sum_{j\in N} x_{ij} - \sum_{j\in N} x_{ji} = 0, \qquad \forall i \in N_1 \setminus \{s\}$$

da cui si deduce che

segue dimostrazione

$$\sum_{\substack{i \in N_1 \setminus \{s\} \\ j \in N}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_1 \setminus \{s\} \\ j \in N}} x_{ji} = 0.$$

Pertanto, la (4) diviene:

$$\sum_{\substack{i \in N_1 \\ j \in N}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_1 \\ j \in N}} x_{ji} = \sum_{j \in N} x_{sj} = F(x).$$

Osservando poi che

$$\sum_{\substack{i \in N_1 \\ j \in N}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_1 \\ j \in N}} x_{ji} = \sum_{\substack{i \in N_1 \\ j \in N_2}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_1 \\ j \in N_2}} x_{ji}$$

(infatti, per $j \in N_1$, le due sommatorie a primo membro coincidono), si ha la tesi.

Dal lemma precedente segue immediatamente la seguente

Proposizione

Un generico flusso ammissibile $F(x)$ della rete e' minore o uguale della capacita' di un taglio (N_1, N_2), ossia

$$F(x) \leq U(N_1, N_2), \quad \forall x \in R, \quad \forall (N_1, N_2), \tag{5}$$

ove R e' la regione ammissibile del problema del massimo flusso.

Siamo ora in grado di dimostrare che l'algoritmo di Ford-Fulkerson genera un flusso della rete che eguaglia la capacita' di un taglio.

Teorema

Se non esiste alcun cammino aumentante nella rete fittizia generata dall' Algoritmo di Ford-Fulkerson, allora esiste esiste un taglio (N_1, N_2) *tale che*

$$F(\bar{x}) = U(N_1, N_2), \tag{6}$$

ove $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ *e' una soluzione generata dall'Algoritmo.*

Dimostrazione. Consideriamo la rete fittizia generata al termine dell' Algoritmo di Ford-Fulkerson e l'insieme B dei nodi $i \in N$ per i quali esiste un cammino avente flusso (strettamente) positivo che connette il nodo sorgente s con i. Definiamo il taglio (N_1, N_2) ove $N_1 := s \cup B$ e $N_2 := N \setminus N_1$. Osserviamo che, non essendoci alcun cammino aumentante, si ha che $t \in N_2$.

segue dimostrazione

Ricordando la formula (3), per provare la (6) e' sufficiente dimostrare che:

(a) $\bar{x}_{ij} = u_{ij}, \quad \forall i \in N_1, \forall j \in N_2, (i,j) \in A,$

(b) $\bar{x}_{ji} = 0, \quad \forall i \in N_1, \forall j \in N_2, (j,i) \in A,$

La relazione (a) e' vera in quanto se, per assurdo, esistesse $\bar{x}_{ij} < u_{ij}$, per un arco $(i,j) \in A$, $i \in N_1$, $j \in N_2$, allora, nella rete fittizia, l'arco (i,j) avrebbe capacita' strettamente positiva, e cio' consentirebbe l'esistenza di un cammino da s a j avente flusso (strettamente) positivo, contraddicendo la definizione di N_2.
Una simile considerazione consente di provare la (b). Infatti se, per assurdo, fosse $\bar{x}_{ji} > 0$, per un arco $(j,i) \in A$, $i \in N_1$, $j \in N_2$, allora, nella rete fittizia, l'arco (i,j) dovrebbe avere, per costruzione, capacita' strettamente positiva ed in modo analogo al caso (a) si ha una contraddizione. Dalla (3), tenendo conto delle relazioni (a) e (b), si ottiene la (6).

Il Teorema Max flow - Min cut

Dai precedenti risultati segue facilmente il seguente

Teorema

Il flusso massimo della rete eguaglia la minima capacita' di un taglio.

Dimostrazione. Segue dalla (6), tenuto conto della (5).