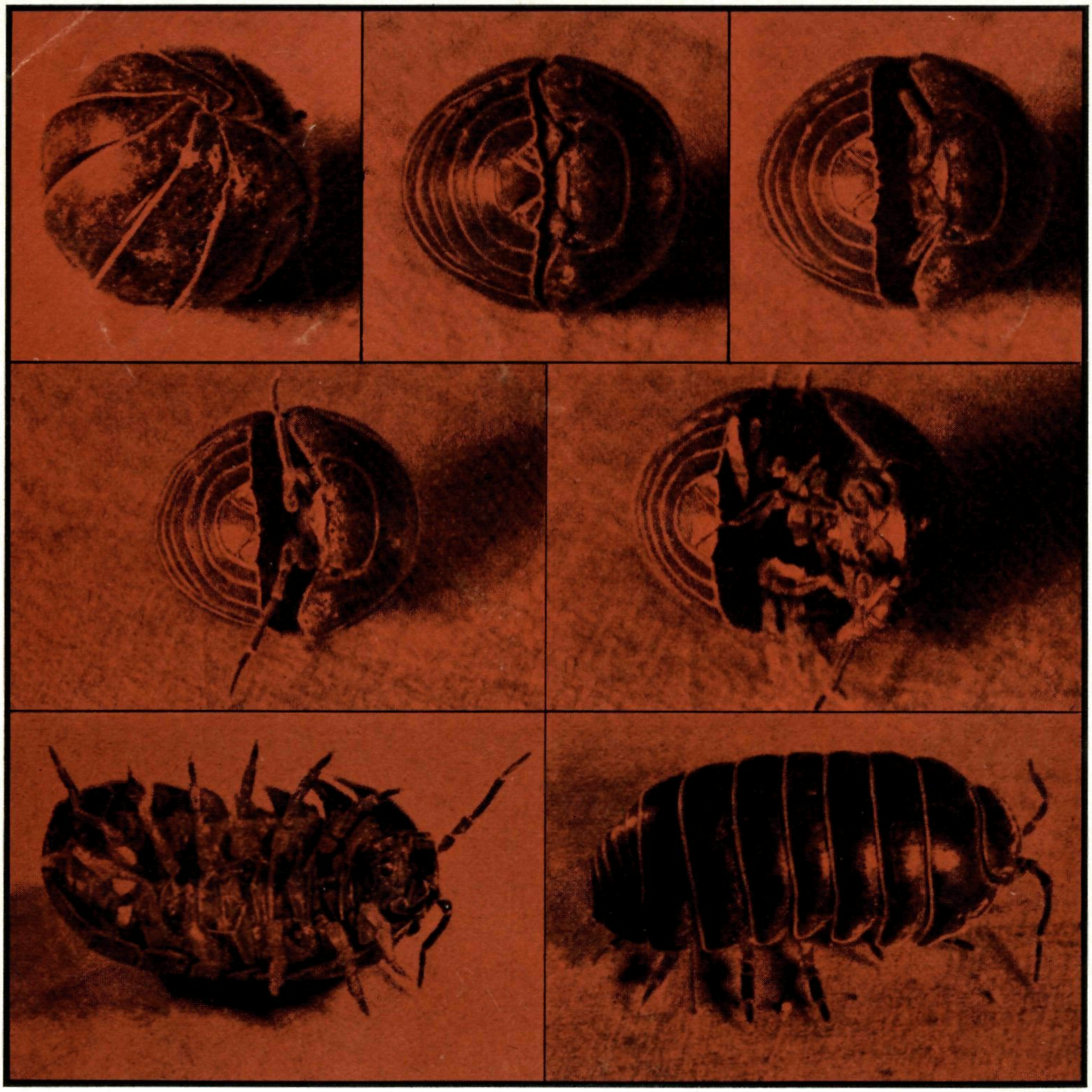


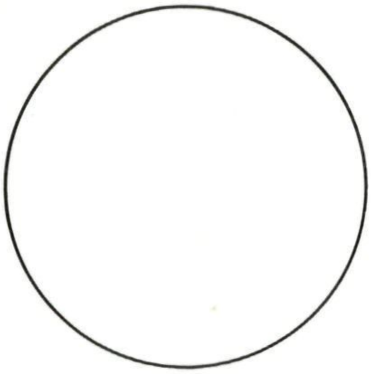
4
jaargang 14 / februari 1975

wiskundetijdschrift
voor jongeren

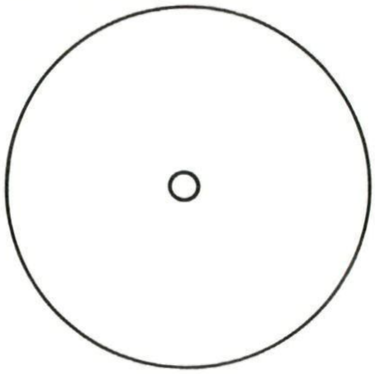
wolters-noordhoff

verschijnt 5 × per schooljaar

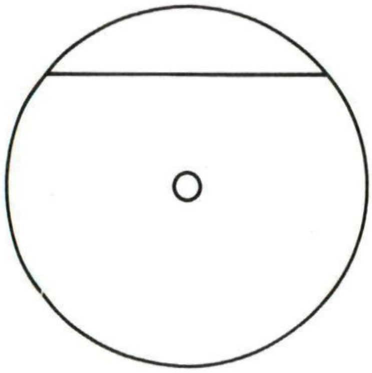
Pythagoras



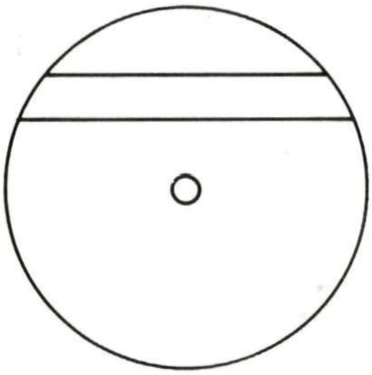
ik ben een cirkel . . .



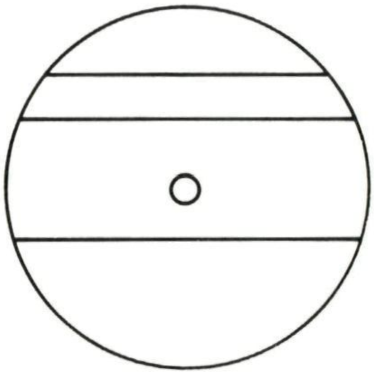
met een concentrische cirkel . . .



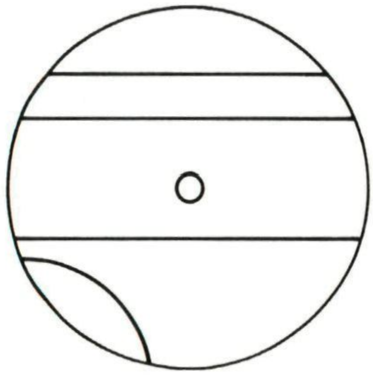
met een koorde . . .



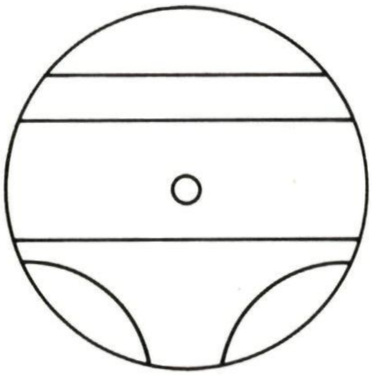
met een evenwijdige koorde . . .



met nog een evenwijdige koorde . . .



en een cirkelboog . . .



met nog zo'n cirkelboog . . .

Wat
ben
ik?
(zie naast pag. 96)

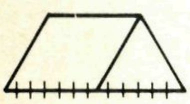
BIJ DE FOTO'S OP DE OMSLAG:
Dit diertje heeft als enige verdedigingsmiddel: oprollen tot een volmaakt kogeltje en stil blijven liggen. We zien hier de verschillende stadia waarin het zich weer ontrolt, zodra het gevaar geweken is. Het beestje is een soort pissebed, die bij ons niet voorkomt, maar in Duitsland bijv., komen 8 soorten van deze Rollasseln voor. Voor de voetbal heeft men een andere oplossing gekozen, zie pagina 73 e.v.

°°Voetbal

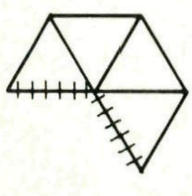
Hoe ziet tegenwoordig een voetbal er uit? Bekijk hem nader – een mozaïek van zeshoeken en vijfhoeken. Om precies te zijn, 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken, naar het schijnt in een bonte mengeling. Maar als je de voetbal tussen je vingertoppen laat wentelen, ontdek je dat er veel symmetrie in dat patroon zit.

De figuur van 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken is eigenlijk een veelvlak, dat onder de luchtdruk van binnen een bolgedaante heeft aangenomen. Het is geen *regelmatig* veelvlak. Een veelvlak dat regelmatig wil zijn, moet door één soort regelmatige, onderling congruente veelhoeken zijn begrensd, waarvan er in elk hoekpunt evenveel bijeenkomen. De figuur van 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken is wat men noemt *halfregelmatig*. In plaats van één zijn er hier twee soorten regelmatige veelhoeken als zijvlakken, en die van dezelfde soort zijn onderling congruent.

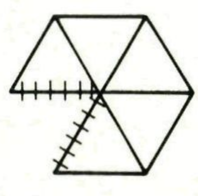
Maar laten we eerst met regelmatige veelvlakken beginnen; en wel allereerst met degene waarvan de zijvlakken regelmatige *driehoeken* zijn. Bij een hoekpunt van het veelvlak kunnen er drie, vier of vijf van die driehoeken bijeenkomen (fig. 1a, b, c – waarbij je de gemerkte zijden aan elkaar geplakt moet denken). Meer dan vijf regelmatige driehoeken in één hoekpunt zijn onmogelijk, omdat zes driehoeken samen al een *vlakke* figuur opleveren.



1a



1b



1c

Maak je de veelvlakken af, dan krijg je in de gevallen 1a, 1b, 1c respectievelijk een regelmatig viervlak, achtvlak, twintigvlak (zie fig. 2a, b, c).

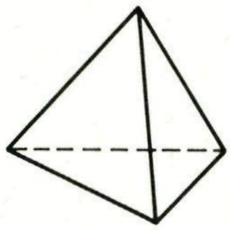


Fig. 2a.

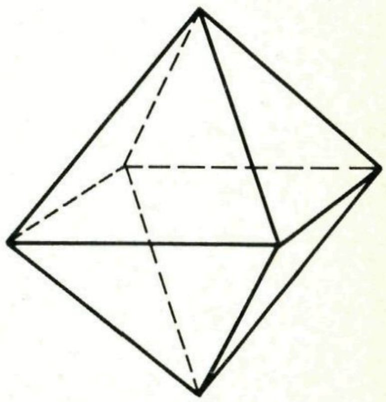


Fig. 2b.

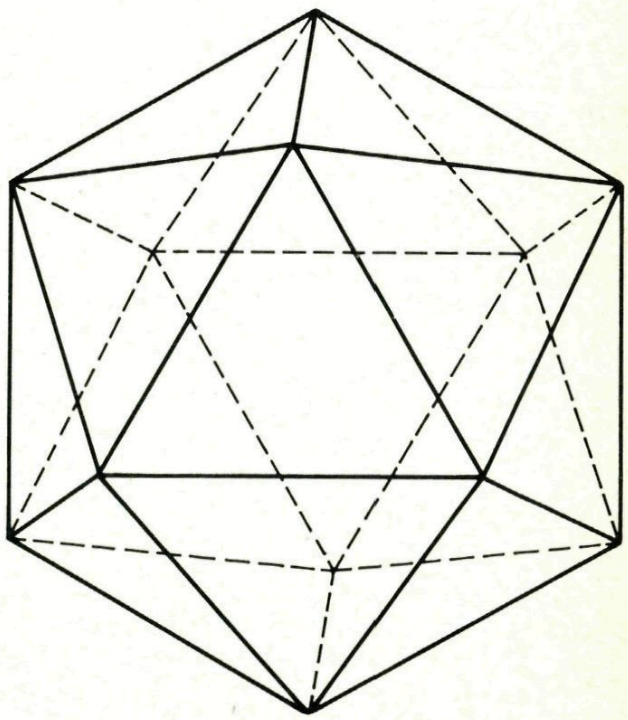


Fig. 2c.

De tekening van het viervlak spreekt voor zichzelf; het achtvlak is klaarblijkelijk uit twee vierzijdige piramiden samengesteld; het twintigvlak heeft boven en onder een vijfzijdige piramide, die in een hoek van 36° tegen elkaar verdraaid zijn, met ertussen een gordel van tien driehoeken die afwisselend met een hoekpunt naar boven en naar beneden wijzen.
Behalve deze drie regelmatige veelvlakken is er nog één, door vierkanten en één, door regelmatige vijfhoeken begrensd: een zesvlak, ook kubus genaamd en een twaalfvlak (fig. 2d, e).

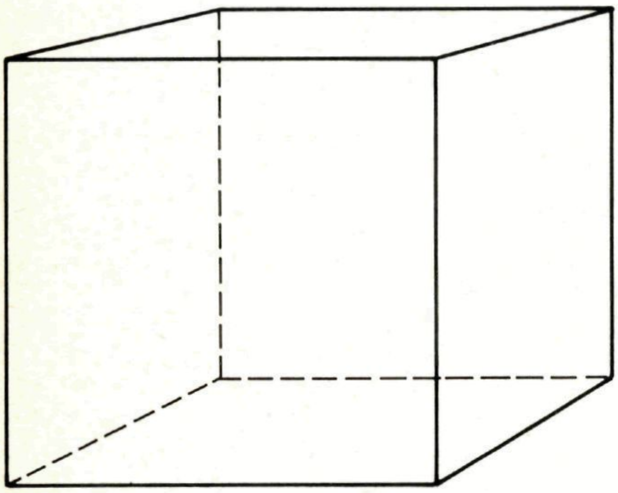


Fig. 2d.

Meer zijn er niet, want al drie regelmatige zeshoeken in één hoekpunt zouden elkaar tot een vlakke figuur aanvullen.
2a-e zijn de vijf regelmatige veelvlakken, ook platonische lichamen genaamd, omdat ze in een der dialogen van Plato optreden als bouwstenen van het heelal.

Als volgt een lijst van de aantallen zijvlakken, ribben en hoekpunten van die vijf veelvlakken:

zijvlakken	ribben	hoekpunten
4	6	4
6	12	8
8	12	6
12	30	20
20	30	12

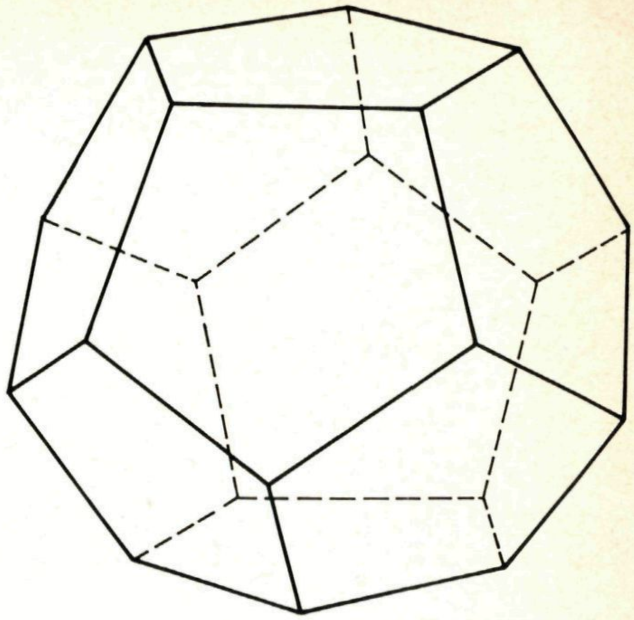


Fig. 2e.

Men merkt hier een merkwaardige dualiteit op: het zesvlak heeft 8 hoekpunten en het achtvlak 6 hoekpunten en beiden hebben 12 ribben; het twaalfvlak heeft 20 hoekpunten en het twintigvlak 12 hoekpunten en beiden hebben 30 ribben. En verder: bij een zesvlak komen in een hoekpunt 3 vierkanten bijeen; bij een achtvlak zijn het 4 driehoeken. Bij een twaalfvlak zijn het 3 vijfhoeken in een hoekpunt; bij een twintigvlak 5 driehoeken.
Dit suggereert nauwe verbanden tussen zesvlak en achtvlak, tussen twaalfvlak en twintigvlak. Inderdaad:

- Teken op de kubus (zesvlak) de middelpunten van de zijvlakken – ze vormen een achtvlak.
- Teken op het achtvlak de middelpunten van de zijvlakken – ze vormen een zesvlak.
- Teken op een twaalfvlak de middelpunten der zijvlakken – ze vormen een twintigvlak.
- Teken op een twintigvlak de middelpunten der zijvlakken – ze vormen een twaalfvlak.

Zesvlak en achtvlak heten *duaal* met elkaar, evenzo twaalfvlak en twintigvlak. Het viervlak heet *zelfduaal.*

Wil men een veelvlak als voetbal kunnen opblazen, dan verdient het aanbeveling er een met een groot aantal zijvlakken te nemen, en om er iets fraais van te maken, zouden we graag een regelmatig veelvlak kiezen. Een twintigtal zou zo gek niet zijn, maar blijkbaar vond men twintig zijvlakken niet genoeg voor een veelvlak dat een voetbal moet worden. Men heeft er een genomen met 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken – doet het je niet aan twintigvlak en twaalfvlak denken? Is het er misschien een combinatie van?

Laten we met een gemakkelijker combinatie beginnen. Van een kubus zagen we als het ware de hoeken af, en wel door middel van vlakken, die de drie van zo'n hoekpunt uitgaande ribben middendoor delen (fig. 3).

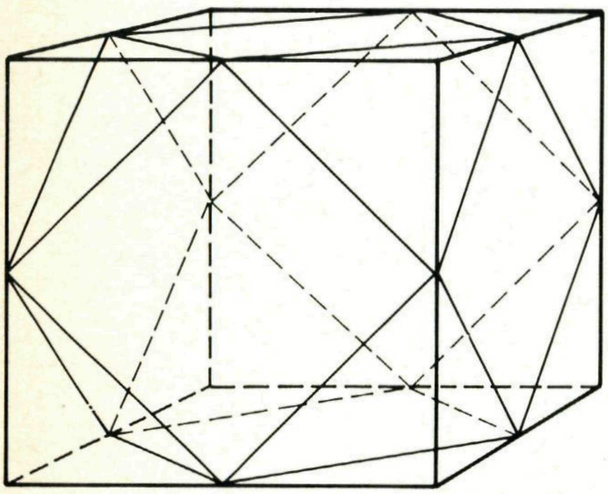


Fig. 3.

Het viervlak, dat door deze operatie ontstaat, wordt begrensd door zes vierkanten die van de oorspronkelijke zijvlakken van de kubus zijn overgebleven en acht driehoeken, beantwoordende aan de acht (afgezaagde) hoekpunten van de kubus, samen 14 zijvlakken.

Men kan de kubus echter ook wat zuiniger opereren. Men amputere bij de hoekpunten net zoveel dat van de zijvlakken regelmatige achthoeken overblijven. Het ontstaande veelvlak (fig. 4) heeft acht driehoeken en zes achthoeken tot zijvlakken.

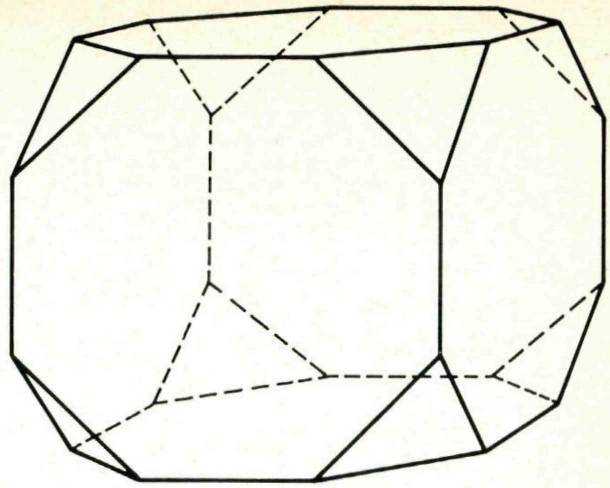


Fig. 4.

Men kan dergelijke amputaties op verschillende wijzen bij de diverse regelmatige veelvlakken uitvoeren en we doen het nu met het twintigvlak. We zagen de hoeken weg, zodat tenslotte van de diverse driehoekige zijvlakken van het twintigvlak regelmatige zeshoeken resteren. Rond een hoekpunt ziet het er als in fig. 5 uit (de gemerkte zijden weer aan elkaar plakken!) In 't geheel ontstaat een veelvlak (fig. 6) begrensd door 20 zeshoeken, die er van de zijvlakken van het twintigvlak over zijn, en 12 vijfhoeken, afkomstig van de hoekpunten van het twintigvlak, samen 32 zijvlakken. Elke zeshoek is omgeven door drie zeshoeken

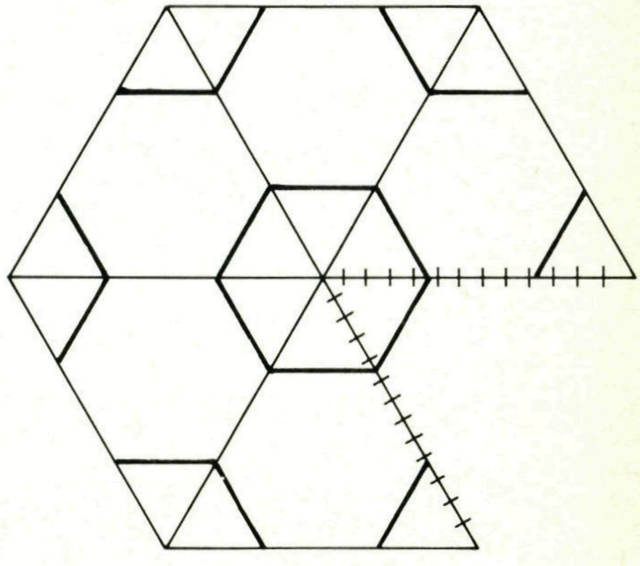


Fig. 5.

en drie vijfhoeken die elkaar afwisselen, beantwoordende aan de zijde en hoekpunten van de oorspronkelijke driehoeken; de vijfhoeken daarentegen liggen los van elkaar, ze zijn door vijf zeshoeken omgeven. De middelpunten van de vijfvlakken vormen een regelmatig twaalfvlak, de middelpunten van de zeshoeken vormen een regelmatig twintigvlak.
Ziedaar de voetbal, een halfregelmatig, of zoals men ook zegt, Archimedisch lichaam.

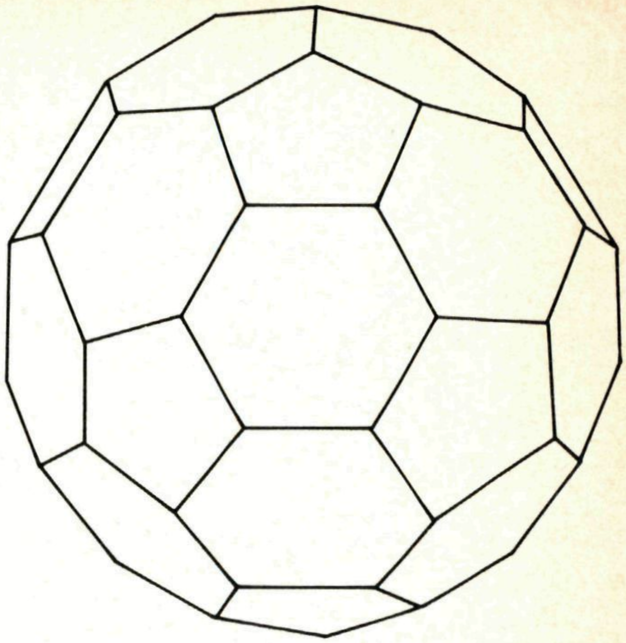


Fig. 6.

°°Een gulden "iccanobif"-rij

Als je van een rechthoek een vierkant afhaalt (fig. 1a-c) – bij voorbeeld door een hoek om te vouwen – dan blijft er een kleinere rechthoek over. Het zou bijzonder mooi zijn, als die met de oorspronkelijke rechthoek gelijkwaardig was. Dit is inderdaad te realiseren. Noem de lange zijde van de eerste rechthoek a en de korte b. Willen de grote en de kleine rechthoek gelijkvormig zijn, dan moet

$$a : b = b : (a - b)$$

zijn. Anders geformuleerd:
de zijde a is zo verdeeld in stukken b en $a - b$, dat de zijde a staat tot het grotere stuk als het grotere stuk tot het kleinere. Zulk een verdeling van een lijnstuk staat ook bekend als de *gulden snede.* Men vindt hem algebraïsch door de evenredigheid uit te werken,

$$a(a - b) = b^2$$

oftewel

$$b^2 + ab - a^2 = 0,$$

waaruit

$$b = \tfrac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$$

volgt. Er zijn echter ook een aantal meetkundige constructies om de gulden snede te verkrijgen.

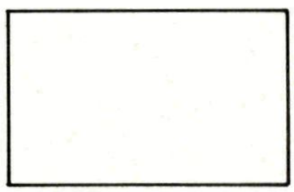


Fig. 1a.

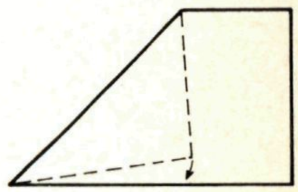


Fig. 1b.

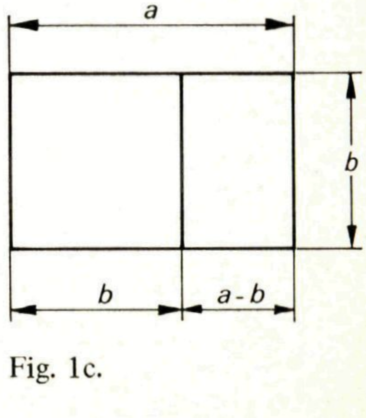


Fig. 1c.

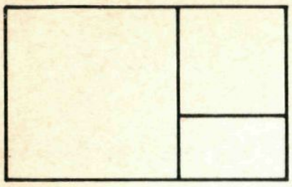


Fig. 2.

Wat geschiedt nu, als ik de tweede rechthoek net zo bewerk als de oorspronkelijke (fig. 2)? Ik beweer dat de derde rechthoek weer met de tweede (dus ook met de eerste) gelijkvormig is. Inderdaad, de zijden van de eerste rechthoek waren

a, b

die van de tweede

$b, c = a - b$

die van de derde moeten

$c, d = b - c$

worden. Tussen de zijden van de eerste en de tweede rechthoek bestond de evenredigheid

$a : b = b : c.$

Maar volgens een bekende eigenschap van evenredigheden is dit ook

$$\begin{aligned} a : b &= b : c \\ &= (a - b) : (b - c) \\ &= c : d \end{aligned}$$

waarmee het gestelde bewezen is.

De drie rechthoeken zijn gelijkvormig en als ik dit afhaalproces voortzet, dan krijg ik een rij rechthoeken, die allemaal gelijkvormig zijn. Noem ik de langste zijden ervan

$u_1, u_2, u_3, \ldots$

dan zijn de kortste zijden respectievelijk

$u_2, u_3, u_4, \ldots$

en hierbij is elke zijde gelijk aan de som van de twee volgende dus

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 + u_3 \\ u_2 &= u_3 + u_4 \\ u_3 &= u_4 + u_5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dit doet denken aan de rij van Fibonacci

$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

waarbij elke term gelijk aan de som van de twee *voorafgaande* (i.p.v. volgende) is. De opeenvolgende gulden sneden vormen dus als het ware een omgekeerde rij van Fibonacci. Daar vandaan het rare opschrift boven dit verhaal.

°°Vierkantenkransen rond een driehoek

In het artikel 'Pythagoras uitgebreid' in het vorig nummer, ontdekten we bijzonderheden aan de vierkanten die we in kransen rond een rechthoekige driehoek kunnen tekenen.

De figuur 1 die bij dit artikel is afgedrukt doet het wat algemener: de centrale driehoek is niet noodzakelijk rechthoekig. Deze figuur geeft de indruk, dat bij het naar buiten toe voortzetten van de kransen er regelmatigheden ontstaan: de zijden van vierkant A' zijn evenwijdig aan die van A, evenzo voor B' en B, enz.
Is dat zo? Of lijkt het maar zo in onze tekening en zal de ligging van de vierkanten wijzigen naarmate we meer naar buiten gelegen kransen bekijken?

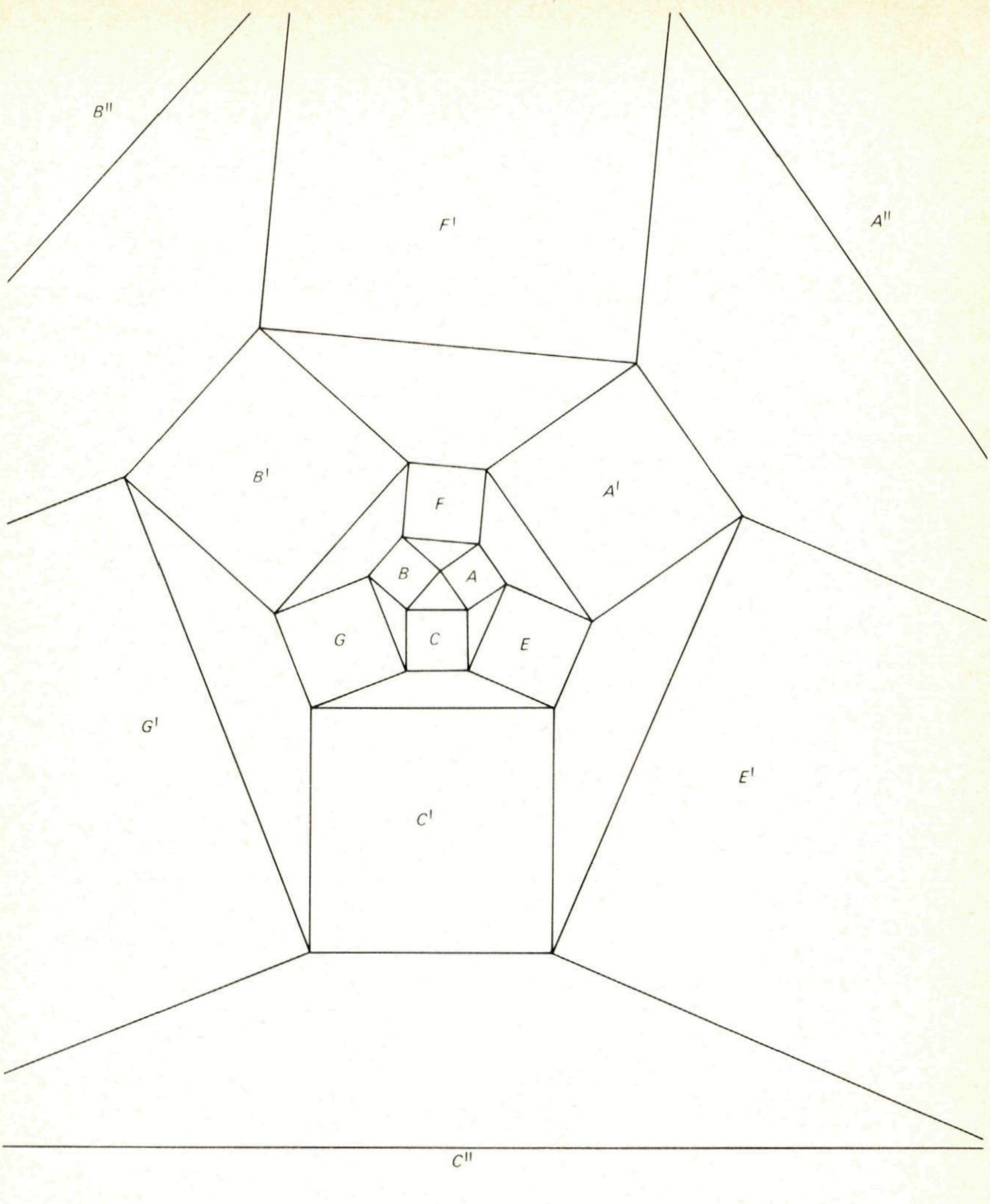


Fig. 1.

Het ligt voor de hand dat we voor een onderzoek bij de centrale driehoek moeten beginnen. We concentreren ons eerst op vierkant F.

De kern van het betoog berust op een geschikt gekozen rotatie (fig. 2) over -90°. We trekken hieruit de volgende conclusies.

De aangegeven zwaartelijn (lengte z) is te beschouwen als een middenparallel in de driehoek die ontstaat uit samenvoeging van kerndriehoek en geroteerde driehoek. Hieruit volgt

$P'Q' = 2z \Rightarrow f = 2z$

en zwaartelijn $/\!/ \ P'Q'$, dus $\perp PQ$, dus $/\!/ \ QR$. Soortgelijke conclusies gelden voor de vierkanten D en E.

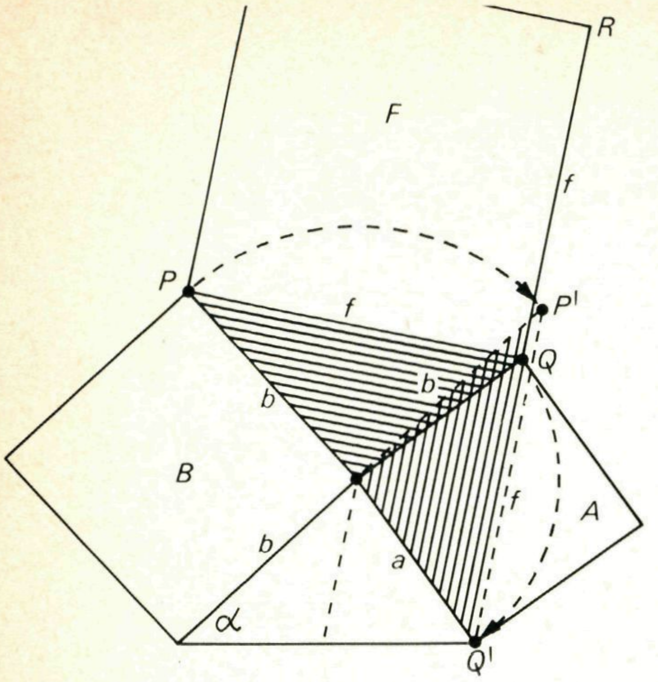


Fig. 2.

In figuur 3 is nu gemakkelijk aan te tonen dat de driehoek die binnen A ontstaat door verlenging van de zijden van de vierkanten E en F, ook verkregen kan worden door translatie van een driehoek die door twee zwaartelijnen door de centrale driehoek wordt afgesneden.

Met de wetenschap dat het zwaartepunt van een driehoek op $\frac{2}{3}$ van de zwaartelijn ligt, kunnen we afleiden dat een zijde van A door een vermenigvuldigingstransformatie met factor

$$\frac{2z + \frac{2}{3}z}{\frac{2}{3}z} = 4$$

Hiermee is de gelijkstandigheid van A en A' bewezen. De lengtematen van de vierkanten A', B' en C' zijn dus viermaal die van respectievelijk A, B en C.

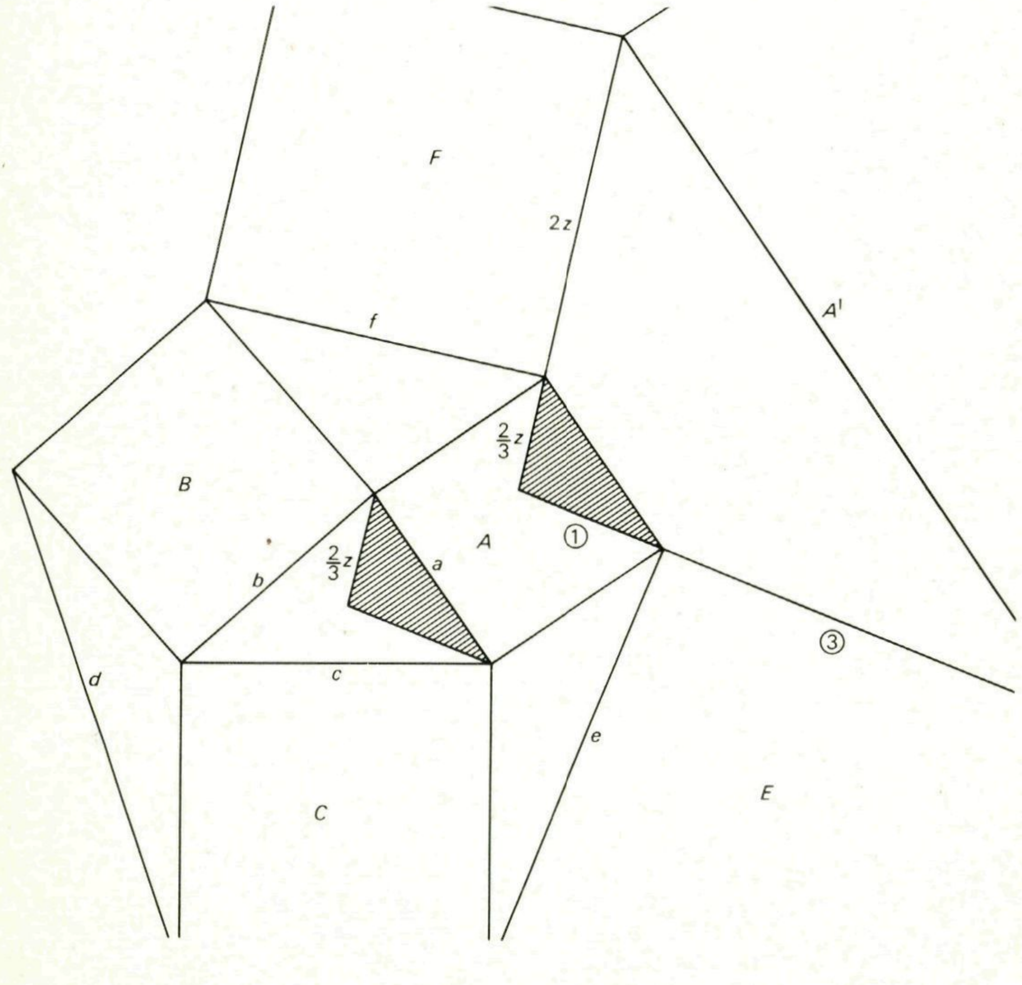


Fig. 3.

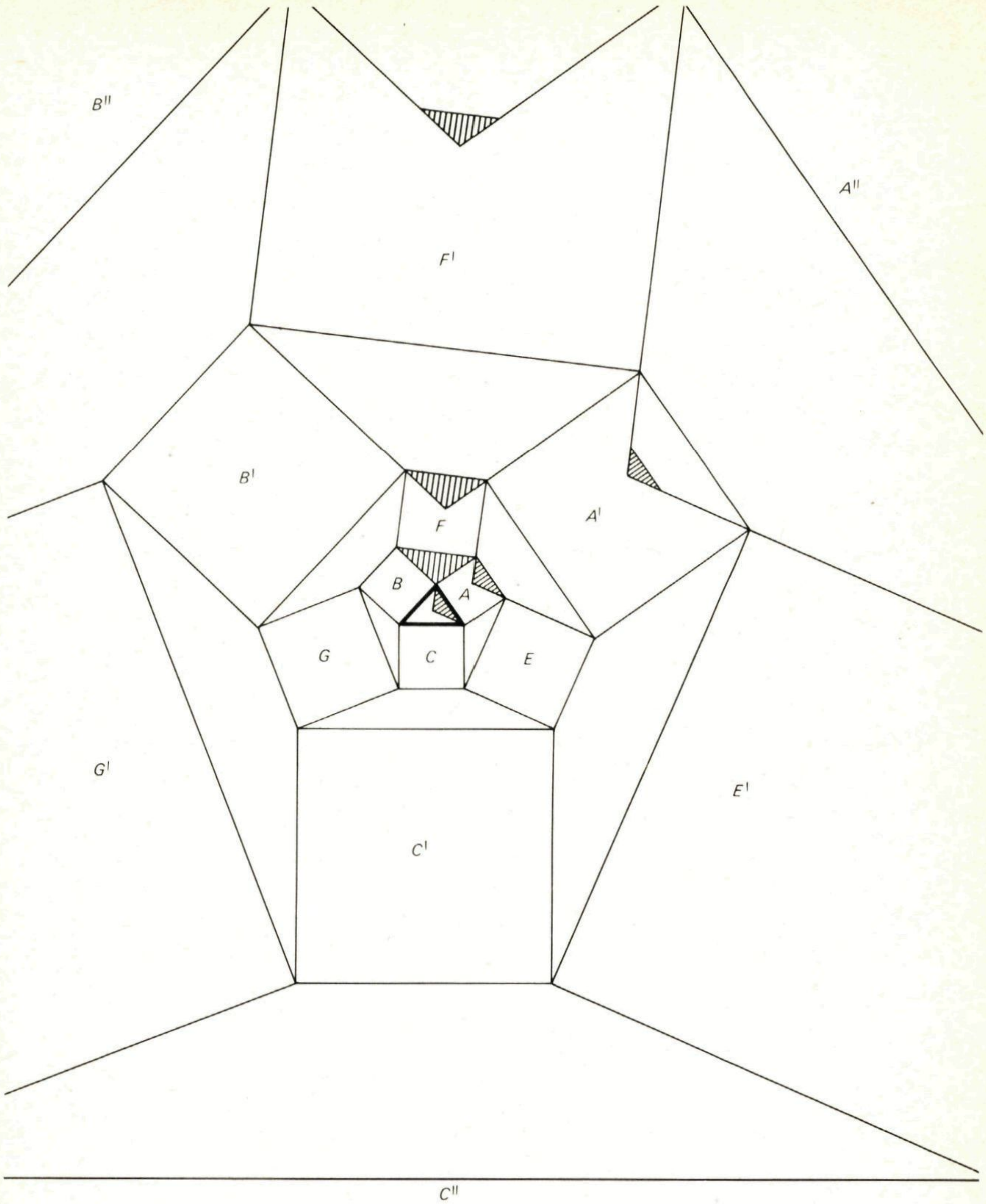


Fig. 4.

Op een soortgelijke manier kun je in figuur 4 aantonen dat voor D', E' en F' een factor 5 geldt t.o.v. D, E en F en bovendien de gelijkstandigheid van de respectievelijke vierkanten.
Het is nu duidelijk dat de maten van alle 'A, B, C'-vierkanten uit te drukken zijn in a, b en c, en de maten van de 'D, E, F'-vierkanten in d, e en f.
Nog mooier zou het zijn als we voor de 'D, E, F'-kransen ook een uitdrukking in a, b en c konden vinden.
Dat zijn immers de maten van de centrale driehoek waarvan we uitgaan.

Dit komt niet zo mooi uit, maar we doen een poging in fig. 2.
De cosinusregel in de centrale driehoek geeft:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
en in centrale plus geroteerde driehoek:
$f^2 = (2b)^2 + c^2 - 4bc \cos \alpha$.
Eliminatie van $\cos \alpha$ geeft: $f^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, waaruit f berekend kan worden:
Geven we met A, B, C, enz ook de oppervlaktes van de desbetreffende vierkanten aan, dan luidt het verkregen resultaat:

$$F = 2A + 2B - C \qquad (1)$$

Op dezelfde wijze kan bewezen worden:

$$\begin{array}{rl} E = & 2A - B + 2C \\ D = & -A + 2B + 2C \ + \\ \hline D + E + F = & 3(A + B + C) \qquad (2) \end{array}$$

Dit is in ieder geval een gemakkelijk leesbaar resultaat.
Voor een rechthoekige driehoek waarvoor geldt $C = A + B$, geldt dus ook dankzij (1):
$C = F$ (3)
en dankzij (2) en (3):
$D + E + F = 6F$ of wel $D + E = 5F$.

Een resultaat dat we in het artikel 'Pythagoras uitgebreid' ook al verkregen hadden. Het is hier ontstaan als bijzonder geval van een iets algemener ingesteld onderzoek.
Er zijn nog heel wat bijzonderheden uit fig. 4 op te diepen. Probeer zelf eens het volgende te bewijzen:
We noemen de som van de oppervlaktes van de vierkanten uit de n^{de} krans O_n.

Bewijs dat:
$O_1 : O_2 : O_3 : O_4 : O_5 : O_6 : O_7 =$
$1 : 3 : 16 : 75 : 361 : 1728 : 8281$

De stof voor dit artikel en het artikel: Pythagoras uitgebreid ontvingen wij van Ir. J. C. G. Nottrot, die nog tal van andere interessante merkwaardigheden over deze figuur afleidde.

°°Van punt tot hyperkubus

We werken in de wiskunde met punten, lijnen, vlakken en lichamen; met lengten, oppervlakten en inhouden.
Een punt noemt men nuldimensionaal, een lijnstuk eendimensionaal, een vierkant tweedimensionaal, een kubus driedimensionaal. Waarom zouden we hier stoppen? Wat weerhoudt ons het dan volgende een hyperkubus te noemen, behorend tot de vierdimensionale wereld?

Maar wat is dat dan voor iets vreemds? Zelf zijn we 3-dimensionale wezens, behorend tot de wereld van de kubus. De zogenaamde R_4-ruimte is voor ons ontoegankelijk. Iedereen heeft wel eens van platlanders gehoord, levend in de R_2-ruimte. Voordat wijzelf aan hoogbouw en bergbeklimmen, aan vliegtuigen en ruimtevaart begonnen, gedroegen we ons ook zo'n beetje als platlanders.
Als je alleen maar lengte kent en je wereld is een lijn, dan ben je lijnlander en woon je in R_1.
Het is eigenlijk vreemd dat we ons wel de toestand van R_1- en R_2-wezens kunnen voorstellen, maar de grootste moeite er-

mee hebben als het om de R_4-ruimte gaat.
We gaan nu een voorzichtige poging wagen, althans in onze fantasie, deze ruimte te betreden.
We volgen de weg van de analogie. Wat wil dat zeggen?
We gaan na hoe we een platlander die wel het vierkant al heeft uitgevonden, over een kubus zouden moeten vertellen. Misschien zou hij dan wel zo intelligent zijn, om daarna zelf het aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken ervan te berekenen. Maar het genoegen ooit een echte kubus te aanschouwen, is niet voor hem weggelegd.
We gaan de zaken systematisch aanpakken.
In fig. 1a verplaatst een punt zich in een ruimterichting over de vector $\bar{a}_1$ van A naar A'.

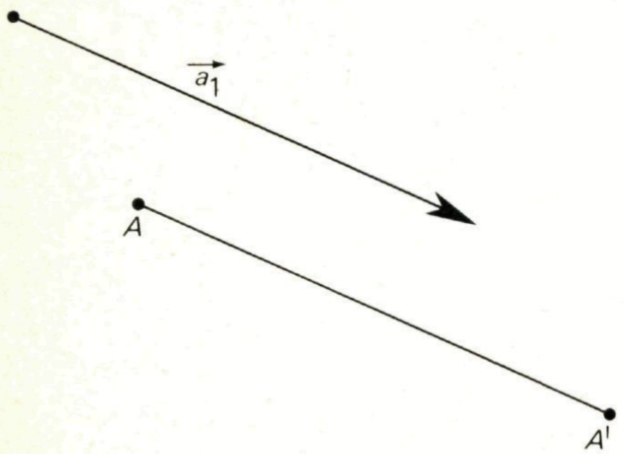


Fig. 1a. Een lijnstuk ontstaat door translatie van een punt.

In fig. 1b wordt het ontstane lijnstuk in zijn geheel verplaatst over de translatievector $\bar{a}_2$, waarvan de lengte even groot is als van $\bar{a}_1$, maar de richting loodrecht staat op die van $\bar{a}_1$. $ABB'A'$ wordt zodoende een vierkant. Zelfs een platlander kan het nog begrijpen; de lijnlander knipt echter met zijn eendimensionale oogjes.
In fig. 1c wordt dit proces nogmaals herhaald; het vierkant ondergaat een translatie over de vector $\bar{a}_3$, even groot als $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ maar loodrecht staande op beide.

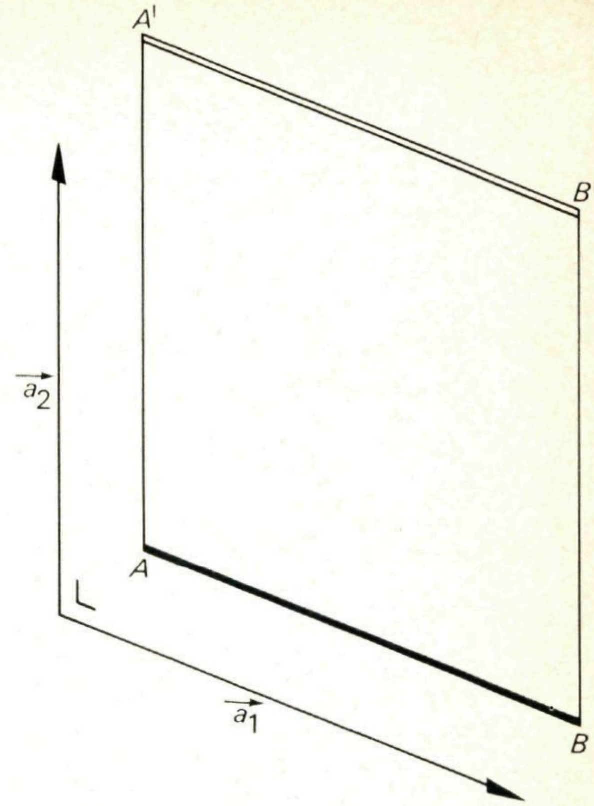


Fig. 1b. Een vierkant ontstaat door translatie van een lijnstuk.

Jij, ruimtevaarder, zult daar wel geen moeite mee hebben. Op deze wijze vormen het originele vierkant ($ABCD$) en de beeldfiguur daarvan ($A'B'C'D'$) tesamen de kubus.
Maar nu gaat het komen. Laten we de moed opbrengen op de ingeslagen weg verder te gaan.

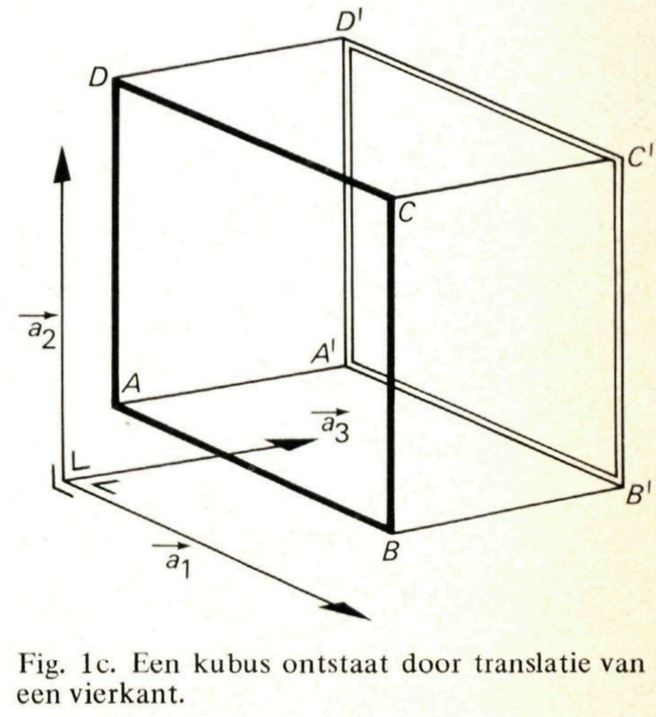


Fig. 1c. Een kubus ontstaat door translatie van een vierkant.

In fig. 1d wordt nog eenmaal een vector $\bar{a}_4$ aangebracht (in onze fantasie) loodrecht op zowel (hoe bestaat het?) $\bar{a}_1$, als $\bar{a}_2$, als $\bar{a}_3$ en in grootte gelijk aan elk ervan.

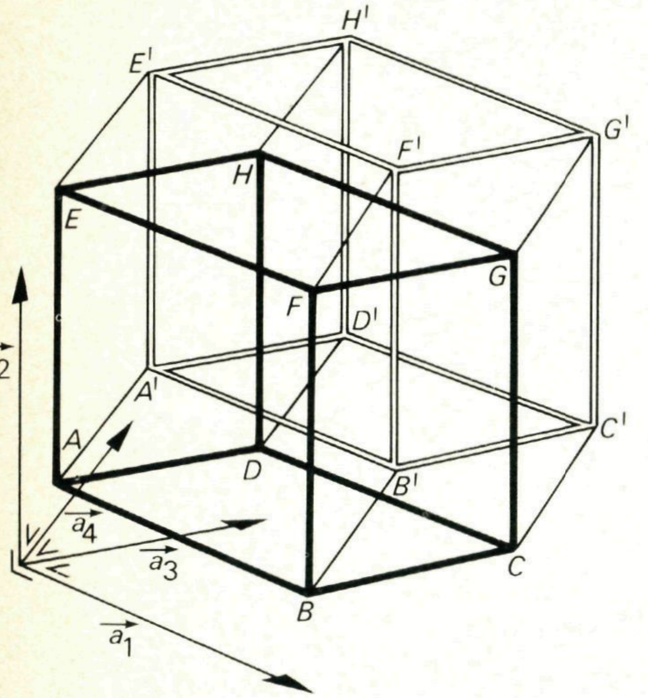


Fig. 1d. Een hyperkubus ontstaat door translatie van een kubus.

De kubus (*ABCD/EFGH*) en zijn beeld (*A'B'C'D'/E'F'G'H'*) bepalen samen de hyperkubus!
Het zal je nu niet moeilijk vallen om te ontdekken dat onze hyperkubus 16 hoekpunten heeft, 32 ribben, 24 vlakken en ... 8 kubussen als begrenzingen.
Om deze laatste reden wordt in de wiskunde deze hyperkubus achtcel genoemd. Zoals een lijnstuk begrensd wordt door 2 punten, zo wordt een vierkant begrensd door lijnstukken, een kubus door vlakken en onze hyperkubus door ... ruimten met inhoud. Je moet je dus wel indenken dat lichamen zoals *ADD'A'/EHH'E'* ook kubussen zijn. Dat is voor jou net zo raadselachtig als voor de platlander, bij het zien van fig. 1c, dat *BB'C'C* een vierkant is.
Er zijn in fig. 1d totaal 8 kubussen. Probeer ze maar op te zoeken.

Het zal nu wel zo zijn dat je allerminst tevreden bent en je zou (jij 3-dimensionale) toch nog wel verder de vreemde 4-dimensionale wereld willen betreden. Uiteindelijk zal dat toch niet gelukken, want we zijn gedoemd in onze 3-dimensionale wereld te blijven vertoeven. Het enige wat we kunnen proberen is onze antenne zo af te stellen dat we berichten uit dat verre gebied kunnen ontvangen.
En dat zou dan kunnen gelukken op nog drie golflengten. We zijn een eind gevorderd door middel van analogie.
We gaan nu proberen ons inzicht te vergroten met behulp van
1. een uitslag 2. een projectie 3. een doorsnijding

Door middel van een uitslag
Als je een 1-dimensionaal wezen (een lijnlander) een vierkant wil tonen, zou je de draadfiguur *ABCD* (fig. 2a) open kunnen

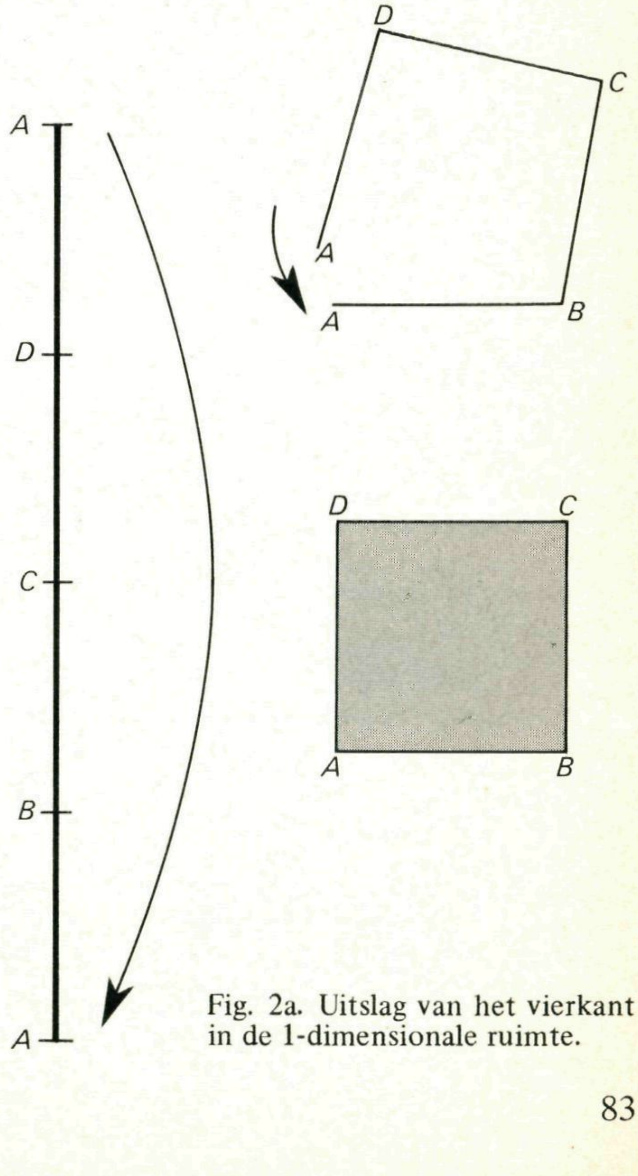


Fig. 2a. Uitslag van het vierkant in de 1-dimensionale ruimte.

buigen tot een lijnstuk *ABCDA* en dat in zijn 1-dimensionale wereld neerleggen. We tonen hem wat wij noemen de uitslag van het vierkant.
Je moet je echter niet verbazen als de lijnlander stomverbaasd reageert als je beweert dat hij de beide punten *A* aan elkaar moet denken.
In fig. 2b staat de uitslag van de kubus. Pijlen duiden op de verbindingen als we hem 3-dimensionaal willen plakken. De platlander beschouwt het als pure tovenarij om HG op *HG* te brengen.

We zullen nu zelf de stoute sprong moeten maken.
In fig. 2c staat de 'uitslag' van de hyperkubus in onze 3-dimensionale ruimte. Je telt 8 kubussen maar ze moeten nog zo aan elkaar geplakt worden dat bijvoorbeeld *MNPL* vastkomt aan *MNPL*! Voor ons, 3-dimensionale wezens, je reinste onzin, maar . . .het zou toch wel eens kunnen. . .maar niet in de 3-dimensionale wereld!

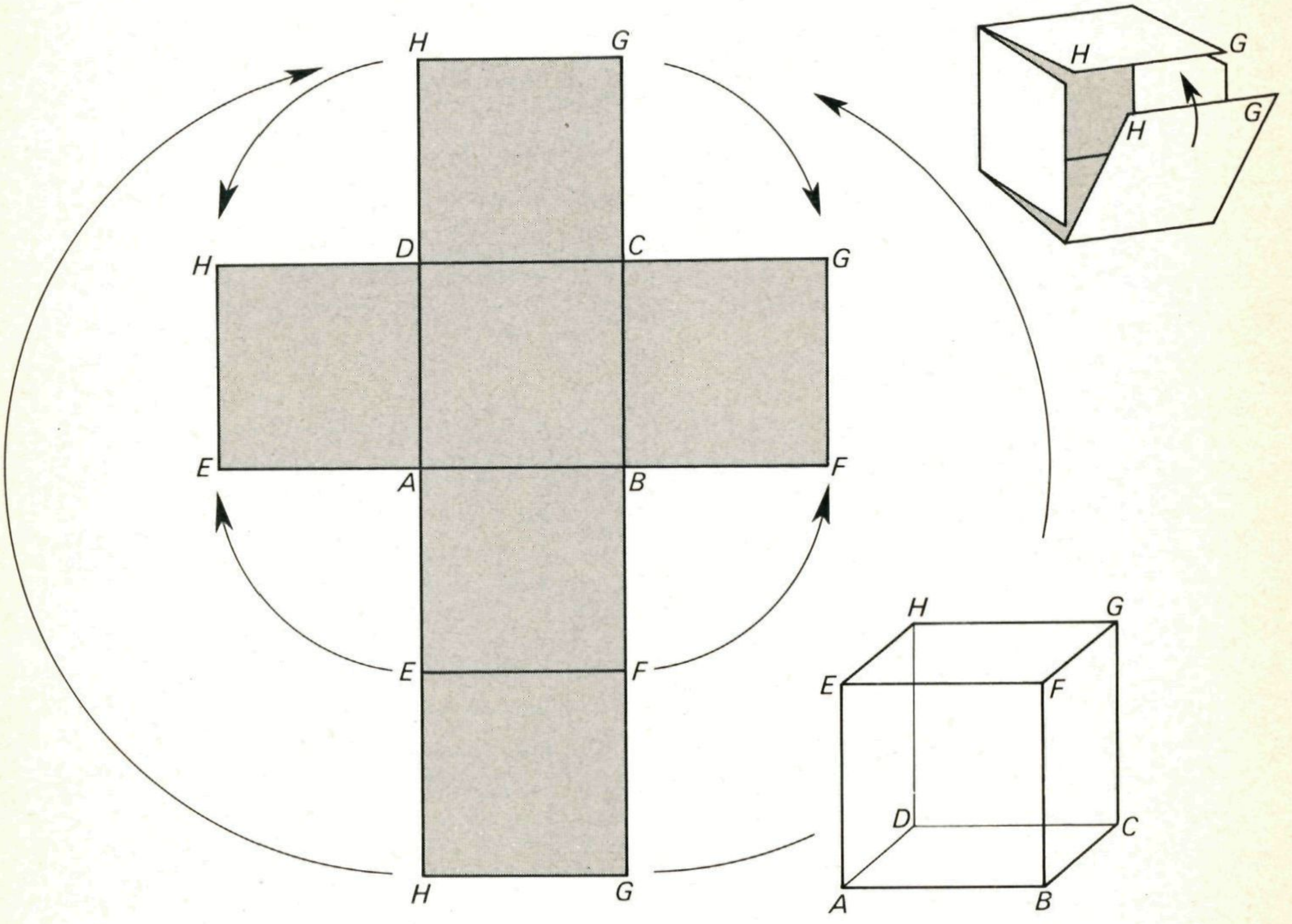


Fig. 2b. Uitslag van de kubus in de 2-dimensionale ruimte.

Door middel van een projectie
Dit is een andere mogelijkheid om iets uit een hogere dimensie in je eigen wereld te ervaren. Zo is fig. 1c eigenlijk de projectie van een kubus op het platte vlak.

Hetgeen parallellogram lijkt is in werkelijkheid vierkant. *DC* en *D'A'* die elkaar schijnbaar snijden, stellen in werkelijkheid kruisende lijnen voor. Door zo'n projectie gaat dus veel realiteit verloren.

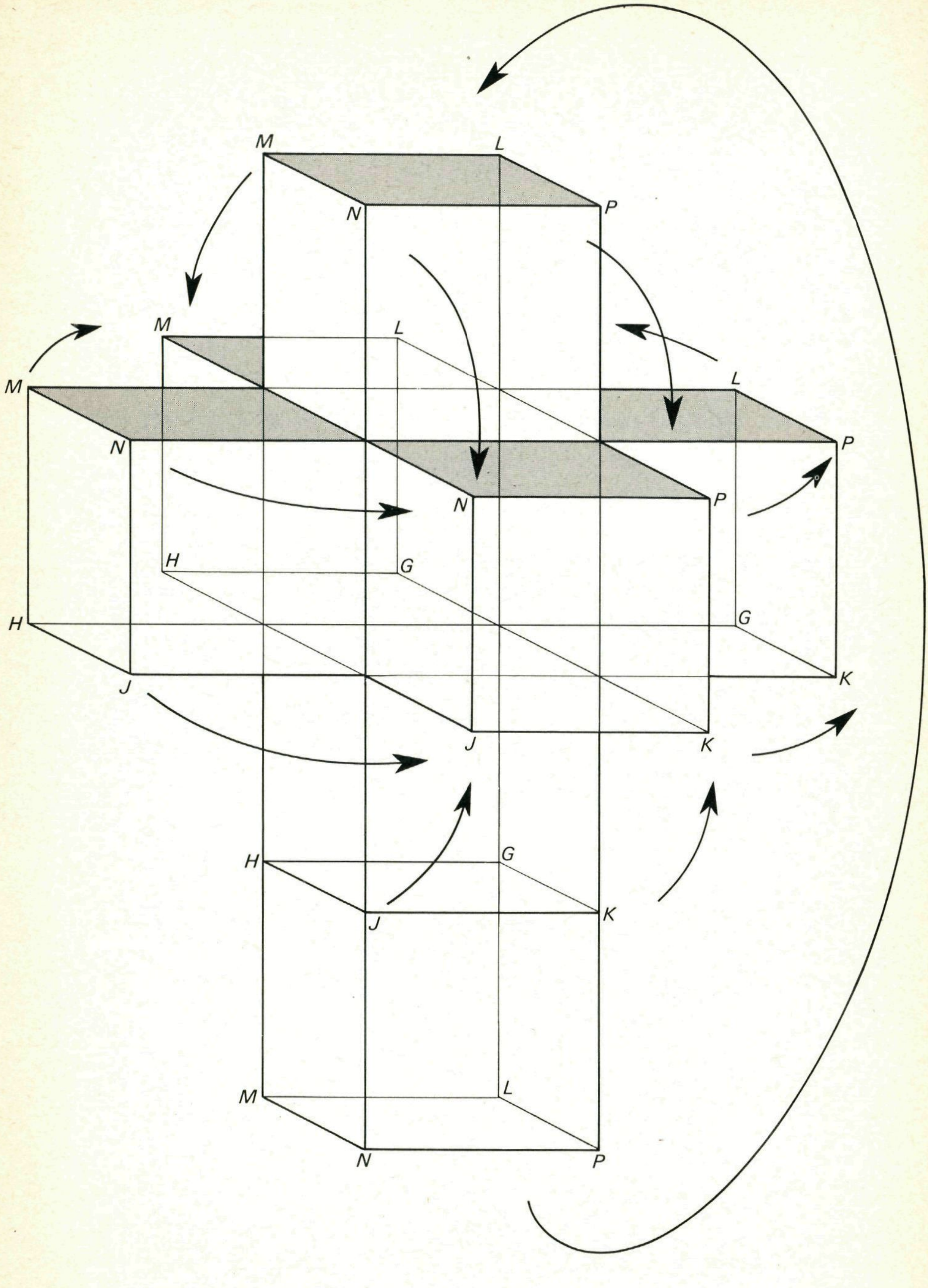


Fig. 2c. Uitslag van de hyperkubus in de 3-dimensionale ruimte.

Wat zou er van een vierkant overblijven als we het projecteren op een rechte? Je ziet het in fig. 3a. Arme lijnlander die het daarmee stellen moet! $A'B'C'D'$ is zijn hele ervaring van ons vierkant.
We willen nu hetzelfde uithalen met de hyperkubus.
We projecteren deze in onze 3-dimensionale ruimte.
Dat betekent dus concreet: we kunnen een hyperkubus niet uit karton plakken maar wel de projectie.
Hoe zoiets eruit ziet vind je in fig. 3b. Het model is gedeeltelijk opengelaten om het inwendige te kunnen zien. Bij de hyperkubus staan er echter dus wel vlakken loodrecht op elkaar die deze eigenschap in de projectie niet meer vertonen.

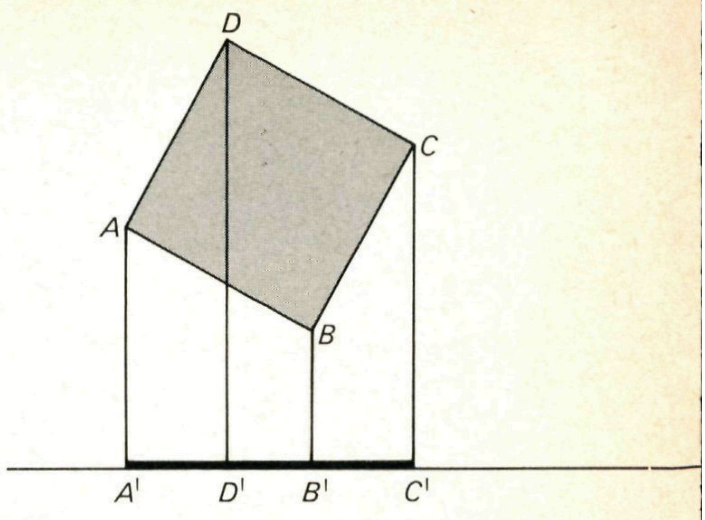


Fig. 3a. Projectie van een vierkant op een lijn.

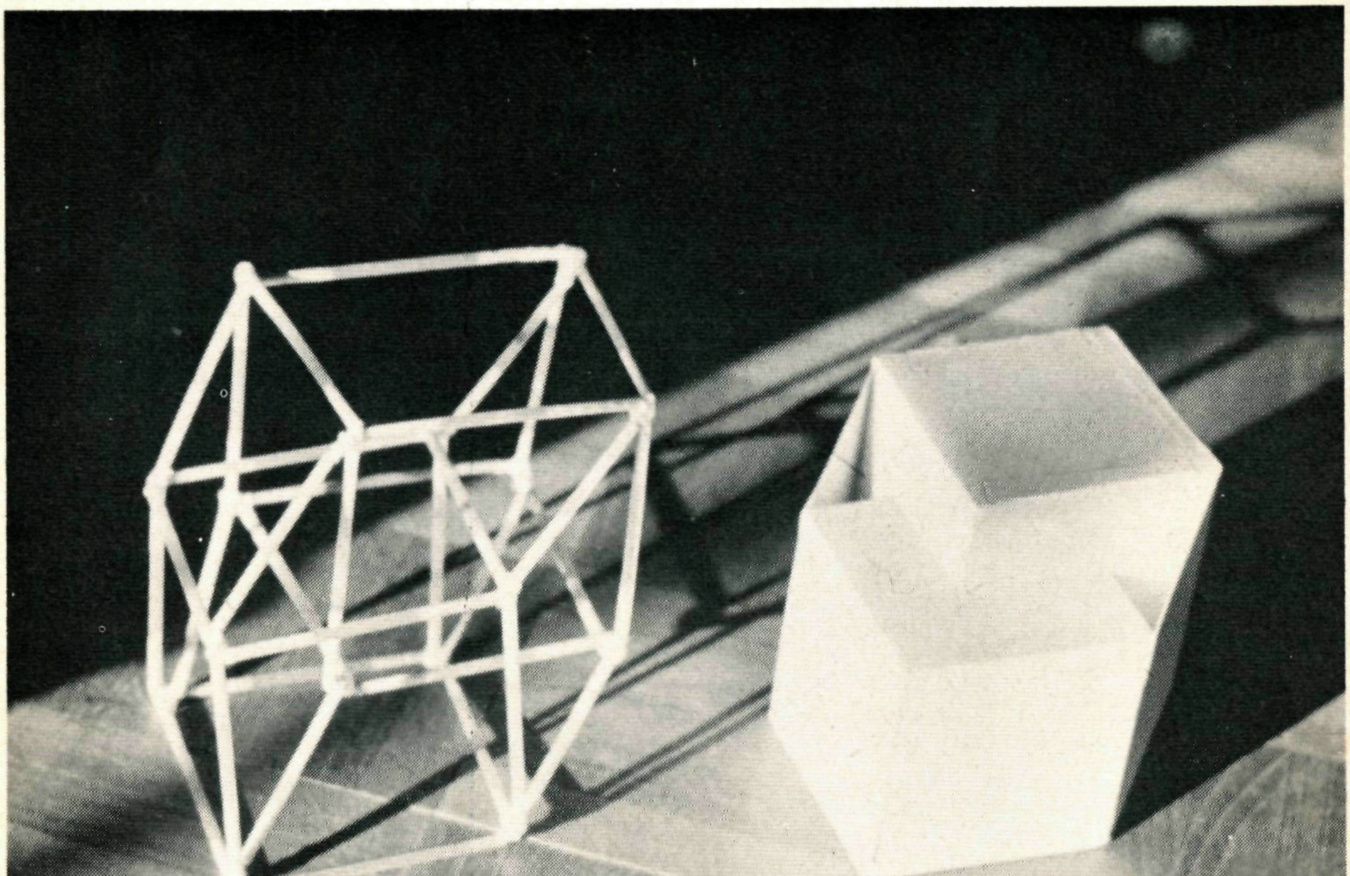


Fig. 3b. Projectie van een hyperkubus in onze 3-dimensionale ruimte.

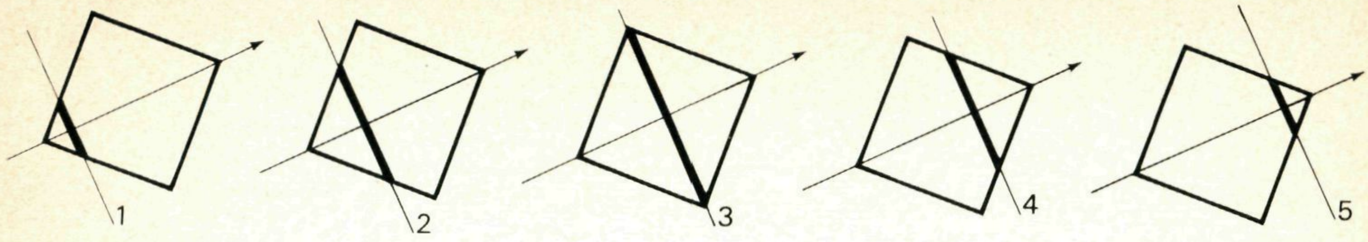


Fig. 4

Door middel van een doorsnijding

In fig. 4 is een vierkant getekend met een van zijn diagonalen. Loodrecht daarop staat een snijlijn die zich verplaatst. We zouden het afgesneden stuk telkens aan een lijnlander kunnen tonen om hem 'gevoel' voor een vierkant te geven. Je kunt ook zeggen: in fig. 4a passeert een vierkant een lijn.

In fig. 5 brengen we een zich verplaatsend snijvlak aan, loodrecht op een lichaamsdiagonaal. De doorsnijdingsfiguren kunnen we dan aan platlanders tonen om hen gevoel voor een kubus te geven. Je kunt ook zeggen: de kubus passeert platland. Als je een kubus onderduwt in een wateroppervlak ervaar je hetzelfde. Bij verdere verplaatsing verschijnen de diverse snijfiguren (driehoeken en zeshoeken).

Tenslotte dan de hyperkubus. In fig. 6 passeert deze onze ruimte. Onze ruimte staat daarbij loodrecht op een celdiagonaal. De snijlichamen die dan verschijnen zijn voor 7 standen van de ruimte aangegeven.

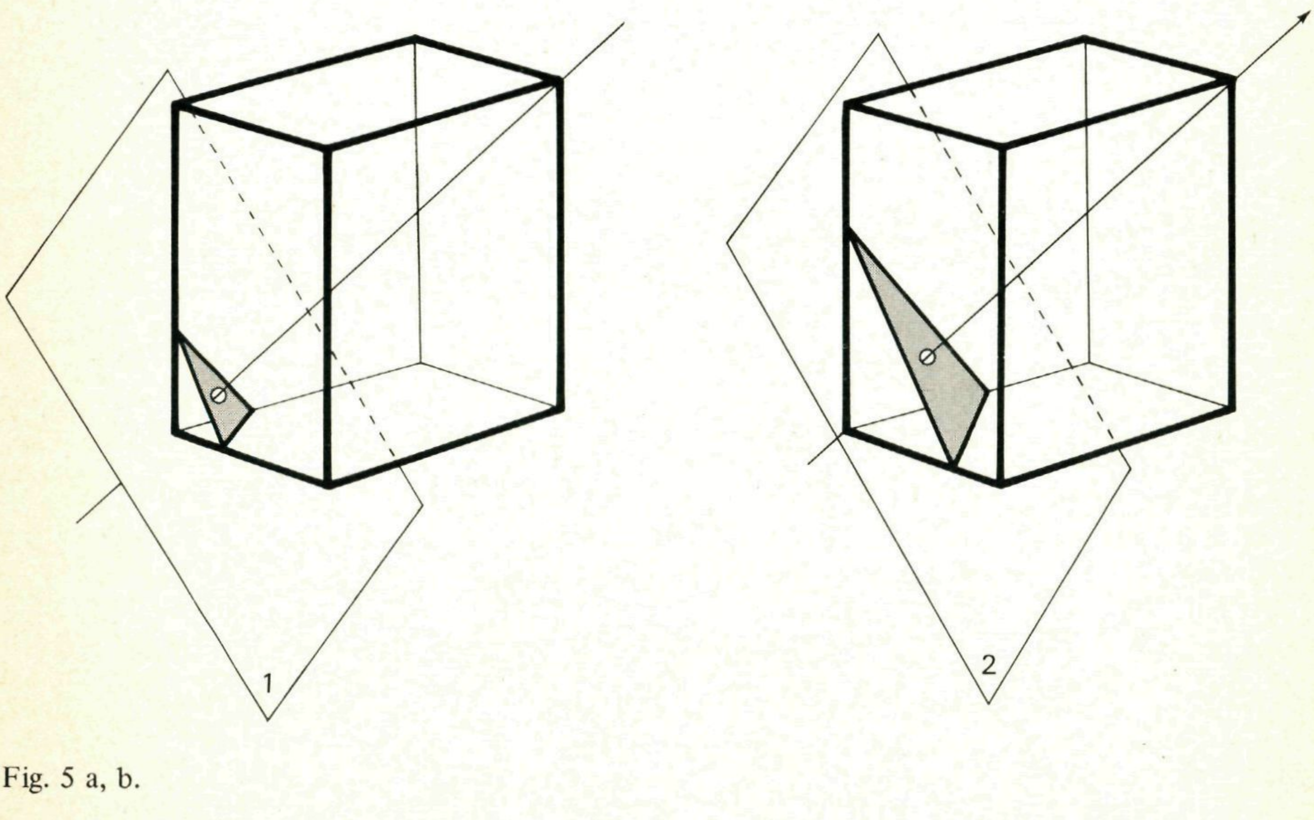


Fig. 5 a, b.

°°°Oneindiger dan oneindig?

Er zijn oneindig veel vijfvouden: ..., ..., −10, −5, 0, 5, 10, ..., ... Er zijn ook oneindig veel gehele getallen, om zo te zien veel meer dan het aantal vijfvouden, want de verzameling van de vijfvouden is een deelverzameling van $\mathbb{Z}$.

Toch kunnen we de verzameling van de vijfvouden zo onder die van de gehele getallen zetten, dat duidelijk blijkt, dat er een 1−1-relatie tussen beide verzamelingen is: bij ieder geheel getal behoort precies één vijfvoud en bij ieder vijfvoud behoort precies één geheel getal:

$$\begin{array}{cccccccccc} \ldots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \ldots, & -15, & -10, & -5, & 0, & 5, & 10, & 15, & \ldots \end{array}$$

De verzamelingen van de vijfvouden en van de gehele getallen zijn gelijkmachtig. Maar de verzameling van de gehele getallen is ook weer gelijkmachtig met die van de natuurlijke getallen. Ook tussen die twee verzamelingen is een 1−1-relatie:

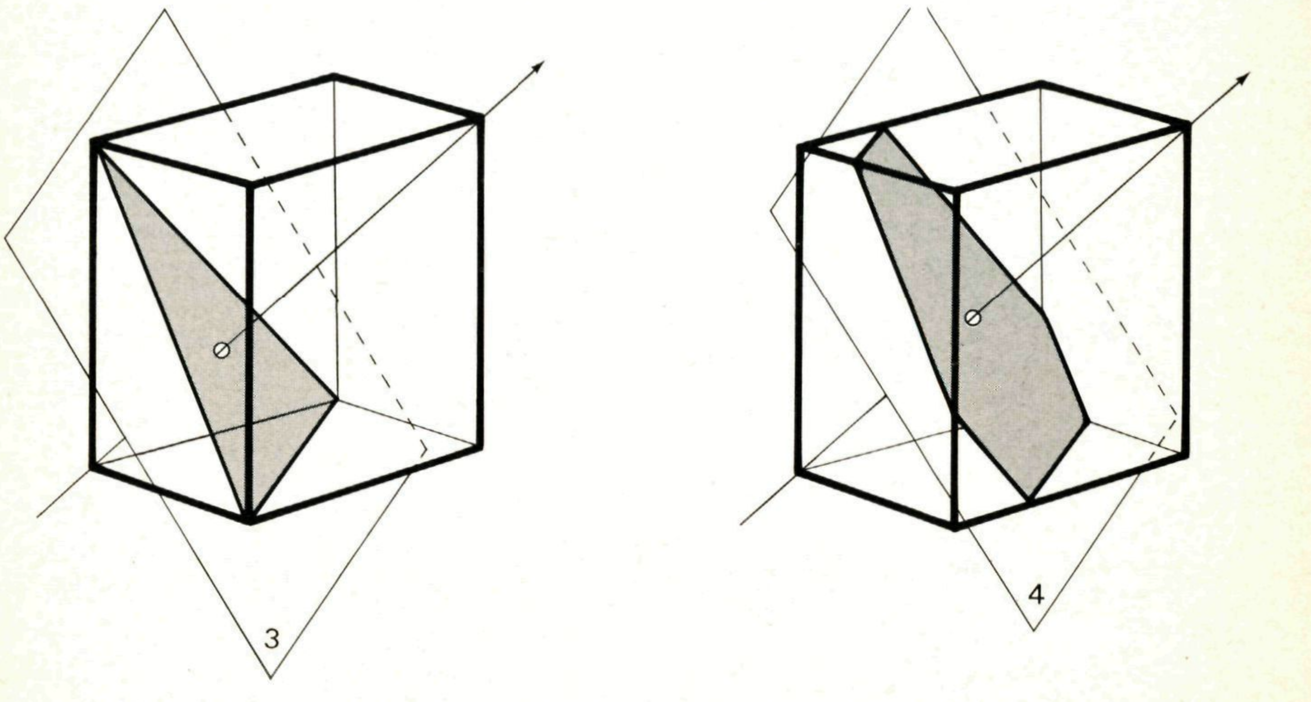
$$\begin{array}{cccccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & -4, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \ldots \end{array}$$

Daarom is de verzameling van de vijfvouden ook gelijkmachtig met $\mathbb{N}$. Alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\mathbb{N}$ zijn *aftelbaar oneindig*. Hun 'machtigheid' (kardinaalgetal) wordt voorgesteld door $\aleph_0$.

Voorbeelden van aftelbaar oneindige verzamelingen zijn:
de verzameling van de even getallen, de oneven getallen, de drievouden, de onvereenvoudigbare breuken tussen 0 en 1, alle rationale getallen, de roosterpunten in het vlak.

Het feit dat er verzamelingen zijn die aftelbaar oneindig worden genoemd, doet de vraag rijzen of er oneindige verzamelingen zijn die niet-aftelbaar oneindig zijn. Zijn ze 'oneindiger' dan aftelbaar oneindig? Of misschien 'minder-oneindig'?
In 1874 heeft de grote man van de ver-

Fig. 5 c t/m f



zamelingenleer, Cantor, bewezen dat er oneindige verzamelingen zijn met een machtigheid die van $\aleph_0$ verschilt.
Het is niet moeilijk te bewijzen dat de verzameling van de reële getallen een grotere machtigheid heeft dan die van de natuurlijke getallen. Voor we dat bewijs gaan bekijken, moeten we de reële getallen zelf nog wat nader onder de loep nemen.

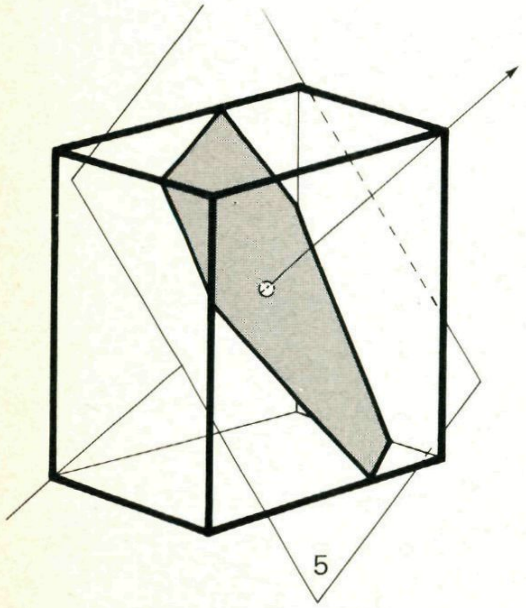
Elk reëel getal kan worden geschreven als een decimale breuk met oneindig veel decimalen. Daarbij doen zich drie gevallen voor, bijvoorbeeld:

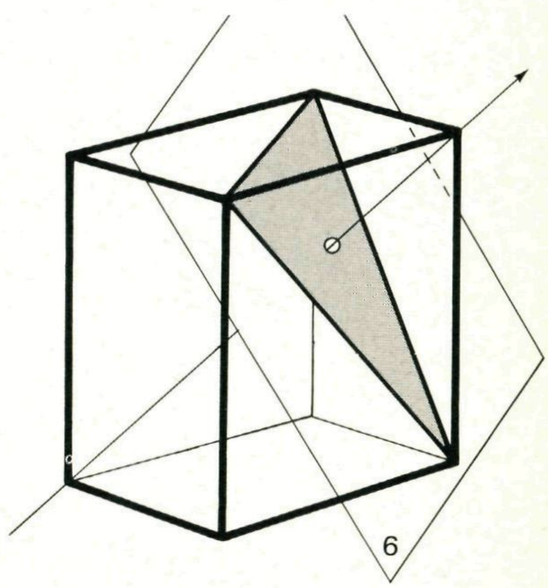
$\frac{1}{4} = 0{,}2500000000000000\ldots$
(verder alleen nullen)
$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142\ldots$
(de cijfergroep 142857 repeteert)
$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$
(niet alleen nullen, geen repeterende cijfergroep)

Getallen die tot de eerste twee soorten behoren zijn rationale getallen; die van de derde soort zijn irrationaal.
Bij de rationale getallen tref je ook de gehele getallen aan.

Voor het getal 3 bijvoorbeeld kun je schrijven, 3,000000000 .... maar ook 2,999999999 .... (verder alleen maar negens).
Nu laten we zien dat de verzameling van de reële getallen tussen 0 en 1 niet aftelbaar is (dan geldt dat voor de gehele verzameling $\mathbb{R}$ eveneens).
Stel je voor dat je een *aftelbaar oneindige* verzameling reële getallen tussen 0 en 1 hebt. Om moeilijkheden te voorkomen spreken we af dat we in deze verzameling niet zullen toelaten reële getallen waarvan de schrijfwijze als decimale breuk eindigt op niet anders dan negens. Komt bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$ in de verzameling voor dan wordt daarvoor geschreven 0,25000... (verder alleen nullen) en niet 0,24999... (verder alleen negens).
Omdat we aannemen dat de gekozen verzameling aftelbaar oneindig is, is aan ieder natuurlijk getal juist één van die reële getallen tussen 0 en 1 gekoppeld:

$0 \leftrightarrow 0{,}34628901\ldots$
$1 \leftrightarrow 0{,}51876308\ldots$
$2 \leftrightarrow 0{,}76658449\ldots$
$3 \leftrightarrow 0{,}08097684\ldots$ enz.


5


6

Op de plaats van de stippeltjes staan ook telkens decimalen en wel oneindig veel.

Hebben we hierdoor nu alle reële getallen tussen 0 en 1 afgeteld?

Nee! Het is heel eenvoudig een reëel getal te noemen dat in de gekozen verzameling niet voorkomt.

Je kunt dat op de volgende manier 'construeren':

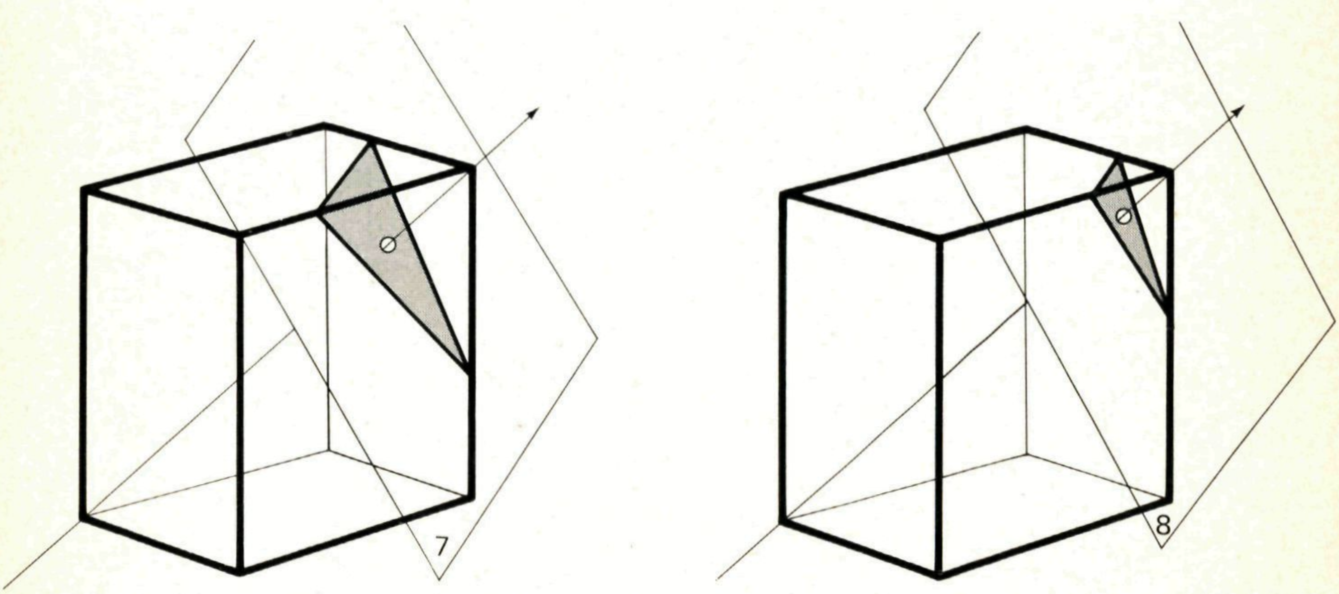
Kies als eerste decimaal van het getal een andere dan de eerste decimaal van het getal met nummer 0. Vervang de 3 bijvoorbeeld door 7.

– als tweede decimaal van het getal een andere dan de tweede decimaal van het getal met nummer 1. Vervang bijvoorbeeld de 1 door 3.
– als derde decimaal van het getal een andere dan de derde decimaal van het getal met nummer 2. Vervang bijvoorbeeld de 6 door 8.

Als je zo doorgaat met het vervangen van de $(k+1)$-de decimaal van het getal met nummer k door een andere, dan construeer je daardoor een reëel getal dat van elk der gegeven reële getallen in één decimaal verschilt en dat dus nog niet in de gegeven verzameling voorkomt. Aangezien je bij de keuze van de nieuwe decimalen ook nog een grote mate van vrijheid hebt kun je oneindig veel reële getallen construeren die nog niet in de gegeven verzameling voorkomen. Dat wil dus zeggen dat je een verzameling reële getallen kunt maken die niet met de natuurlijke getallen af te tellen is en die dus niet de machtigheid $\aleph_0$ heeft.

Cantor noemde de machtigheid van de verzameling der reële getallen de machtigheid van het continuum. Het is de machtigheid van de verzameling van de punten van een rechte lijn. Immers bij het gebruik van een zogenaamde getallenlijn heb je opgemerkt dat bij ieder reëel getal één punt van de lijn kan worden aangewezen en omgekeerd bij ieder punt van de lijn één reëel getal. Cantor heeft bewezen dat ook de verzameling van de punten van het platte vlak dezelfde machtigheid heeft. Dat betekent dus dat er een 1–1-relatie bestaat tussen de punten van het platte vlak en van een willekeurige lijn in het vlak. En zelfs de verzameling van de pun-

Fig. 5 g en h.



ten van de driedimensionale ruimte heeft deze machtigheid. En zelfs .... de verzameling van de punten van elke n-dimensionale ruimte ($n \in \mathbb{N}^+$) heeft deze machtigheid.
Is er misschien geen verzameling met een grotere machtigheid dan die van $\mathbb{R}$? Toch wel!
Om dat een beetje aannemelijk voor je te maken herinneren we even aan de volgende eigenschap van de verzamelingen: Een verzameling met k elementen ($k \in \mathbb{N}$) heeft 2^k deelverzamelingen. Kijk maar eens. De deelverzamelingen van $\{1, 2, 3, 4\}$ zijn

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$,

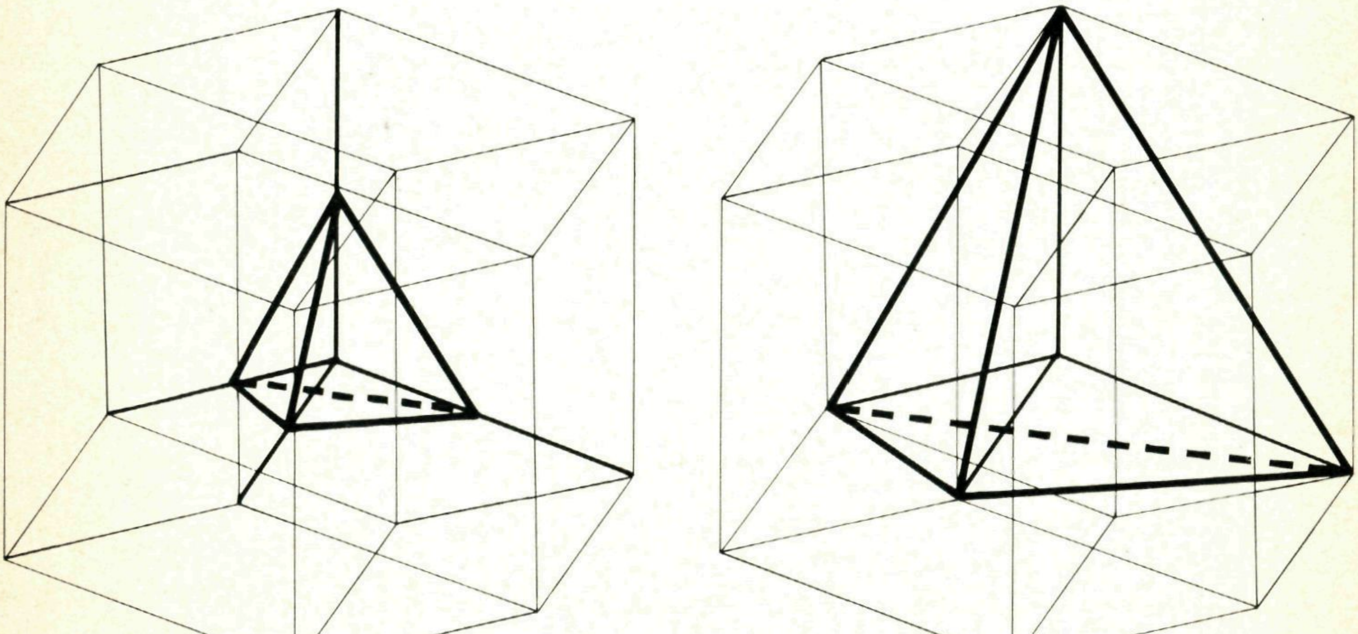
$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$

Tel maar na, het zijn er $16 = 2^4$.
Voor een verzameling met oneindig veel elementen kun je het aantal deelverzamelingen niet met een macht van 2 geven. Maar Cantor heeft bewezen dat bij elke verzameling, ook bij verzamelingen met oneindig veel elementen, de verzameling van zijn deelverzamelingen een grotere machtigheid heeft dan de gegeven verzameling zelf.
We zijn langzamerhand aangekomen op een terrein waarin het gemakkelijk is om te verdwalen. Het zal je trouwens ook wel langzamerhand gaan duizelen als je bedenkt dat bij elke oneindige verzameling er een te construeren valt met een grotere machtigheid, oneindiger dan oneindig om zo te zeggen.
Zullen we nog eens even terugblikken?
De lege verzameling heeft het kardinaalgetal 0,
elke verzameling met één element heeft het kardinaalgetal 1,
elke verzameling met twee elementen heeft het kardinaalgetal 2,

....

$\mathbb{N}$ heeft het kardinaalgetal $\aleph_0$. We noemen $\aleph_0$ een transfiniet kardinaalgetal. (Trans-finiet, voorbij het eindige.)
Alweer Cantor heeft laten zien dat er meer transfiniete kardinaalgetallen zijn, die je $\aleph_1$, $\aleph_2$, enz. zou kunnen noemen, als je ze op volgorde zet. Hoe die volgorde

Fig. 6 a en b.



bepaald wordt? Dat voert ons te ver in de wiskunde.
Vraag je je af, of de machtigheid van $\mathbb{R}$ dezelfde is als $\aleph_1$? Dat is iets wat nog niet zeker is. Maar wel zeker is, dat de oneindigheid van het kardinaalgetal van $\mathbb{R}$ een andere is dan de oneindigheid van het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. Wie de grens van het eindige overschrijdt, komt niet terecht in een dorre woestijn, maar een woud van oneindigheden wacht hem op. Ga echter dat woud niet in zonder gids. Het is er levensgevaarlijk.

°°Kan het nog korter?

Er zijn 4 punten gelegen op de hoekpunten van een vierkant. Stel je voor dat *A, B, C* en *D* huizen zijn en we willen wegen leggen om elk huis met elk ander te verbinden. De eenvoudigste oplossing lijkt het vierkant (fig. 2). Je zou ook een 'rondweg' kunnen leggen in de vorm van een cirkel door *A, B, C* en *D* (fig. 1). We willen nu proberen om een zo kort mogelijk wegennet te ontwerpen.

Laten we de zijde van het vierkant 6 stellen. Dat is een gunstig getal; er komen dan weinig breuken in de berekeningen. De totale weglengte in fig. 2 is dan 24. Het is direct duidelijk dat de oplossing in fig. 1a beslist slechter is. Omdat de diagonaal van het vierkant $6\sqrt{2}$ is, wordt de straal van de cirkel $3\sqrt{2}$ en de cirkelom-

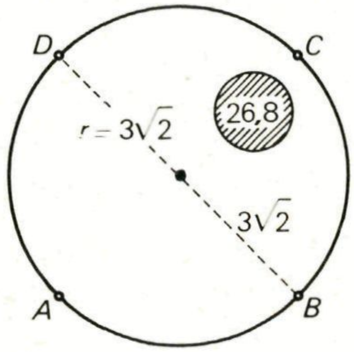


Fig. 1. Rondweg.

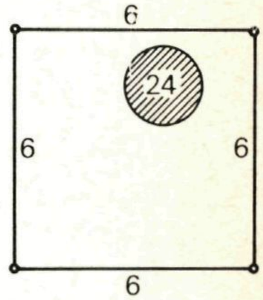
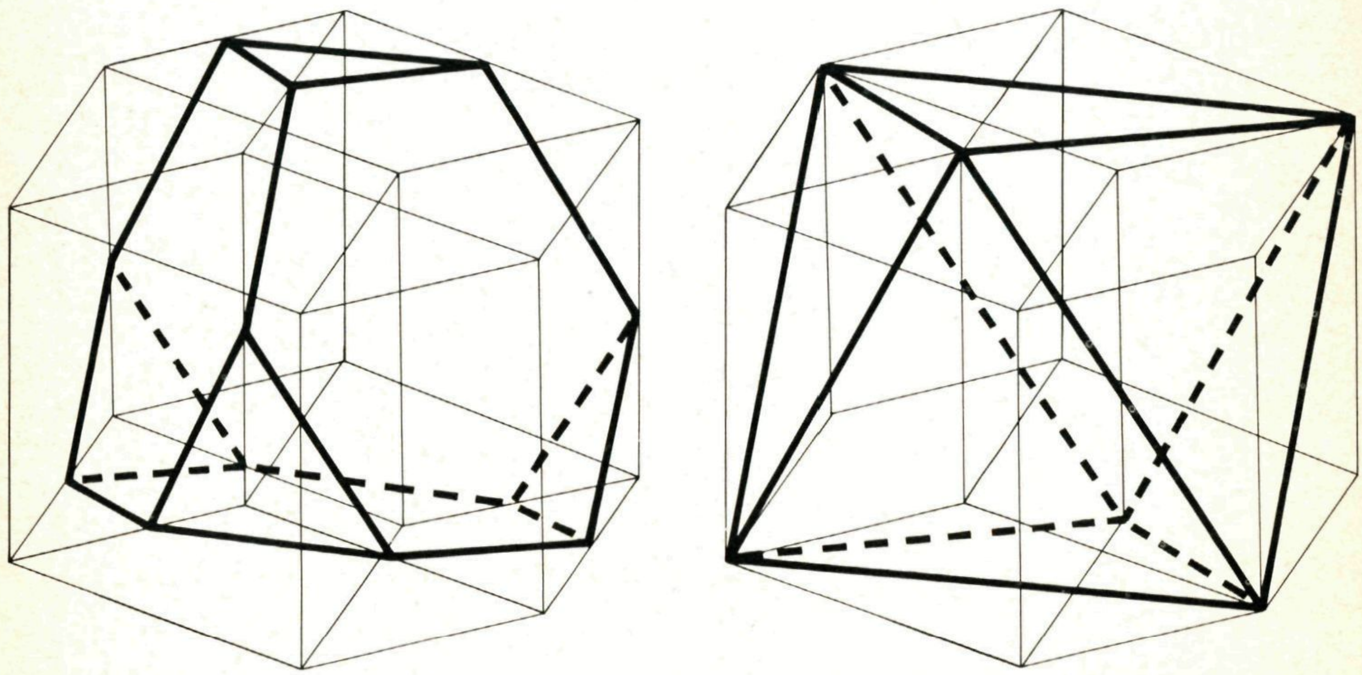


Fig. 2. Vierkantvorm.

Fig. 6 c t/m f.



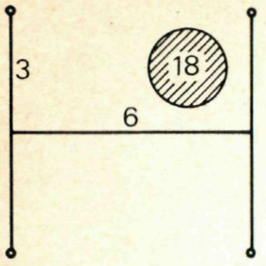


Fig. 3. *H*-verbinding.

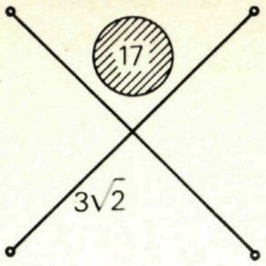


Fig. 4. *X*-verbinding.

trek $2\pi(3\sqrt{2})$ of $6\pi\sqrt{2} = 26{,}8$. Het kan gemakkelijk korter. Uitgaande van het vierkant zou je één zijde weg kunnen laten zoals in fig. 3. De weglengte is nu gedaald tot 18.

Nog gunstiger is de situatie van fig. 4. Trek de beide diagonalen; totale weglengte $4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = 17$.

En dat is alweer minder!

Je zou zo denken: dit is natuurlijk het beste, dat kan niet meer beter.

Maar het kan wel, de natuur zelf vindt het voor ons uit. We maken een kubus van ijzerdraad en dompelen die in zeepsop. Als je deze er weer uithaalt kunnen er zeepvliezen gespannen staan zoals in fig. 6. Wat is hier aan de hand? Wel, de vliezen proberen ten gevolge van de oppervlaktespanning een zo klein mogelijke oppervlakte te verkrijgen en construeren zo automatisch de gezochte verbindingen. Midden in de kubus verschijnt een klein vierkant en vandaar worden 8 trapeziumvormige vlakken gespannen naar de betreffende ribben. Bij nader bekijken blijken de hoeken met die vlakken telkens 120° te zijn. Alleen bij deze hoeken kunnen de oppervlaktespanningen in de vlie-

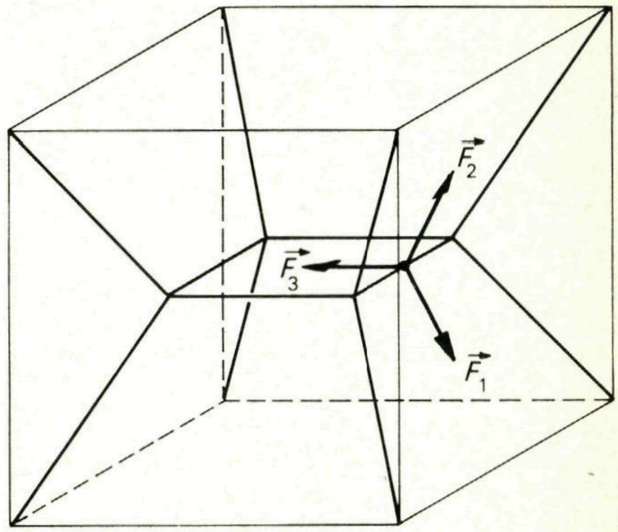
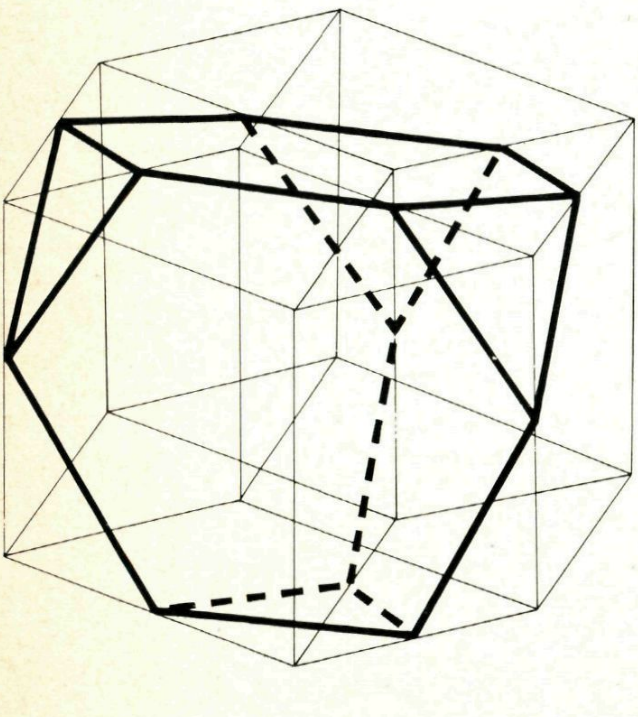
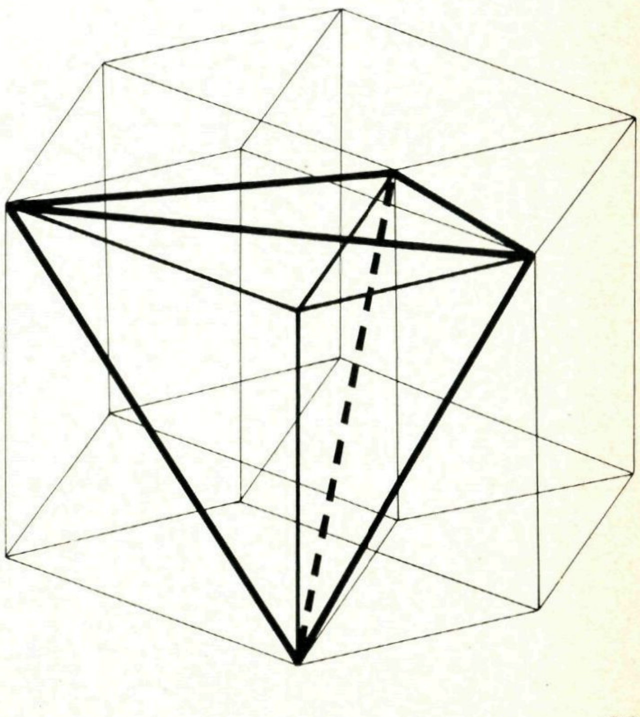


Fig. 6. Zeepvlies binnen een kubus.





zen gelijk worden. In fig. 5 staan 3 gelijke krachtsvectoren telkens onder 120° die zodoende evenwicht met elkaar maken. Je kunt ook zeggen: hun somvector is nul.

Ons 'kortste verbindingsprobleem' zou hier wel eens de oplossing kunnen hebben, en wel in de middendoorsnede van de kubus door het punt N.

We rekenen de zaak eens even na.

In fig. 7 staat die situatie, waarbij hoek $MAB = 60°$.

Trek de loodlijnen MP en NQ; $MP = 3$, $AM = 2 \cdot AP$, $AP = \sqrt{3}$ en $AM = 2\sqrt{3}$. Controleer een en ander met de stelling van Pythagoras.

$MN = AB - 2 \cdot AP = 6 - 2\sqrt{3}$.

De totale weglengte wordt nu:

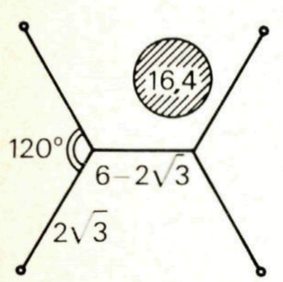


Fig. 5. Gemengde oplossing.

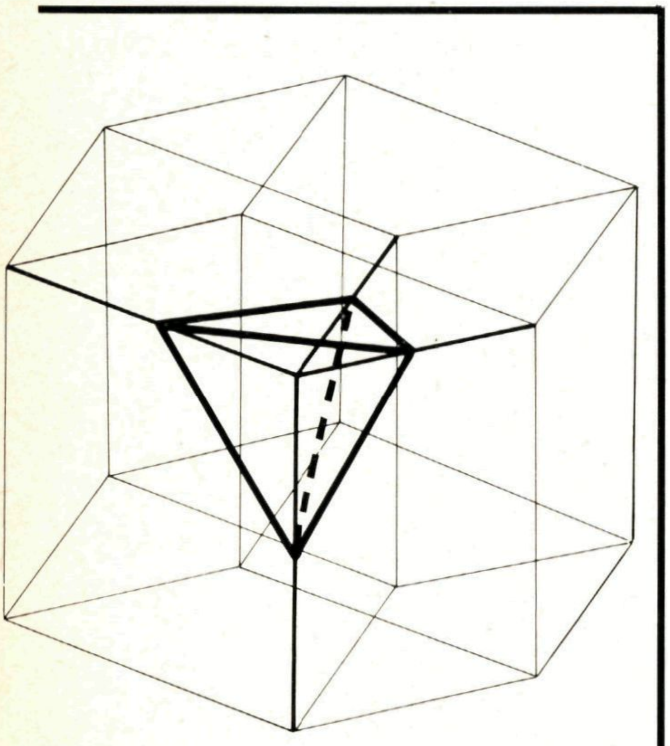
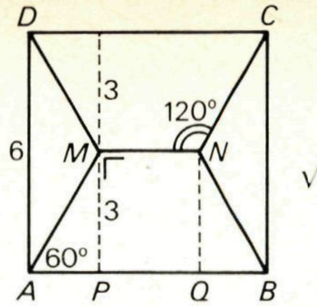


Fig. 6 g.



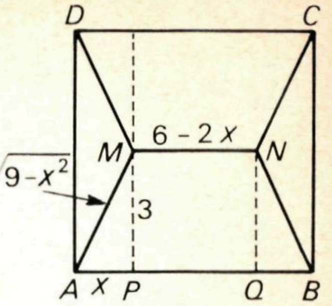


Fig. 7. Kortste verbinding.
Fig. 8. De verbinding bij een zekere waarde van x.

$MN + 4 \cdot AM = (6 - 2\sqrt{3}) + 4(2\sqrt{3}) = 6 - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3} = 16{,}4$ en dat is alweer minder dan in de vorige situatie. Maar zou dit nu werkelijk ook de kortst mogelijke zijn?

Op natuurkundige gronden zou je allang ja moeten zeggen, maar de wiskundige is nooit tevreden met wat zijn zintuigen hem zeggen. Hij wil het op zuiver theoretische grond bewezen zien. Eigenlijk is hij zelfs een beetje kwaad dat zijn ogen eerder iets hebben ontdekt dan zijn verstand. Laten we proberen een wiskundig bewijs te vinden.

Als het lijnstuk MN eens korter of langer gekozen werd.

Laten we eens iets variabel kiezen.

We stellen $AP = x$. Merk op dat fig. 6 overgaat in fig. 3 als we $x = 0$ stellen en in fig. 1d als we $x = 3$ stellen.

Hiermee is tegelijkertijd het domein van de functie aangegeven $0 \leqslant x \leqslant 3$.

In fig. 8 kun je nu aflezen dat $AM = \sqrt{(9 + x^2)}$ en $MN = 6 - 2x$.

De totale weglengte wordt zodoende:

$$f(x) = 6 - 2x + 4\sqrt{(9 + x^2)} =$$

$$= 6 - 2x + 4(9 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

De afgeleide functie wordt dan:

$$f'(x) = -2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (9 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x =$$

$$= -2 + 4x(9 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$f(x)$ bereikt een extreme waarde als $f'(x) = 0$ dus als

$$-2 + 4x(9 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$2x(9 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

kwadrateren geeft:

$$4x^2(9+x^2)^{-1} = 1 \text{ of } \frac{4x^2}{9+x^2} = 1$$

dus

$$4x^2 = 9 + x^2$$
$$3x^2 = 9 \text{ dus } x^2 = 3 \text{ en } x = \sqrt{3}$$

Dit is nu juist de uitkomst die we in fig. 7 hadden ($AP = \sqrt{3}$).
Als je wilt zou je hetzelfde probleem ook ruimtelijk kunnen stellen. De vraag luidt dan: hoe verbindt je de 8 hoekpunten van een kubus met vlakken zo dat hun gezamenlijke oppervlakte zo klein mogelijk wordt.
De oplossing volgt natuurlijk uit de zeepvliesproef.
Als je nog eens fig. 4 met fig. 5 vergelijkt lijkt in dit geval de gebroken lijn eens een keertje korter dan de rechte lijn!

°Paradoxale oppervlakten: 63 = 64 = 65!?

Je kunt iemand, ook al is die niet bepaald een wiskundige, aangenaam bezighouden door te goochelen met vierkantjes. Als enig bijzonder hulpmiddel heb je een schaar nodig. Oefen eerst zelf en verricht de volgende handelingen:

1. Teken een niet te grote rechthoek op ruitjespapier, 13 lang en 11 breed. Ruitjes (vierkantjes) met zijde $\frac{1}{2}$ cm zijn al voldoende.
2. Teken fig. 1. Stel jezelf (of aan anderen) de vragen:
   a. Hoe groot is de oppervlakte van de eerste rechthoek? (die is dus $11 \times 13 = 143$).
   b. Hoe groot is de oppervlakte van de gearceerde rechthoekjes? (totaal 80).
   c. Hoe groot is de niet-gearceerde oppervlakte? (63).
3. Knip de gearceerde oppervlakte-delen los en leg die opzij.
4. Knip de vier overige vlakdelen los. Dat zijn dus 2 rechthoekige driehoeken en 2 trapeziums.
5. Rangschik die vier stukken zo, dat een vierkant ontstaat. Het wonder is gebeurd, de oppervlakte is $8 \times 8 = 64$.
6. Hergroepeer de 4 stukken tot een rechthoek met zijde 5. (Dat puzzelen alleen al kan voor hilariteit zorgen.) De oppervlakte is nu $13 \times 5 = 65$. Ongelooflijk, nog een vierkantje uit het niets gewonnen.

Je begrijpt, dat ergens de schoen wringt. Maar waar? Bewijs de fout met behulp van (x, y)-coördinaten. De oplossing is elders in dit blad te vinden.

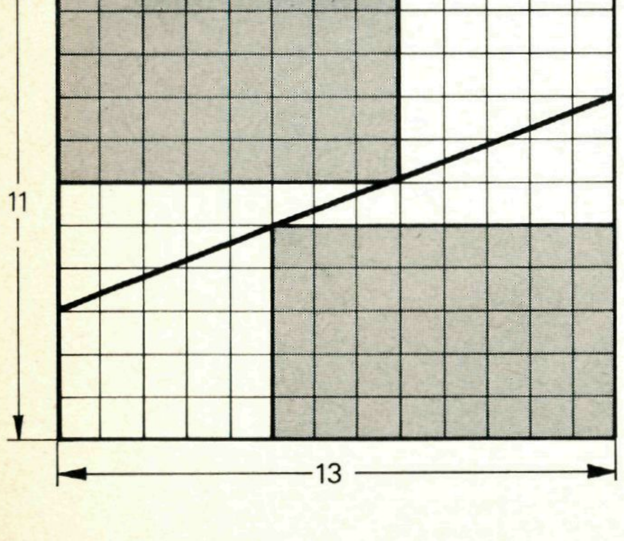


Fig. 1.

Oplossingen van de denkertjes uit Pythagoras 3

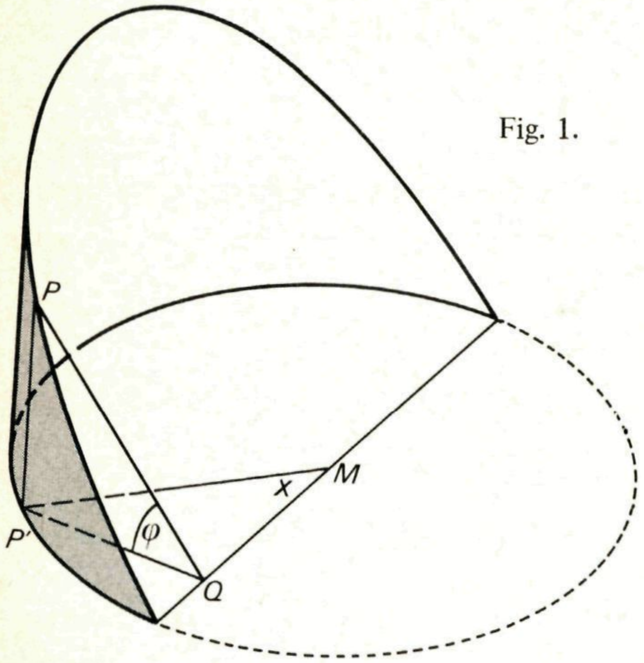


Fig. 1.

1. Hier is $PP' = P'Q \text{ tg } \varphi$. En $P'Q = \sin x$. Dus $PP' = \text{tg } \varphi \sin x$. Hierin is $\text{tg } \varphi$ constant, zodat ook hier P een punt van een sinusoïde is.
2. Voor $n = 0$, wegens $r^0 = \sin 0 \Rightarrow 1 = 0$.
3. Voor $n = 1 \Rightarrow r = \sin \varphi$, een cirkel met straal $\frac{1}{2}$. Zie fig. 2.
   Voor $n = -1 \Rightarrow r = -\dfrac{1}{\sin \varphi}$, een rechte lijn l. Fig. 2.
4. Voor $n = -\frac{1}{2} \Rightarrow r = \dfrac{2}{1 - \cos \varphi}$, een parabool. Fig. 3.
   Voor $n = -2 \Rightarrow r^2 = -\dfrac{1}{\sin 2\varphi}$, een gelijkzijdige hyperbool.
   (Bij overgang op (x, y)-coördinaten $xy = -\frac{1}{2}$) Fig. 4.
5. Voor $n = 2 \Rightarrow r^2 = \sin 2\varphi$, een lemniscaat. Zie fig. 5.

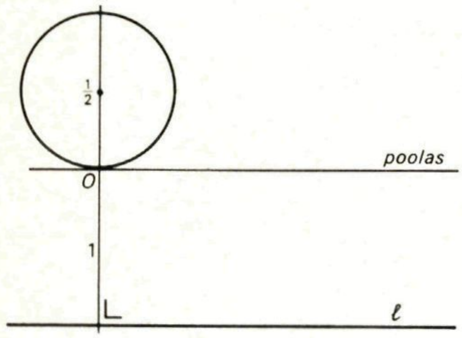


Fig. 2.

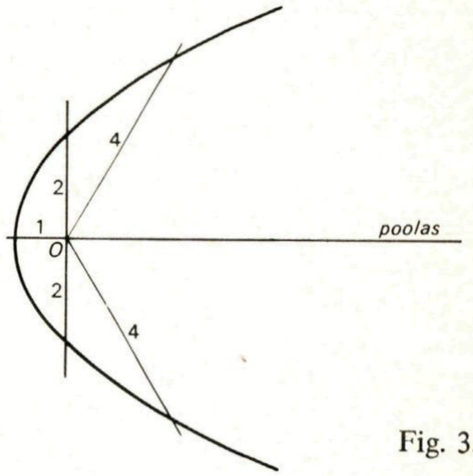


Fig. 3.

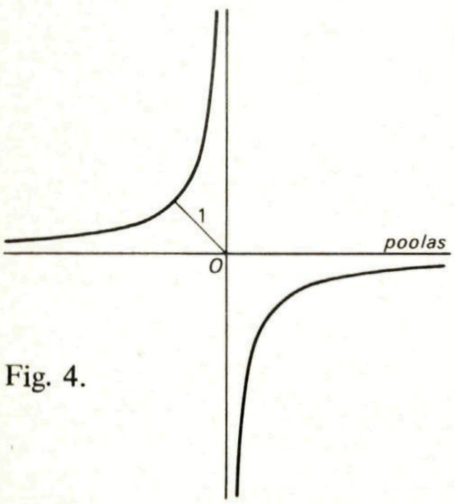


Fig. 4.

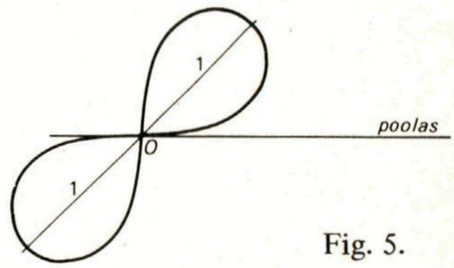


Fig. 5.

Op de binnenzijde van de omslag stond een navelsinaasappel in bikini!

Oplossing bij Paradoxale oppervlakten

Neem een hoekpunt van de grote rechthoek als oorsprong en de X-as en de Y-as langs twee rechthoekszijden. Zie fig. 2.

$A = (0,3)$ en $B = (13,8)$
AB is $V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 5x - 13y + 39 = 0\}$

Vrijwel iedereen, die de oplossing niet kent, accepteert, dat AB precies door de twee hoekpunten C en D van de gearceerde rechthoeken gaat.

Echter:

$5x - 13y + 39 = 0$
$C = (8,6)$

$\Rightarrow$ $40 - 78 + 39 = 0$
$1 = 0$ een onware bewering

De fout is al gemaakt in nummer 2 van de opdrachten.

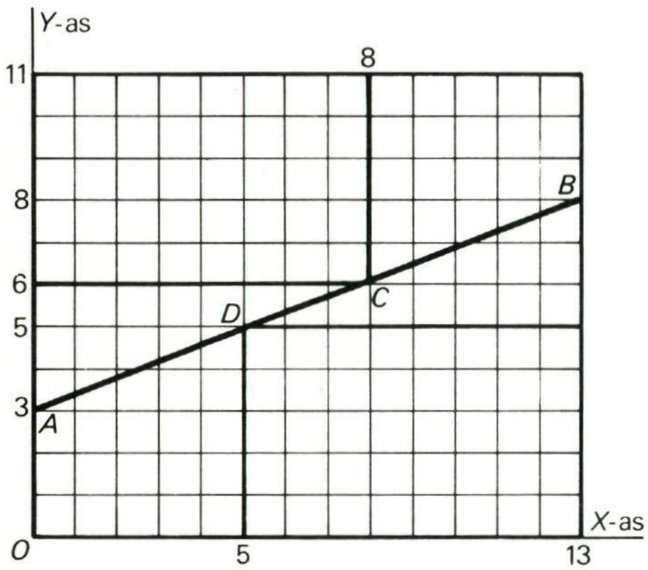


Fig. 1.

Inhoud

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Mûurhuysen 11, Amersfoort.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden. De oplossingen van denkertjes en prijsvragen naar: A. F. van Tooren, Calabrië 33, Leusden-C.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, *f* 5,– per jaargang.
Voor anderen *f* 7,50.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.