МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

КОНФЕРЕНЦИЯ
молодых ученых

Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (9–21 апреля 2006 г.)

Москва 2006 год

УДК 51 + 53

ББК 22.1 + 22.2

Конференция молодых ученых.

Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ
(9–21 апреля 2006 г.)

В настоящем сборнике представлены статьи по актуальным проблемам математики и механики, подготовленные участниками XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (19–22 апреля 2006 г.), проведённой совместно с XIII Международной научной конференцией студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ».

Традиционная конференция, проводившаяся на мехмате МГУ деканатом, Советом молодых ученых и Студенческим советом факультета, собрала около сотни студентов, аспирантов, молодых преподавателей и научных сотрудников из различных университетов и научных центров России, а также Беларуси, Украины и Казахстана. Статьи публикуются в том виде, как они были представлены в оргкомитет авторами.

Proceedings of the XXVIII Conference of Young Scientists, Departament of Mechanics and Mathematics, Moscow State University
(April 9–21, 2006)

Оглавление

Доказательство. Пусть $a \in A$, $c \in \partial V_{h_2 d_{AB}}(A)$ Пусть $[c,a]$ пересекает $\partial V_{h_2 d_{AB}}(A)$ в точке $a_\lambda = \lambda c + (1-\lambda)a$ и $\rho(c,A) = d$, а $\rho(c,a) = (1+\varepsilon)d$. Оценим расстояние $\rho(c,a_\lambda)$. Расстояние $\rho(a_\lambda, A) = h_1 d_{AB} = f$. Тогда из равенства $a_\lambda = \lambda c + (1-\lambda)a$ по Лемме 3 следует, что $\rho(a_\lambda, A) \leqslant \lambda\rho(a,A) + (1-\lambda)\rho(c,A) = (1-\lambda)d$. Откуда $\lambda \leqslant \frac{d-f}{d}$, $1-\lambda \geqslant \frac{f}{d}$. Рассмотрим расстояние $\rho(a,a_\lambda) = (1-\lambda)\rho(c,a) \geqslant \frac{f}{d}(1+\varepsilon)d = f(1+\varepsilon)$. Тогда $\rho(c,a_\lambda) = \rho(c,a) - \rho(a,a_\lambda) \leqslant d(1+\varepsilon) - f(1+\varepsilon) = (d-f)(1+\varepsilon)$. Поэтому $\frac{\rho(c,a_\lambda)}{\rho(c,a)} < \frac{d-f}{d}$. Так как $d \leqslant d_{BA}$, тогда $\frac{f}{d} \geqslant \frac{f}{d_{BA}}$ следовательно $1-\frac{f}{d} \leqslant 1-\frac{f}{d_{BA}}$, то есть $\frac{\rho(c,a_\lambda)}{\rho(b,a)} \leqslant \frac{d-f}{d} \leqslant \frac{d_{BA}-f}{d_{BA}}$. Из равенства $a_\lambda = \lambda c + (1-\lambda)a$ используя Лемму 3 следует, что $\rho(a,c) \leqslant \lambda\rho(c,C_{h_2}) + (1-\lambda)\rho(a,C_{h_2}) = (1-\lambda)\rho(a,C_{h_2}) \leqslant f = hd_{AB}$. Поэтому точка a_λ принадлежит C_{h_2}. Получили, что пересечение отрезка $[c,a]$ и множества $\partial V_{h_1 d_{AB}}(A)$ содержится в $V_{(1-h_1)d_{BA}}(B)$. Поэтому $d(c,C_{h_1}) = d(c,V_{h_1}d_{AB}(A))$, а значит $d(B,C_{h_1}) = d(C_{h_2},V_{h1}d_{AB}(A))$. Поэтому $dist_\alpha(C_{h1},C_{h2}) = (h_2-h_1)dist_\alpha(A,B)$. $\square$.

[1] Асеев В. В., Тетенов А. В., Максимова А. П. «Обобщенная метрика Помпею в проблеме изометрии гиперпространств.»// Мат. Заметки, т. 78, № 2, 2005, стр. 163–170

[2] R. Duda "On convex metric spaces III"// Fund. Math., 51(1962) pp. 23–33.

УДК 519.217

Асимптотические свойства синхронизованного набора частиц на прямой

Л. А. Петров

Московский государственный университет

1. Описание модели. На прямой находится $n \geqslant 2$ частиц с заданным начальным распределением (n фиксировано). В каждый момент времени $t = 0, 1, \ldots$ самая левая из частиц мгновенно перемещается на случайное расстояние $\xi(t)$ вправо (и после этого скачка на $\xi(t)$ наступает момент $t+1$). Считаем скачки $(\xi(0), \xi(1), \ldots)$ неотрицательными независимыми одинаково распределенными случайными величинами, не зависящими от начального расположения частиц. Исследуются свойства этой системы частиц при $t \to \infty$.

Данная постановка задачи возникла при анализе модели синхронизации времени, описанной в [3].

2. Основные результаты. Пусть частицы пронумерованы, обозначим их координаты $X_1(t), \ldots, X_n(t)$. Упорядочим эти числа, получим порядковые статистики $X_{(1)}(t) \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}(t)$. Положим $Y_j = X_{(j)} - X_{(1)}$, $\overrightarrow{Y} = (Y_2, \ldots, Y_n)$. Тогда случайные векторы $\{\overrightarrow{Y}(t)\}_{t=0,1,\ldots}$ образуют марковскую цепь, согласованную с естественной фильтрацией последовательности $(\overrightarrow{Y}(0), \xi(0), \xi(1), \ldots)$.

Пусть величина ξ распределена так же, как $\xi(0)$. Если $\mathsf{E}\xi < \infty$, то существует предельная скорость движения для каждой из частиц, равная $(\mathsf{E}\xi)/n$ то есть для $k = 1, \ldots, n$ $X_k(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} (\mathsf{E}\xi)/n$ при $t \to \infty$.

Также отдельно рассмотрены частные случаи, когда $n = 2$ или 3 и распределение ξ показательное. В этих предположениях доказано существование стационарного распределения цепи $\{\overrightarrow{Y}(t)\}_{t=0,1,\ldots}$, найдено это распределение, и при $n = 2$ сделана оценка скорости сходимости к нему. Выдвинута гипотеза о виде стационарного распределения в экспоненциальном случае при $n = 4, 5, \ldots$.

3. Марковское свойство. Для доказательства марковости векторов $\{\overrightarrow{Y}(t)\}_{t=0,1,\ldots}$ выведем закон изменения $\overrightarrow{Y}(t)$ при переходе от момента времени t в момент $t+1$.

Положим $S_{(k)} = \sum_{i=k}^{n} X_{(i)}$ и найдем $\Delta S_{(k)}(t) = S_{(k)}(t+1) - S_{(k)}(t)$. Рассмотрим два случая. Если $\xi(t) \leqslant Y_k(t) = X_{(k)}(t) - X_{(1)}(t)$, то левая частица не допрыгивает до k-й по порядку, и значение $S_{(k)}$ не изменяется. Если же $\xi(t) > Y_k(t)$, то частицы меняют свой порядок, и значение $S_{(k)}$ увеличивается ровно настолько, насколько левая частица перепрыгнула k-ю, то есть на $\xi(t) - Y_k(t)$. Окончательно имеем

$$\Delta S_{(k)}(t) = (\xi(t) - X_{(k)}(t)) I_{\{\xi(t) > Y_k(t)\}} = (\xi(t) - Y_k(t))^+, \tag{1}$$

где $\eta^+ = \max\{\eta, 0\}$. Далее, так как $X_{(k)} = S_{(k)} - S_{(k+1)}$ (полагаем для удобства $S_{(n+1)} \equiv 0$), то $\Delta X_{(k)}(t) = (\xi(t) - Y_k(t))^+ - (\xi(t) - Y_{k+1}(t))^+$ для $k < n$, и $\Delta Y_n(t) = (\xi(t) - Y_n(t))^+$. Тогда легко видеть, что $\Delta X_{(1)}(t) = \xi(t) - (\xi(t) - Y_2(t))^+ = \min\{\xi(t), Y_2(t)\}$.
Отсюда получаем формулы изменения компонент вектора $\overrightarrow{Y}(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta Y_k(t) &= (\xi(t) - Y_k(t))^+ - (\xi(t) - Y_{k+1}(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 2, \ldots, n-1; \\ \Delta Y_n(t) &= (\xi(t) - Y_n(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Из этих формул сразу следует

Утверждение 1 (марковское свойство). *Последовательность векторов $\{\overrightarrow{Y}(t)\}_{t=0,1,\ldots}$ образуют марковскую цепь с дискретным временем и пространством состояний R_+^{n-1}, согласованную с естественной фильтрацией случайной последовательности $(\overrightarrow{Y}(0), \xi(0), \xi(1), \ldots)$.*

4. Центр масс и диаметр системы. Опишем движение центра масс $X_c = (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Обозначим $S(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$. Тогда понятно, что $S(t+1) - S(t) = \xi(t)$. Запишем

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{1}{t}(S(t) - S(t-1) + \ldots + S(0)) = \frac{1}{t}\sum_{i=0}^{t-1}\xi(t) + \frac{S(0)}{t}. \tag{3}$$

Так как $\mathsf{E}\xi < \infty$ и $S(0)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $t \to \infty$ (потому что распределение $S(0)$ задано и не зависит от t), то по ЗБЧ $S(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\xi$, $t \to \infty$. Значит, для центра масс существует предельная скорость, то есть $X_c(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\xi/n$, $t \to \infty$.

Рассмотрим движение диаметра системы $Y_n \equiv D = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Утверждение 2. *Если $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$, то существует предельная скорость для каждой из частиц, равная $E\xi/n$.*

Доказательство. Фиксируем k от 1 до n. Если $D(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, то для любого $j \neq k$ выполнено $(X_k(t) - X_j(t))/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $t \to \infty$. Теперь сложим эти $n-1$ соотношений с $(X_1(t) + \ldots + X_n(t))/t \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\xi$, и получим $X_k(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\xi/n$, $t \to \infty$, что и требовалось.

5. Оценка с помощью максимумов. Докажем, что из существования $\mathsf{E}\xi < \infty$ следует сходимость $D(t)$ к нулю. Введем максимумы $M(t) = \max\{\xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(t-1)\}$.

Лемма. *Для $t = 0, 1, \ldots$ выполнено $D(t) \leqslant \max\{D(0), M(t)\}$. Если $M(t)/t \xrightarrow{P} 0$, то $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$, $t \to \infty$.*

Доказательство. Запишем формулы преобразования (2):

$$D(t+1) = D(t) + (\xi(t) - D(t))^{+} - \xi(t) \wedge Y_2(t).$$

Понятно, что всегда $Y_2(t) \leqslant D(t)$. Рассмотрим два случая.

1) Если $\xi(t) \leqslant D(t)$, то $D(t+1) = D(t) - \xi(t) \wedge Y_2(t) \leqslant D(t)$.

2) Если $\xi(t) > D(t)$, то $D(t+1) = \xi(t) - Y_2(t) \leqslant \xi(t)$.

Таким образом, $D(t+1) \leqslant \max\{D(t), \xi(t)\}$, и первое утверждение леммы следует отсюда по индукции. Так как $D(0)$ — заданное распределение, не зависящее от t, то $D(0)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $t \to \infty$. Значит, для стремления $D(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ достаточно, чтобы $M(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ $t \to \infty$.

6. Существование предельной скорости. Докажем импликацию $\mathsf{E}\xi < \infty \Rightarrow M(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $t \to \infty$. Понятно, что

$$M(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ t \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathsf{P}(M(t) \leqslant \varepsilon t) \to 1,\ t \to \infty. \tag{4}$$

Пусть $F(x)$ — функция распределения величины ξ, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Нам понадобится теорема:

Теорема 1 [1, стр. 23]. *Пусть $0 \leqslant \tau \leqslant \infty$. Для последовательности $\{u_t\}$ выполнение $\mathsf{P}(M(t) \leqslant u_t) \to e^{-\tau}$ равносильно $t\overline{F}(t) \to \tau$, $t \to \infty$.*

Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$, возьмем $u_t = \varepsilon t$ и докажем $t\overline{F}(\varepsilon t) \to 0$, $t \to \infty$. Для этого достаточно показать, что $x\overline{F}(x) \to 0$, $x \to \infty$, потому что тогда для $\forall \varepsilon > 0$ $\varepsilon t\overline{F}(\varepsilon t) \to 0$, $t \to \infty$. Воспользуемся утверждением:

Утверждение 3 [2, стр. 266]. *Пусть $\xi \geqslant 0$, $\mathsf{E}\xi < \infty$. Тогда*

$$\mathsf{E}\xi = \int_0^\infty \mathsf{P}(\xi > x)dx = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx. \tag{5}$$

Возьмем $x > 0$. Запишем: $\int_0^x \overline{F}(y)dy = x\overline{F}(x) + \int_0^x y dF(y)$ (проинтегрировали по частям). При $x \to \infty$ оба интеграла стремятся к $\mathsf{E}\xi$, поэтому $x\overline{F}(x) \to 0$.

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть $\mathsf{E}\xi < \infty$. Тогда существует предельная скорость частиц $X_1, \ldots, X_n$, равная $\mathsf{E}\xi/n$, то есть $X_k(t)/t \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\xi/n$, $t \to \infty$.*

7. Частные случаи. Пусть $n = 2$ и величина скачка ξ распределена показательно с параметром λ, $\mathsf{E}\xi = 1/\lambda$. Ясно, что

$$\Delta(X_1(t) - X_2(t)) = \xi(t) I_{\{X_1(t) < X_2(t)\}} - \xi(t) I_{\{X_1(t) \geqslant X_2(t)\}},$$

где $\Delta(X_1(t) - X_2(t)) = (X_1(t+1) - X_2(t+1)) - (X_1(t) - X_2(t))$. Тогда $\mathsf{E}[\Delta(X_1(t) - X_2(t)) \,|\, X_1(t) - X_2(t) = z] = (I_{z<0} - I_{z\geqslant 0})\mathsf{E}\xi$. Значит, «в среднем» величина $(X_1(t) - X_2(t))$ «стремится» вернуться в 0, и по критерию Фостера [4] марковская цепь $\{X_1(t) - X_2(t)\}$ эргодична, то есть существует предельное распределение Z, такое что $X_1(t) - X_2(t) \xrightarrow{d} Z$, $t \to \infty$. Можно показать, что распределение Z двустороннее экспоненциальное с плотностью $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $x \in R$.

Значит, $D(t) = X_{(2)}(t) - X_{(1)}(t) = |X_1(t) - X_2(t)| \xrightarrow{d} |Z|$, и $|Z| \stackrel{d}{=} \xi$, то есть стационарное распределение диаметра системы — показательное с тем же параметром λ.

Пусть начальное расстояние между частицами постоянно и равно $D(0)$. Оказывается, что распределение величины $|X_1(t) - X_2(t)|$ уже становится показательным, если левая частица хоть один раз перепрыгнет правую. На этом строится оценка скорости сходимости $D(t) \xrightarrow{d} |Z|$, $t \to \infty$. Эта оценка такова: для $\forall s \geqslant 0$

$$\left| \mathsf{P}\left(D(t) > s\right) - e^{-\lambda s} \right| \leqslant 2 \cdot \frac{\lambda^t (D(0))^t}{t!}.$$

Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. — 400 стр.

Компьютерная верстка:
К. В. Просветов

Оригинал-макет подготовлен
при помощи программы MiKTEX
и шрифтов пакета PSCyr

Подписано в печать 10.06.2006

Формат $60 \times 90\,1/16$ Объем 25 п. л.
Заказ № Тираж 50 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ,
г. Москва, Воробьевы горы.

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ.