

Асимптотическая теория представлений. Записки лекций

Григорий Ольшанский. Запись Леонида Петрова*

Версия от 13.12.09

Содержание

1	Лорановские многочлены Шура и характеры группы $U(N)$	1
2	Экстремальные характеры группы $U(\infty)$	13
3	Сдвинуто-симметрические функции Шура	25
4	Сдвинуто-симметрические функции Шура (продолжение)	37
5	Последовательности Вершика-Керова	49
6	Тотальная положительность	62
7	Тотальная положительность и теория представлений	75
8	Граф Гельфанда-Цетлина	87
9	Факторы фон Неймана	99
10	Представление Вейля и спинорное представление	108
11	Фактор-представления и сферические представления	119
12	Случайные матрицы и точечные процессы	132
13	Точечные процессы. Продолжение	143

1 Лорановские многочлены Шура и характеры группы $U(N)$

1.1 Алгебра многочленов Лорана

Пусть u_1, \dots, u_N (где $N = 1, 2, 3, \dots$) — переменные. Алгебра многочленов Лорана от переменных u_1, \dots, u_N — это $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$. Здесь и далее в этой лекции под многочленами будем понимать именно многочлены Лорана. Базис в $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ составляют элементы вида $u_1^{m_1} \dots u_N^{m_N}$, где $m_i \in \mathbb{Z}$.

*lenia.petrov@gmail.com

Определение 1.1. Алгебра A называется *градуированной* (или, точнее, \mathbb{Z} -градуированной), если

$$A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} A_m, \quad (1.1)$$

и при этом для всех m, n выполнено

$$A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}. \quad (1.2)$$

Говорим, что все элементы подпространства $A_m \subset A$ имеют степень m . Таким образом, (1.2) означает, что если $\deg a = m$ и $\deg b = n$ для $a, b \in A$, то $\deg(ab) = m + n$.

Алгебра $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ является градуированной, если определить градуировку в ней следующим образом:

$$\deg(u_1^{m_1} \dots u_N^{m_N}) = \sum_{i=1}^N m_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

Пусть \mathfrak{S}_N — симметрическая группа на $\{1, \dots, N\}$. Эта группа порождена транспозициями (i, j) , $i, j = 1, \dots, N$. Группа \mathfrak{S}_N действует на $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ перестановками переменных. Отметим, что перестановки переменных являются автоморфизмами алгебры $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$.

Определение 1.2. Многочлены в $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$, инвариантные относительно действия \mathfrak{S}_N , образуют подалгебру в $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$:

$$\text{LSym}(N) := \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_N}. \quad (1.4)$$

Она называется *алгеброй симметрических многочленов Лорана*. Это также градуированная алгебра.

Каждый многочлен $f \in \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ можно записать как

$$f(u) = \sum_{\mu} a_{\mu} u^{\mu}, \quad (1.5)$$

где сумма ведется по всем мультииндексам $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$, $u^{\mu} := u_1^{\mu_1} \dots u_N^{\mu_N}$. Если при этом $f \in \text{LSym}(N)$, то

$$a_{\mu} = a_{\sigma \cdot \mu} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N \quad (1.6)$$

(здесь $\sigma \cdot \mu$ — действие элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ на мультииндекс μ , заключающееся в перестановке компонент). Таким образом, каждый коэффициент a_{μ} постоянен на орбите $\mathfrak{S}_N \cdot \mu$. Выберем из этой орбиты удобного представителя.

Определение 1.3. *Сигнатурой* называется последовательность $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, $\mu_i \in \mathbb{Z}$, такая что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N$.¹ Число N называется *длиной сигнатуры*. Также определим $|\mu| := \sum_{i=1}^N \mu_i$. Отметим, что, несмотря на обозначение $|\cdot|$, эта величина может быть нулевой или отрицательной.

Используя понятие сигнатуры, определим простейший базис в алгебре симметрических многочленов Лорана $\text{LSym}(N)$. Для каждой сигнатуры μ положим

$$m_{\mu}(u) := \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_N \cdot \mu} u^{\nu}, \quad (1.7)$$

где сумма ведется по всем *различными* мультииндексам ν , которые получаются из μ некоторой перестановкой. Многочлены m_{μ} называются *симметризованными мономами*. Они составляют однородный базис в $\text{LSym}(N)$.

¹Название «сигнатура» следует книге [Жел07], хотя в других местах этот объект может называться иначе.

Определение 1.4. Многочлен Лорана $f \in \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ называется *антисимметрическим*, если

$$f(\sigma \cdot u) = \text{sgn}(\sigma) \cdot f(u), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N. \quad (1.8)$$

Здесь $\text{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ . Антисимметрические многочлены Лорана образуют подпространство $\text{Alt}(N) \subset \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$. Кроме того, $\text{Alt}(N)$ — модуль над $\text{LSym}(N)$.

Базис в $\text{Alt}(N)$ составляют *антисимметризованные мономы* (другое название — *альтернанты*), определяемые следующим образом:

$$a_\mu := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \cdot u^{\sigma \cdot \mu}, \quad (1.9)$$

где μ — сигнатура.

Легко видеть, что

$$a_\mu(u) = \det \begin{pmatrix} u_1^{\mu_1} & \dots & u_N^{\mu_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{\mu_N} & \dots & u_N^{\mu_N} \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

поэтому если в μ есть одинаковые части, то $a_\mu = 0$. То есть, антисимметризованные мономы параметризуются сигнатурами, у которых все части различны.

Через δ обозначим специальную сигнатуру (длины N):

$$\delta := (N-1, N-2, \dots, 1, 0). \quad (1.11)$$

Пусть $V_N \in \text{Alt}(N)$ — антисимметризованный моном, соответствующий сигнатуре δ . Легко видеть, что это определитель Вандермонда переменных u_1, \dots, u_N :

$$V_N(u) := a_\delta(u) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (u_i - u_j). \quad (1.12)$$

Предложение 1.5. *Всякий антисимметрический многочлен Лорана делится на V_N , и в результате получается симметрический многочлен, то есть,*

$$\text{Alt}(N) = \text{LSym}(N) \cdot V_N. \quad (1.13)$$

Доказательство. Для любого $f \in \text{Alt}(N)$ найдется $k = 0, 1, 2, \dots$, такое что $f(u) \cdot (u_1 \dots u_N)^k$ уже является обычным многочленом, а не многочленом Лорана. Таким образом, утверждение сводится к обычным многочленам (см. Упражнение 1.1). \square

1.2 Многочлены Шура

Определение 1.6. Пусть λ — сигнатура длины N , $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Определим многочлены:

$$s_\lambda = s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \frac{a_{\lambda+\delta}(u_1, \dots, u_N)}{a_\delta(u_1, \dots, u_N)} \in \text{LSym}(N). \quad (1.14)$$

Заметим, что в сигнатуре $\lambda + \delta$ уже все части разные, поэтому $a_{\lambda+\delta} \neq 0$.

Многочлены s_λ называются (лорановскими) *многочленами Шура*.²

Другой способ записать (1.14) с помощью (1.10):

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \frac{\det(u_j^{\lambda_i + N - i})_{i,j=1,\dots,N}}{\det(u_j^{N-i})_{i,j=1,\dots,N}}. \quad (1.15)$$

Свойства многочленов Шура:

²Отметим, что s_λ — многочлены Лорана, не всегда являющиеся обычными многочленами. Также для s_λ иногда используется название *рациональная функция Шура*, но мы не будем его использовать.

- s_λ — однородные многочлены, $\deg s_\lambda = |\lambda|$.
- Многочлены s_λ (где λ пробегает все сигнатуры) образуют базис в s_λ .
- Многочлены s_λ раскладываются по базису из симметризованных мономов:

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} m_\mu, \quad (1.16)$$

где $K_{\lambda\mu}$ называются *числами Костки*.³ Это неотрицательные целые числа.

Замечание 1.7. Легко видеть, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $K_{\lambda+(k,k,\dots,k), \mu+(k,k,\dots,k)} = K_{\lambda\mu}$.

Пример 1.8. Для $N = 2$ числа $K_{\lambda\mu}$ имеют вид (пусть $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2)$):⁴

$$K_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = (\lambda_1 - k, \lambda_2 + k), \text{ где } k \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.17)$$

Здесь условие $k \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$ означает лишь, что μ также должно быть сигнатурой.

1.3 Ортогональность многочленов Шура

Пусть теперь u_i — не формальные переменные, а

$$u_i \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

На окружности \mathbb{T} рассматриваем равномерную меру $l(du) = d\varphi/2\pi$, где $u = e^{i\varphi}$.

Определение 1.9. Определим для $f, g \in \text{LSym}(N)$ скалярное произведение:

$$(f, g) := \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} f(u) \overline{g(u)} |V_N(u)|^2 l(du_1) \dots l(du_N). \quad (1.19)$$

Здесь $V_N(u)$ — определитель Вандермонда (1.12).

Легко видеть, что (\cdot, \cdot) — невырожденная полуторалинейная форма.

Предложение 1.10. *Многочлены Шура s_λ образуют ортонормированный базис относительно введенного скалярного произведения (\cdot, \cdot) .*

Доказательство. По определению s_λ (определение 1.6), $s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$, $s_\mu = \frac{a_{\mu+\delta}}{a_\delta}$. Положим $\tilde{\lambda} = \lambda + \delta$, $\tilde{\mu} = \mu + \delta$. Заметим, что $|V_N(u)|^2 = a_\delta(u) \overline{a_\delta(u)}$, и поэтому

$$(s_\lambda, s_\mu) = \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} a_{\tilde{\lambda}}(u) \overline{a_{\tilde{\mu}}(u)} l(du_1) \dots l(du_N). \quad (1.20)$$

По определению антисимметризованных мономов можно записать⁵

$$a_{\tilde{\lambda}}(u) \overline{a_{\tilde{\mu}}(u)} = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \cdot u^{\alpha} \overline{u}^{\beta} = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \cdot u^{\alpha - \beta}, \quad (1.21)$$

где сумма ведется по всем $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N$, и $\alpha = \sigma \tilde{\lambda}$, $\beta = \tau \tilde{\mu}$.

³В теории представлений $K_{\lambda\mu}$ также называется *кратностью веса*.

⁴См. упражнение 1.3.

⁵Ясно, что $\overline{u} = u^{-1}$.

Интеграл $\int_{\mathbb{T}^N} u^{\alpha-\beta} l(du_1) \dots l(du_N)$ отличен от нуля, только если $\alpha = \beta$.⁶ Так как α и β — перестановки соответственно $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$, то при $\lambda \neq \mu$ заведомо получаем, что $(s_\lambda, s_\mu) = 0$.

Пусть теперь $\lambda = \mu$. Так как $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ — сигнатуры, в которых все части различны, то \mathfrak{S}_N на них действует транзитивно, а размер орбиты равен $N!$. Этот $N!$ сокращается с $\frac{1}{N!}$ из определения 1.9 скалярного произведения. \square

Замечание 1.11 (Как разлагать по многочленам Шура?). Пусть $f \in \text{LSym}(N)$. Так как многочлены s_λ образуют базис в $\text{LSym}(N)$, существует единственное разложение вида

$$f = \sum_{\lambda} f_{\lambda} s_{\lambda}. \quad (1.22)$$

Существует способ эффективно вычислять коэффициенты f_{λ} , а именно,

$$f_{\lambda} = [u^{\lambda+\delta}] (f \cdot V_N), \quad (1.23)$$

где $[u^{\lambda+\delta}] (\dots)$ обозначает коэффициент при $u^{\lambda+\delta}$ в (\dots) .

Действительно, (1.23) следует из того, что

$$f = \sum_{\lambda} f_{\lambda} s_{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad f \cdot V_N = \sum_{\lambda} f_{\lambda} a_{\lambda+\delta}. \quad (1.24)$$

1.4 Характеры унитарной группы

Оказывается, многочлены Шура $s_{\lambda}(u_1, \dots, u_N)$ суть неприводимые характеры унитарной группы $U(N)$. В следующем определении приводятся некоторые понятия теории представлений.

Определение 1.12. Пусть G — группа. Представление G — это гомоморфизм $G \rightarrow GL(V)$ где V — некоторое векторное пространство. Если $G \rightarrow GL(V_1)$ и $G \rightarrow GL(V_2)$ — два представления, то можно очевидным образом определить прямую сумму представлений $V_1 \oplus V_2$. Представление V называется неразложимым, если оно не представляется в виде $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1 и V_2 — собственные подпространства в V . Любое неприводимое представление⁷ является неразложимым. У конечномерной компактной группы над \mathbb{C} (например, $U(N)$) любое конечномерное представление раскладывается в прямую сумму неприводимых.

Представления можно изучать через изучение их характеров. Характер представления V — это функция на группе G , определяемая как

$$\chi^V(g) := \text{Tr}_V(g), \quad g \in G, \quad (1.25)$$

где $\text{Tr}_V(g)$ — след оператора, в который переходит элемент g в представлении V . Свойства:

- $\chi^V(e) = \dim V$ — размерность представления;
- Характер — центральная функция на группе, то есть, функция, которая постоянна на классах сопряженности G .

Мы будем стараться говорить о характерах, а не о представлениях. Характер неприводимого представления для краткости будем называть *неприводимым характером*.

⁶Заметим, что это не комплексный интеграл, а интеграл Лебега: $\int_0^{2\pi} e^{ic\varphi} d\varphi = 0$ для всех $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

⁷То есть, то, у которого нет нетривиальных собственных подпространств.

Замечание 1.13 (Двойное понимание характеров унитарной группы). Пусть V — какое-либо конечномерное представление группы $U(N)$. С одной стороны, характер χ^V можно понимать стандартным образом, как функцию на группе $U(N)$. С другой стороны, так как функция χ^V постоянна на классах сопряженности в $U(N)$, она полностью определяется своими значениями на диагональных матрицах

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_N \end{pmatrix}, \quad u_1, \dots, u_N \in \mathbb{T}. \quad (1.26)$$

Поэтому характер χ^V также можно рассматривать как функцию $\chi^V(u_1, \dots, u_N)$, $u_i \in \mathbb{T}$. Очевидно, что $\chi^V(u_1, \dots, u_N)$ — симметрическая функция.

Нам потребуется частичное упорядочение на сигнатурах:

Определение 1.14. Пусть λ и μ , $|\lambda| = |\mu|$ — сигнатуры. Говорим, что μ меньше λ в смысле *доминантности* (обозначение $\mu \triangleleft \lambda$), если μ получается из λ последовательностью элементарных преобразований вида

$$\nu \rightarrow \nu - \varepsilon_i + \varepsilon_j, \quad i < j, \quad (1.27)$$

где $\varepsilon_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на k -м месте), причем ν и $\nu - \varepsilon_i + \varepsilon_j$ должны быть сигнатурами.⁸ Эквивалентно можно сказать, что $\mu \triangleleft \lambda$, если

$$\sum_{i=1}^j \mu_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda_i \quad \text{для всех } j = 1, \dots, N. \quad (1.28)$$

Таким образом, определен частичный порядок на каждом из множеств

$$\{\lambda - \text{сигнатура} : |\lambda| = m\}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.29)$$

Через Нааг обозначим меру Хаара на $U(N)$, то есть, левую инвариантную (или, что то же самое в случае $U(N)$, правую инвариантную) нормированную⁹ борелевскую меру на $U(N)$. Через $L^2(U(N), \text{Нааг})$ обозначается гильбертово пространство функций на $U(N)$, которые интегрируемы в квадрате по мере Хаара. Через $L^2(U(N), \text{Нааг})^{U(N)} \subset L^2(U(N), \text{Нааг})$ обозначим подпространство центральных функций.

Замечание 1.15. Мера Хаара на $U(N)$ может быть построена как форма объема. Возьмем в касательном пространстве $T_e U(N)$ поливектор порядка N (он единственный с точностью до константы) и разнесем его по всей группе $U(N)$ с помощью (например) левых сдвигов. Таким образом, мы получим форму объема на $U(N)$, которая на самом деле также будет инвариантна и относительно правых сдвигов. Нормировав ее, получим меру Хаара.

Приведем теорему о неприводимых характерах унитарной группы.

Теорема 1.16. *Неприводимые характеры группы $U(N)$ полностью характеризуются следующими двумя свойствами:*

(1) *Они параметризуются сигнатурами, и для всех сигнатур λ выполнено*

$$\chi^\lambda = t_\lambda + \sum_{\mu: |\mu|=|\lambda|, \mu \triangleleft \lambda, \mu \neq \lambda} c_{\lambda\mu} t_\mu. \quad (1.30)$$

Это тождество рассматривается как тождество для функций на \mathbb{T}^N (см. замечание 1.13). Слагаемое t_λ рассматривается как старшее (при этом λ называется старшим весом представления), а сумма $\sum c_{\lambda\mu} t_\mu$ — как младшие члены.

(2) *$\{\chi^\lambda\}$ как функции на $U(N)$ образуют ортонормированный базис в $L^2(U(N), \text{Нааг})^{U(N)}$.*

⁸Ср. это с числами Костки для $N = 2$ (пример 1.8).

⁹То есть, $\text{Нааг}(U(N)) = 1$.

Условие (2) приходит из общей теории представлений компактных групп, а условие (1) — из теории представлений групп Ли (отсюда и понятие старшего веса).

Предложение 1.17. *Многочлены Шура $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$ суть неприводимые характеры группы $U(N)$.*

В силу предложения 1.10, достаточно доказать, что *радиальная часть* меры Хаара на $U(N)$ есть мера $|V_N(u_1, \dots, u_N)|^2 l(du_1) \dots l(du_N)$ на \mathbb{T}^N (Упражнение 1.5).¹⁰

Замечание 1.18. Радиальную часть меры Хаара на $U(N)$ можно определить аналогично радиальной части меры Лебега в \mathbb{R}^2 , а именно, мы знаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r dr \cdot d\varphi. \quad (1.31)$$

Мера $r dr$ на $\mathbb{R}_{>0}$ называется радиальной частью меры Лебега. Разложение (1.31) обусловлено действием группы вращений $U(1)$ на \mathbb{R}^2 .

В случае $U(N)$, в качестве группы вращений на $U(N)$ рассматривается сама группа $U(N)$, которая действует сопряжениями. В каждой орбите этого действия представителем выбирается диагональная матрица. Таким образом мы приходим к тору \mathbb{T}^N .

Замечание 1.19. Подчеркнем важный факт, что в данном курсе лекций мы не доказываем, что многочлены Шура являются неприводимыми характерами группы $U(N)$, а лишь показываем, как можно вывести этот факт (предложение 1.17) из общей теоремы 1.16. Последнюю теорему мы приводим без доказательства.

О мере Хаара на унитарной группе $U(N)$ и характерах этой группы можно прочитать в [Вей07, Глава VII, §4–5].

1.5 Правило ветвления многочленов Шура

Определение 1.20 (Общая задача редукции). В теории представлений рассматривается следующая *задача редукции*. Рассмотрим группу G и какое-то ее неприводимое представление. Рассмотрим подгруппу $H \subset G$. Ограничим это представление на H . Как представление группы H , оно часто оказывается приводимым. Задача состоит в том, чтобы разложить это представление группы H в сумму неприводимых представлений.

Группа $U(N)$ действует в \mathbb{C}^N . Подгруппа в $U(N)$, которая фиксирует последний базисный вектор — это в точности $U(N-1)$. Таким образом, есть вложение $U(N-1) \hookrightarrow U(N)$:

$$U(N-1) \ni A \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in U(N) \quad (1.32)$$

Рассмотрим задачу редукции для $U(N) \supset U(N-1)$. Ее можно переформулировать (с использованием предложения 1.17) как задачу о разложении многочлена Шура $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1}$ по базису $s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1})$ (заметим, что $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1}$ — уже элемент алгебры $\text{LSym}(N-1)$).

Для формулировки результата нам потребуется следующее определение:

Определение 1.21. Пусть λ — сигнатура длины N , μ — сигнатура длины $N-1$. Сигнатуры λ и μ *перемежаются* (обозначается $\mu \prec \lambda$), если

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N. \quad (1.33)$$

¹⁰Здесь l — равномерная мера на окружности (§1.3).

Предложение 1.22 (Правило ветвления представлений $U(N)$ и многочленов Шура).

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1} = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (1.34)$$

Доказательство. Пусть для наглядности $N = 3$ (для произвольного N доказательство аналогично). Пусть $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Из (1.15):

$$s_\lambda(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{V_3(u_1, u_2, u_3)} \begin{vmatrix} u_1^{\lambda_1+2} & u_2^{\lambda_1+2} & u_3^{\lambda_1+2} \\ u_1^{\lambda_2+1} & u_2^{\lambda_2+1} & u_3^{\lambda_2+1} \\ u_1^{\lambda_3} & u_2^{\lambda_3} & u_3^{\lambda_3} \end{vmatrix}. \quad (1.35)$$

Полагая $u_3 = 1$, запишем:

$$s_\lambda(u_1, u_2, 1) = \frac{1}{V_2(u_1, u_2) \cdot (u_1 - 1)(u_2 - 1)} \begin{vmatrix} u_1^{\lambda_1+2} & u_2^{\lambda_1+2} & 1 \\ u_1^{\lambda_2+1} & u_2^{\lambda_2+1} & 1 \\ u_1^{\lambda_3} & u_2^{\lambda_3} & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.36)$$

Вычитая в матрице из 1й строки 2ю, а затем из 2й — 3ю, получим

$$s_\lambda(u_1, u_2, 1) = \frac{1}{V_2(u_1, u_2) \cdot (u_1 - 1)(u_2 - 1)} \begin{vmatrix} u_1^{\lambda_1+2} - u_1^{\lambda_2+1} & u_2^{\lambda_1+2} - u_2^{\lambda_2+1} \\ u_1^{\lambda_2+1} - u_1^{\lambda_3} & u_2^{\lambda_2+1} - u_2^{\lambda_3} \end{vmatrix}. \quad (1.37)$$

Видно, что первый столбец делится на $u_1 - 1$, второй — на $u_2 - 1$. Знаем, что для $a > b$:

$$\frac{u^a - u^b}{u - 1} = \sum_{c: b \leq c < a} u^c. \quad (1.38)$$

С помощью этого наблюдения видно, что в результате деления на $u_1 - 1$ в первом столбце на первом месте возникнет сумма, которую удобно записать как

$$\sum_{\mu_1} u_1^{\mu_1+1}, \quad (1.39)$$

где $1 + \lambda_2 \leq \mu_1 + 1 < \lambda_1 + 2$ (то есть, $\lambda_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1$). Значение $\mu_1 + 1$ выбрано, чтобы результат было удобно сравнивать с (1.15). Рассмотрение остальных трех элементов матрицы аналогично, и предложение доказано. \square

Замечание 1.23. Одновременно предложение 1.22 является и решением задачи редукции для $U(N) \supset U(N - 1)$, то есть, его можно сформулировать исключительно на языке теории представлений.

Замечание 1.24. В книге [Жел07] правило ветвления многочленов Шура получено другим методом.

1.6 Схемы Гельфанда–Цетлина

Итак, мы показали (предложение 1.22), что

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_{N-1}, 1) = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (1.40)$$

Можно не полагать $u_N = 1$, а отделить u_N и записать результат по степеням u_N :

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_{N-1}; u_N) = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}) u_N^{|\lambda| - |\mu|}. \quad (1.41)$$

Степень $|\lambda| - |\mu|$ выбрана из соображений однородности многочленов s_λ и s_μ . Далее можно «откалывать» u_{N-1} , и так далее. Мы приходим следующему понятию:

Определение 1.25. *Схема Гельфанда–Цетлина* (или *таблица Гельфанда–Цетлина*) длины N — это последовательность сигнатур $\lambda^N \succ \lambda^{N-1} \succ \dots \succ \lambda^1$, где λ^i — сигнатура длины i . Это можно изображать в виде следующей таблицы (для наглядности $N = 3$):

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1^3 & & \lambda_2^3 & & \lambda_3^3 \\ & \lambda_1^2 & & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_1^1 & & \end{array} \quad (1.42)$$

Со схемой Гельфанда–Цетлина $T = \{\lambda^i\}$ длины N свяжем мультииндекс длины N :

$$n(T) := (|\lambda^1|, |\lambda^2| - |\lambda^1|, \dots, |\lambda^{N-1}| - |\lambda^{N-2}|, |\lambda^N| - |\lambda^{N-1}|). \quad (1.43)$$

Из предыдущих рассуждений (1.41) можно вывести следующую комбинаторную формулу для многочленов Шура:

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \sum_T u^{n(T)}, \quad (1.44)$$

где сумма ведется по всем схемам Гельфанда–Цетлина $T = \{\lambda^i\}$ длины N , таким что $\lambda^N = \lambda$.

Замечание 1.26. Из (1.44) не видно, что s_λ — симметрический многочлен. С другой стороны, из (1.44) ясно, что числа Костки (§1.2) $K_{\lambda\mu}$ действительно целые и неотрицательные.

Замечание 1.27. Множество схем Гельфанда–Цетлина T длины N , таких что $\lambda^N = \lambda$, представляет собой множество целых точек в некотором выпуклом множестве, так как все условия на компоненты сигнатур $\lambda^{N-1} \succ \dots \succ \lambda^1$ являются линейными. Всего неизвестных компонент сигнатур $\frac{N(N-1)}{2}$, так что данное выпуклое множество вложено в $\mathbb{R}^{N(N-1)/2}$.

1.7 Упражнения

Упражнение 1.1. Завершите доказательство предложения 1.5.

Упражнение 1.2. В алгебре многочленов Лорана $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ (а также в подалгебре $\text{LSym}(N)$) рассмотрим автоморфизм

$$u_i \mapsto u_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.45)$$

Докажите, что $s_\lambda(u^{-1}) = s_{\lambda^*}(u)$, где

$$\lambda^* = (-\lambda_N, -\lambda_{N-1}, \dots, -\lambda_2, -\lambda_1). \quad (1.46)$$

Упражнение 1.3. Проверьте утверждение примера 1.8.

Упражнение 1.4. Покажите, что число Костки $K_{\lambda\mu}$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\mu \triangleleft \lambda$ (см. определение 1.14).

Упражнение 1.5. * Закончите доказательство предложения 1.17.

Определение 1.28 (Носитель сигнатуры). Из того, что $s_\lambda \in \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$, следует, что

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^N} (?) \cdot u^\mu, \quad (1.47)$$

то есть, s_λ разлагается по обычным мономам с какими-то коэффициентами. Множество тех $\mu \in \mathbb{Z}^N$, для которых $[u^\mu](s_\lambda)$ (коэффициент при u^μ в s_λ) отличен от нуля,¹¹ называется *носителем сигнатуры* λ .

Попробуйте из комбинаторной формулы (1.44) для многочленов Шура получить следующее описание носителя сигнатуры λ :

Упражнение 1.6. Носитель сигнатуры λ — это в точности множество целых точек внутри (или на границе) выпуклой оболочки орбиты $\mathfrak{S}_N \cdot \lambda$.

¹¹Тогда он автоматически больше нуля, так как числа Костки $K_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{>0}$.

2 Экстремальные характеры группы $U(\infty)$

2.1 Определение бесконечномерной унитарной группы

В §1.5 были определены вложения унитарных групп $U(N) \hookrightarrow U(N+1)$, $N = 1, 2, \dots$. Разумно рассматривать все группы $U(N)$ вместе. Возникает *башня унитарных групп*

$$U(1) \subset U(2) \subset U(3) \subset \dots \quad (2.1)$$

Рассмотрим связанный с ней *индуктивный предел* групп $U(N)$:

Определение 2.1. *Бесконечномерной унитарной группой* называется $U(\infty) := \bigcup_{N=1}^{\infty} U(N)$.

Замечание 2.2. Существуют иные объекты, которые также называют бесконечномерной унитарной группой; $U(\infty)$ является в некотором смысле минимальным из них.

Элементами $U(\infty)$ являются матрицы бесконечного порядка $U = (u_{ij})_{i,j=1,2,\dots}$, которые

- унитарны: $UU^* = U^*U = 1$;
- удовлетворяют *условию финитности*, то есть, $U_{ij} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), если $i + j$ достаточно велико.

Другими словами, каждый элемент группы $U(\infty)$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & u_{1N} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots \\ u_{N1} & \dots & u_{NN} & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \quad (2.2)$$

для некоторого N , где матрица $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in U(N)$.

Мы хотели бы определить для $U(\infty)$ аналог понятия неприводимого характера, или, что то же самое, аналог многочленов Шура s_λ (§1.2) от бесконечного числа переменных.¹²

2.2 Имеет ли смысл теория представлений группы $U(\infty)$?

Здесь мы перечислим некоторые трудности, возникающие при попытке описывать представления группы $U(\infty)$.

1. Все группы $U(N)$ компактны, однако $U(\infty)$ не является ни компактной, ни даже локально компактной (упражнение 2.1). Из-за этого многие привычные понятия и конструкции теории представлений локально компактных групп оказываются неприменимы к $U(\infty)$.
2. Неприводимых унитарных представлений группы $U(\infty)$ «слишком много», в том смысле, что разумно их классифицировать не получается. Поэтому следует рассматривать какой-то подкласс унитарных представлений $U(\infty)$.
3. У группы $U(\infty)$ почти нет конечномерных представлений (упражнение 2.2).

Пусть V — бесконечномерное представление $U(\infty)$. Так как след единичного оператора в V бесконечен, то характер в классическом смысле (центральную функцию на группе) с бесконечномерным представлением группы $U(\infty)$ связать нельзя.

¹²Выше в §1.4 многочлены Шура от N переменных были идентифицированы как неприводимые характеры группы $U(N)$.

2.3 Экстремальные характеры

Было разработано два подхода к обобщению понятия характера на некомпактные группы. Их можно условно связать с именами Гельфанда и фон Неймана.

Первый подход заключается в рассмотрении характера не как обычной функции на группе, а как обобщенной функции (то есть, распределения). Это позволяет говорить о следах операторов в обобщенном смысле. Данный подход прекрасно работает для многих конечномерных некомпактных групп Ли. Однако в случае $U(\infty)$ он неприменим.

Мы обратимся ко второму подходу, который заключается в рассмотрении нормированных и экстремальных характеров. Дадим несколько определений.

Определение 2.3. Пусть V — конечномерное представление группы G . *Нормированным характером* представления V называется функция на группе G вида

$$\tilde{\chi}^V(g) := \frac{\text{Tr}_V(g)}{\text{Tr}_V(e)} = \frac{\text{Tr}_V(g)}{\dim V}, \quad g \in G. \quad (2.3)$$

Замечание 2.4. Если представление V унитарно, то $|\tilde{\chi}^V| \leq 1$ (упражнение 2.3).

Для групп $U(N)$ нормированные характеры превращаются в следующее:

Определение 2.5. Пусть λ — сигнатура длины N . *Нормированным многочленом Шура* называется

$$\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N) := \frac{s_\lambda(u_1, \dots, u_N)}{s_\lambda(1, \dots, 1)}. \quad (2.4)$$

Ясно, что \tilde{s}_λ — нормированные характеры группы $U(N)$, рассматриваемые как функции на \mathbb{T}^N (см. §1.4 и замечание 1.13).

Определение 2.6. Каждая группа $U(N)$ вложена в $U(\infty)$. Центральные функции на $U(N)$ можно рассматривать как функции на торе \mathbb{T}^N (замечание 1.13). Определим бесконечный аналог торов \mathbb{T}^N — тор $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \dots$, элементы которого содержат лишь конечное число не равных единице координат. Ясно, что каждый тор \mathbb{T}^N естественно вкладывается в $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$.

Определение 2.7. Пусть $\chi_N \in C(\mathbb{T}^N)$ (непрерывная функция на \mathbb{T}^N), $N = 1, 2, \dots$. Говорим, что при $N \rightarrow \infty$ последовательность χ_N *сходится* к функции χ на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, если χ_N равномерно сходятся на каждом конечном подторе, то есть

$$\chi_N|_{\mathbb{T}^n} \rightrightarrows \chi|_{\mathbb{T}^n}, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{для каждого фиксированного } n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Определение корректно, поскольку функции $\chi_N|_{\mathbb{T}^n}$ определены при $N \geq n$.

Определение 2.8. Функция χ на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ называется *экстремальным характером* (группы $U(\infty)$), если найдется последовательность $\{\lambda(N)\}$ сигнатур, такая, что $\lambda(N)$ имеет длину N и

$$\tilde{s}_{\lambda(N)} \rightarrow \chi, \quad N \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

в смысле определения 2.7.

Замечание 2.9. Экстремальные характеры $U(\infty)$ — это аналоги нормированных характеров конечномерных групп $U(N)$. Они позволяют для $U(\infty)$ рассматривать выражения вида « $\frac{\text{Tr}_V(g)}{\text{Tr}_V(e)}$ », хотя по отдельности и числитель, и знаменатель бесконечны.

Основная цель этой и нескольких следующих лекций — описание всех экстремальных характеров группы $U(\infty)$.

2.4 Формула размерности

Для начала обратимся к величинам $s_\lambda(1, \dots, 1)$ (здесь λ — сигнатура длины N), стоящим в знаменателе в определении 2.5 нормированных многочленов Шура. Ясно, что $s_\lambda(1, \dots, 1)$ — размерность представления группы $U(N)$, соответствующего сигнатуре λ . Мы докажем одну полезную формулу для $s_\lambda(1, \dots, 1)$.

Предложение 2.10 (Формула размерности). *Пусть λ — сигнатура длины N , тогда*

$$s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}. \quad (2.7)$$

Замечание 2.11. (1) На самом деле, это частный случай общей формулы Вейля для размерностей.

(2) Легко видеть, что $\prod_{1 \leq i < j \leq N} (j - i) = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (N - 1)!$, однако в виде (2.7) формула выглядит симметричней, и ее легче запомнить (ср. с (1.15)). Также при $\lambda = (0, 0, \dots, 0)$ из (2.7) сразу получаем $s_{(0, \dots, 0)}(1, \dots, 1) = 1$.

Доказательство. Необходимо в формуле (1.15) положить $u_1 = \dots = u_N$. Это можно сделать, так как $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$ является многочленом Лорана, непрерывным на \mathbb{T}^N (и даже на $(\mathbb{C}^*)^N$). Однако, напрямую в (1.15) это сделать нельзя из-за возникающей неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Можно было бы воспользоваться правилом Лопиталья, однако мы сделаем по-другому, и в два этапа — сначала положим

$$u_1 = q^{N-1}, \quad u_2 = q^{N-2}, \quad \dots, \quad u_N = 1 \quad (2.8)$$

(где $q \in \mathbb{R}$), а затем перейдем к пределу при $q \rightarrow 1$. До предела формулой (1.15) можно пользоваться, так как все u_i различны. Для числителя имеем:

$$\det(u_j^{\lambda_i + N - i})_{1 \leq i, j \leq N} = \det((q^{\lambda_i + N - i})^{N - j})_{1 \leq i, j \leq N} = V_N(q^{\lambda_1 + N - 1}, q^{\lambda_2 + N - 2}, \dots, q^{\lambda_N}), \quad (2.9)$$

где V_N — определитель Вандермонда (1.12). Аналогично можно записать и для знаменателя,¹³ поэтому

$$s_\lambda(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q^{\lambda_i + N - i} - q^{\lambda_j + N - j}}{q^{N-i} - q^{N-j}} = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q^{\lambda_i - i} - q^{\lambda_j - j}}{q - 1} \cdot \frac{q - 1}{q^{-i} - q^{-j}}. \quad (2.10)$$

Осталось заметить, что $\frac{q^a - q^b}{q - 1} \rightarrow (a - b)$ при $q \rightarrow 1$. \square

2.5 Два примера экстремальных характеров

В конце §2.3 была сформулирована основная цель — описание всех экстремальных характеров группы $U(\infty)$. Таким образом, надо рассмотреть всевозможные последовательности сигнатур $\lambda(N)$, для которых у нормированных многочленов Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ есть предел в смысле определения 2.7. В этом подразделе мы рассмотрим два частных случая этой общей ситуации, когда сигнатуры $\lambda(N)$ имеют специальный вид. Здесь и далее иногда будем опускать индекс N у сигнатур $\lambda(N)$.

Итак, рассмотрим два выделенных класса сигнатур (в первом случае $0 \leq L \leq N$, а во втором $L = 0, 1, \dots$):

- $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-L})$, будем обозначать это через $\lambda = (1^L 0^{N-L})$;

¹³Напомним, что знаменатель в (1.15) получается из числителя, если положить $\lambda = (0, \dots, 0)$.

- $\lambda = (L, 0, \dots, 0)$.

Замечание 2.12. Опишем, какие представления группы $U(N)$ связаны с $(1^L 0^{N-L})$ и $(L, 0, \dots, 0)$. Обозначим тавтологическое представление группы $U(N)$ в пространстве \mathbb{C}^N через V . Рассмотрим модуль $V^{\otimes L}$. Он является приводимым. В $V^{\otimes L}$ можно выделить две простейшие неприводимые компоненты — антисимметрическую и симметрическую:

- $\wedge^L V \subset V^{\otimes L}$ — соответствует $\lambda = (1^L 0^{N-L})$;
- $S^L V \subset V^{\otimes L}$ — соответствует $\lambda = (L, 0, \dots, 0)$.

Далее мы идентифицируем многочлены Шура $s_{(1^L 0^{N-L})}$ и $s_{(L, 0, \dots, 0)}$.

Определение 2.13. (1) *Элементарным симметрическим многочленом* называется

$$e_L(u_1, \dots, u_N) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_L \leq N} u_{i_1} \dots u_{i_L}. \quad (2.11)$$

Естественно считать, что $0 \leq L \leq N$, иначе $e_L(u_1, \dots, u_N) = 0$. Также e_L можно записать в виде

$$e_L(u_1, \dots, u_N) = \sum_I u^I, \quad (2.12)$$

где сумма ведется по всем подмножествам $I \subset \{1, \dots, N\}$ мощности $|I| = L$.

(2) *Полным однородным симметрическим многочленом* называется

$$h_L(u_1, \dots, u_N) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_L \leq N} u_{i_1} \dots u_{i_L}. \quad (2.13)$$

Заметим, что здесь уже может быть $L > N$. Название «полные однородные симметрические многочлены» связано с тем, что

$$h_L(u_1, \dots, u_N) = \sum u_1^{m_1} \dots u_N^{m_N}, \quad (2.14)$$

где сумма ведется по всем $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с $m_1 + \dots + m_N = L$. Таким образом, полный однородный симметрический многочлен h_L — это сумма всех различных мономов степени L . Также h_L можно записать в виде

$$h_L(u_1, \dots, u_N) = \sum_J u^J, \quad (2.15)$$

где сумма ведется по всем *мультимножествам* $J \subset \{1, \dots, N\}$ мощности $|J| = L$.¹⁴

Предложение 2.14. Для всех $N = 1, 2, \dots$, $0 \leq L \leq N$:

$$\begin{aligned} s_{(1^L 0^{N-L})}(u_1, \dots, u_N) &= e_L(u_1, \dots, u_N); \\ s_{(L, 0, \dots, 0)}(u_1, \dots, u_N) &= h_L(u_1, \dots, u_N). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Доказательство. Упражнение 2.4. □

Замечание 2.15. Существует глубокая аналогия между внешней и симметрической степенями $\wedge^L V$ и $S^L V$, и соответственно между элементарными и полными однородными симметрическими многочленами. Можно сказать, что $\wedge^L V$ соответствует частицами-фермионам, а $S^L V$ — частицам-бозонам.

Перейдем к исследованию асимптотического поведения характеров описанного специального вида. Другими словами, найдем пределы (в смысле определения 2.7) нормированных элементарных и полных однородных симметрических многочленов.

¹⁴Мультимножество — это обобщение понятия множества, допускающее включение одного и того же элемента по несколько раз, например, $\{1, 1, 3, 4, 4, 4\}$. Мощность мультимножества J — это число его элементов с учетом кратности.

2.5.1 Элементарные симметрические многочлены

Здесь мы найдем предел нормированных элементарных симметрических многочленов. Напомним (определение 2.5), что они определяются так:

$$\tilde{e}_L(u_1, \dots, u_N) = \frac{e_L(u_1, \dots, u_N)}{e_L(1, \dots, 1)}, \quad 0 \leq L \leq N. \quad (2.17)$$

Наша задача состоит в том, чтобы понять, как следует выбирать $L = L(N)$, чтобы при $N \rightarrow \infty$ существовал предел $\tilde{e}_{L(N)}$ в смысле определения 2.7, а также найти этот предел. Решение задачи дает следующее

Предложение 2.16. Пусть

$$\frac{L(N)}{N} \rightarrow \beta, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

где $0 \leq \beta \leq 1$. Тогда в смысле определения 2.7,

$$\tilde{e}_{L(N)} \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta(u_i - 1)), \quad N \rightarrow \infty, \quad (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^{\infty}. \quad (2.19)$$

Поскольку лишь конечное число координат u_i отличны от 1, произведение по i фактически конечно.

Доказательство. Можно было бы зафиксировать n , как в определении 2.7, и вычислять функцию $\tilde{e}_{L(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ непосредственно, а затем считать ее предел. Мы же используем несколько иной подход.

Элементарный симметрический многочлен e_L можно записать в виде (2.12). Подмножество $I \subset \{1, \dots, N\}$ будем рассматривать как конфигурацию точек на $\{1, \dots, N\}$ (так что никакие две точки не могут находиться в одном и том же месте). Эту конфигурацию можно кодировать бинарным вектором $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1 в зависимости от того, лежит ли точка i в I или нет. На множестве всех L -точечных конфигураций $I \subset \{1, \dots, N\}$ (всего их $\binom{N}{L}$) рассмотрим равномерную вероятностную меру.

Из (2.12) получаем, что

$$\tilde{e}_L(u_1, \dots, u_N) = \frac{\sum_I u^I}{\sum_I 1}, \quad (2.20)$$

где сумма ведется по всем L -точечным конфигурациям $I \subset \{1, \dots, N\}$. Поэтому (упражнение 2.5) для каждого фиксированного $n \leq N$ имеем

$$\tilde{e}_L(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) = \sum u_1^{\varepsilon_1} \dots u_n^{\varepsilon_n} \text{Prob} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}, \quad (2.21)$$

где сумма ведется по всем векторам $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, и $\text{Prob} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ — вероятность того, что у нашего случайного бинарного вектора ε длины N первые n координат равны $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ соответственно.

Остается сослаться на сформулированное ниже предложение 2.17. \square

Пусть $L = L(N)$, и $L(N)/N \rightarrow \beta$ при $N \rightarrow \infty$, где $0 \leq \beta \leq 1$. Для каждого фиксированного N рассмотрим множество всех $L(N)$ -точечных конфигураций в $\{1, \dots, N\}$. Пусть M_N — равномерная мера на этом множестве конфигураций. Эту меру можно рассматривать и как меру на $\{0, 1\}^N$, отождествляя конфигурацию $I \subset \{1, \dots, N\}$ с бинарным вектором $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, $\varepsilon_i = 0$ или 1. Далее, рассмотрим пространство $\{0, 1\}^{\infty}$ с продакт-топологией. На $\{0, 1\}^{\infty}$ есть мера Бернулли с параметром β , которая определяется как продакт-мера, то есть,

$$M = \bigotimes_{i=1}^{\infty} ((1 - \beta)\delta_0 + \beta\delta_1), \quad (2.22)$$

где δ_k ($k = 0, 1$) — дельта-мера Дирака. Другими словами, случайный элемент пространства $\{0, 1\}^\infty$, распределенный по мере Бернулли, представляет собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значение 1 с вероятностью β и 0 — с вероятностью $1 - \beta$.

Предложение 2.17. *При $N \rightarrow \infty$ меры M_N сходятся к мере Бернулли на $\{0, 1\}^\infty$ с параметром β на $\{0, 1\}^\infty$ в смысле сходимости конечномерных распределений.*

2.5.2 Полные однородные симметрические многочлены

Перейдем к случаю полных однородных симметрических многочленов. Напомним (определение 2.5), что они определяются так:

$$\tilde{h}_L(u_1, \dots, u_N) = \frac{h_L(u_1, \dots, u_N)}{h_L(1, \dots, 1)}. \quad (2.23)$$

Заметим, что здесь уже $L \geq 0$ может быть сколь угодно большим. Наша задача как и ранее состоит в том, чтобы описать возможный выбор $L = L(N)$, при котором существует предел $\tilde{h}_{L(N)}$ в смысле определения 2.7, а также найти этот предел.

Предложение 2.18. *Пусть*

$$\frac{L(N)}{N} \rightarrow \alpha, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2.24)$$

где $\alpha \geq 0$. Тогда в смысле определения 2.7,

$$\tilde{h}_{L(N)} \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha(u_i - 1)}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty. \quad (2.25)$$

Отметим, что в правой части (2.25) снова стоит функция на торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, поэтому фактически произведение по i конечно.

Предложение 2.18 доказывается аналогично 2.16, только надо рассматривать равномерную меру на L -точечных мультимножествах в $\{1, \dots, N\}$ (разумеется, у нее будет другой предел).

Более подробно, рассмотрим множество мультимножеств в $\{1, \dots, N\}$ мощности L . Каждое такое мультимножество можно рассматривать как L -точечную конфигурацию в $\{1, \dots, N\}$ в которой две точки могут находиться в одном и том же месте. Такие мультимножества можно кодировать векторами $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, где m_i — число точек конфигурации в i (ясно, что $m_1 + \dots + m_N = L$). Пусть M_N — равномерная мера на множестве всех таких конфигураций в $\{1, \dots, N\}$. Мы можем рассматривать M_N как меру на $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$.

Предложение 2.19. *Пусть $L = L(N)$ и $L(N)/N \rightarrow \alpha \geq 0$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ меры M_N сходятся к произдкт-мере на $\mathbb{Z}_{\geq 0}^\infty$,*

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} \nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}, \quad (2.26)$$

где $\nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ — геометрическое вероятностное распределение на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$:

$$\nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(m) := \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right) \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^m, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.27)$$

С использованием этого предложения можно установить сходимость нормированных полных однородных симметрических многочленов (предложение 2.18).

2.6 Описание экстремальных характеров $U(\infty)$

Теперь перейдем к описанию экстремальных характеров бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$. Но прежде сделаем еще одно замечание о тех двух простейших случаях, которые мы рассмотрели в §2.5.

Замечание 2.20. Напомним, что в алгебре симметрических многочленов Лорана от N переменных есть инволютивный автоморфизм (упражнение 1.2), который переводит каждое u_i в u_i^{-1} . Ясно, что эта инволюция не меняет факт сходимости (в смысле определения 2.7) нормированных функций Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$. Однако она меняет предел, действуя на торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^{\infty}$ тем же образом, переводя каждое u_i в u_i^{-1} .

Значит, из уже доказанной в §2.5 сходимости (обозначения β^+ вместо β и α^+ вместо α выбраны, чтобы показать симметричность этой ситуации с тем, что будет ниже):

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{L(N)} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta^+(u_i - 1)), & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \beta^+, & \quad 0 \leq \beta^+ \leq 1; \\ \tilde{h}_{L(N)} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha^+(u_i - 1)}, & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \alpha^+, & \quad \alpha^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

получаем, что в смысле определения 2.7 выполнено:¹⁵

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{(0^{N-L(N)}(-1)^{L(N)})} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta^-(u_i^{-1} - 1)), & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \beta^-, & \quad 0 \leq \beta^- \leq 1; \\ \tilde{s}_{(0, -L(N))} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha^-(u_i^{-1} - 1)}, & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \alpha^-, & \quad \alpha^- \geq 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Теперь можно сформулировать часть основной теоремы об экстремальных характерах группы $U(\infty)$. Мы опишем, какие функции на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^{\infty}$ могут служить экстремальными характерами группы $U(\infty)$, однако пока не будем говорить о том, какие последовательности сигнатур $\lambda(N)$ надо взять, чтобы их получить.

Теорема 2.21. *Экстремальные характеры $U(\infty)$ суть в точности функции на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^{\infty}$, зависящие от счетного числа параметров¹⁶*

$$\begin{aligned} \alpha^{\pm} &= (\alpha_1^{\pm} \geq \alpha_2^{\pm} \geq \dots \geq 0); \\ \beta^{\pm} &= (\beta_1^{\pm} \geq \beta_2^{\pm} \geq \dots \geq 0); \\ \gamma^{\pm} &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

таких что

$$\sum_i \alpha_i^+ + \sum_i \alpha_i^- + \sum_i \beta_i^+ + \sum_i \beta_i^- < \infty, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1. \quad (2.31)$$

Эти функции имеют вид

$$\chi_{\alpha^{\pm}, \beta^{\pm}, \gamma^{\pm}}(u_1, u_2, \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} \Psi_{\alpha^{\pm}, \beta^{\pm}, \gamma^{\pm}}(u_j), \quad (2.32)$$

где $\Psi_{\alpha^{\pm}, \beta^{\pm}, \gamma^{\pm}}(\cdot)$ — непрерывная функция на одномерном торе \mathbb{T}^1 :

$$\Psi_{\alpha^{\pm}, \beta^{\pm}, \gamma^{\pm}}(u) := e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)} \right). \quad (2.33)$$

¹⁵Здесь, пользуясь предложением 2.14 и упражнением 1.2, получаем, что при нашей инволюции $\text{LSym}(N)$ функции e_L и h_L переходят в $s_{(0^{N-L}(-1)^L)}$ и $s_{(0, -L)}$, соответственно.

¹⁶Более точно, от $4 \cdot \infty + 2$ параметров.

Замечание 2.22 (О формулировке теоремы). Экстремальные характеры $U(\infty)$ одновременно и проще, и сложнее, чем (обычные) характеры конечномерных групп $U(N)$. Детерминанты высокого порядка в (1.15) сложнее, чем произведения в (2.33), однако экстремальные характеры $\chi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}$ зависят от бесконечного числа переменных.

Заметим, что из двойной мультипликативности экстремальных характеров $\chi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}$ следует, что произведение двух экстремальных характеров $U(\infty)$ — снова экстремальный характер. В свою очередь, правило умножения неприводимых характеров (то есть, правило разложения произведения двух неприводимых характеров по базису из неприводимых характеров) группы $U(N)$ — правило Литтлвуда–Ричардсона — формулируется в достаточно сложных комбинаторных терминах.¹⁷

2.7 Упражнения

Упражнение 2.1. Покажите, что для $N = 1, 2, \dots$ группа $U(N)$ компактна. Покажите, что $U(\infty)$ не является компактной. Подумайте, почему $U(\infty)$ не является локально компактной.

Упражнение 2.2. Что можно сказать о конечномерных неприводимых представлениях $U(\infty)$?

Упражнение 2.3. Докажите, что модуль следа унитарной матрицы размера $m \times m$ не превосходит m .

Упражнение 2.4. Докажите предложение 2.14.

Указание. Посмотрите, что получается с $e_L(u_1, \dots, u_N)$ и $h_L(u_1, \dots, u_N)$ при подстановке $u_N = 1$ и сравните это с общим правилом ветвления многочленов Шура (§1.5).

Упражнение 2.5. Проверьте формулу (2.21).

Упражнение 2.6. Закончите доказательство предложения 2.16, сославшись на предложение 2.17.

Упражнение 2.7. Докажите предложение 2.17.

Упражнение 2.8. Проведите полностью доказательства о сходимости нормированных полных однородных симметрических многочленов (§2.5.2).

Указание к предложению 2.19. Предложение 2.19 можно доказать с помощью аналогичного предложения 2.17, используя соответствие между L -точечными мультимножествами в $\{1, \dots, N\}$ и L -точечными конфигурациями в $\{1, \dots, N + L - 1\}$. А именно, пусть $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ — L -точечное мультимножество в $\{1, \dots, N\}$ (m_i — число точек мультимножества в i), поставим ему в соответствие конфигурацию вида

$$\underbrace{1 \dots 1}_{m_1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{m_2} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{m_N}. \quad (2.34)$$

Это биекция, поэтому равномерная мера переходит в равномерную. Используя предложение 2.17, получим, что при $N \rightarrow \infty$ меры на L -точечных конфигурациях в $\{1, \dots, N + L - 1\}$ сходятся к мере Бернулли на $\{0, 1\}^\infty$ с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ (так как $\frac{L(N)}{N+L(N)-1} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1}$). Пусть теперь есть элемент $\{0, 1\}^\infty$, распределенный по мере Бернулли с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$, то есть, последовательность независимых бинарных случайных величин. Остается воспользоваться тем, что геометрическое распределение с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ можно трактовать как распределение позиции первого нуля в этой последовательности. Таким образом можно получить последовательность независимых геометрических величин с распределением $\nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ (то есть, продакт-меру $\bigoplus_{i=1}^\infty \nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$) из меры Бернулли на $\{0, 1\}^\infty$.

¹⁷Оказывается, доказать, что при $N \rightarrow \infty$ правило Литтлвуда–Ричардсона тривиализуется, можно и не используя формулу для характеров $U(\infty)$, выписанную выше в теореме 2.21.

Упражнение 2.9. Проверьте, что произведение двух экстремальных характеров $U(\infty)$ — снова экстремальный характер (см. замечание 2.22). Как связаны параметры α^\pm , β^\pm , γ^\pm исходных характеров с параметрами результата?

Упражнение 2.10. Отметим, что условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ в теореме 2.21 формально не является необходимым для того, чтобы характер $\chi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}$, определенный по формулам (2.32)–(2.33), существовал.¹⁸ Однако, это условие обеспечивает однозначность в следующем смысле. Возьмем два любых номера i и j и поставим вместо β_i^+ число $1 - \beta_j^-$, а вместо β_j^- — число $1 - \beta_i^+$. Проверьте, что от этого функция $\Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(\cdot)$ в (2.33) не изменится. Покажите, что если условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ не выполнено, то конечной последовательностью указанных преобразований его выполнения всегда можно добиться.

3 Сдвинуто-симметрические функции Шура

3.1 Идея доказательства теоремы Войкулеску

В этой лекции мы введем некоторый формализм, который будет использоваться в доказательстве формулы Войкулеску (теорема 2.21). Напомним, что нам надо найти все последовательности сигнатур $\lambda(N)$, для которых нормированные многочлены Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ сходятся при $N \rightarrow \infty$ (в смысле определения 2.7), а также описать все функции на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, которые могут выступать в роли пределов $\tilde{s}_{\lambda(N)}$.

Неизвестно, можно ли развить «элементарные» методы §2.5 для доказательства теоремы 2.21 во всей общности. Это было сделано лишь для случая сигнатур с неотрицательными компонентами \square .

Мы используем другой подход (изложенный в \square), который основан на идее Вершика и Керова \square . Напомним, что сходимость функций $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ к некоторой функции χ на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ в смысле определения 2.7 означает равномерную сходимость их ограничений на каждый конечный тор $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, то есть,

$$\tilde{s}_{\lambda(N)}|_{\mathbb{T}^n} \rightrightarrows \chi|_{\mathbb{T}^n}, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{для каждого фиксированного } n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Наш подход заключается в том, чтобы заменить эту глобальную сходимость инфинитезимальной. А именно, каждая из функций $\tilde{s}_{\lambda(N)}|_{\mathbb{T}^n}$ и $\chi|_{\mathbb{T}^n}$ является аналитической на торе \mathbb{T}^n и, следовательно, полностью определяется своей струей (набором всех производных) в любой точке, например, в $(1, \dots, 1)$. Мы будем рассматривать разложение Тейлора функций $\tilde{s}_{\lambda(N)}|_{\mathbb{T}^n}$ в точке $(1, \dots, 1)$ и анализировать асимптотику коэффициентов этих разложений. Отсюда будет следовать и сходимость нормированных многочленов Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ в смысле определения 2.7.

Замечание 3.1. Вообще говоря, глобальная и инфинитезимальная сходимость — вещи разные. Но в нашем случае эти две сходимости оказываются эквивалентными.

Итак, пусть λ — сигнатура длины N и $n \leq N$ фиксировано. Наша задача — разложить функцию $\tilde{s}_\lambda|_{\mathbb{T}^n}$, то есть, функцию $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ (здесь $(N - n)$ единиц) в ряд Тейлора в точке $(1, \dots, 1)$ на торе \mathbb{T}^n . Для этого разложения нам потребуется локальная карта на торе вокруг $(1, \dots, 1)$. Можно было бы брать стандартную карту вида $u_j = e^{\varphi_j \sqrt{-1}}$, однако нам будет удобней «карта» $u_j = 1 + x_j$, где $x_j \in \mathbb{C}$. При такой «карте» переменные u_j выйдут за пределы тора \mathbb{T}^n . Однако, функция $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ является аналитической в большей области, чем \mathbb{T}^n , а именно, в $(\mathbb{C}^*)^n$. Поэтому можно рассматривать замену переменных $u_j = 1 + x_j$ и раскладывать функцию $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ в ряд Тейлора по переменным x_1, \dots, x_n в точке $(0, \dots, 0)$. Это будет сделано в §3.3 ниже, после того как в §3.2 мы дадим необходимые определения.

¹⁸В отличие от условия $\sum \alpha_i^+ + \sum \alpha_i^- + \sum \beta_i^+ + \sum \beta_i^- < \infty$, гарантирующего сходимость произведения в (2.33).

3.2 Разбиения и многочлены Шура

Через $\text{Sign}(N)$ будем обозначать множество сигнатур длины N . Введем также множество *разбиений* Part . Разбиение числа k — это представление k в виде

$$k = \rho_1 + \rho_2 + \dots, \quad \text{где } \rho_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (3.2)$$

Слагаемые считаются неупорядоченными, но мы принудительно их упорядочиваем по (нестро-гому) убыванию, и приходим к тому, что разбиение — это невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $\rho = (\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots)$, в которой только конечное число компонент отлично от нуля. Обозначим $|\rho| := \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i$ (фактически эта сумма конечна), и если $|\rho| = k$, то говорим, что ρ — разбиение числа k . Число ненулевых компонент разбиения ρ называем *длиной разбиения* и обозначаем через $\ell(\rho)$. К разбиению ρ можно дописывать любое количество нулей, такие разбиения мы считаем равными. В этой лекции нас интересуют разбиения ρ с любым $|\rho|$, но иногда мы будем накладывать ограничения на длину разбиения (см., напр., (3.3), (3.5) ниже).

Пример 3.2. Для разбиения $\rho = (5, 5, 3, 1, 0, 0, 0)$ имеем $|\rho| = 14$ и $\ell(\rho) = 4$.

Замечание 3.3. Хотя сигнатуры с неотрицательными компонентами можно рассматривать и как разбиения, мы не будем отождествлять эти два понятия.

Определение 3.4. Через $\Lambda(N)$ будем обозначать алгебру симметрических многочленов от N переменных $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\text{Sym}}$. Отметим, что это уже многочлены в традиционном смысле, а не многочлены Лорана. Для каждого разбиения $\mu \in \text{Part}$ через $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ обозначим соответствующий многочлен Шура (определяемый в §1.2).¹⁹

Предложение 3.5. Для всех $\mu \in \text{Part}$, таких что $\ell(\mu) \leq N$, многочлен Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ лежит в $\Lambda(N)$.²⁰ Многочлены $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$, где μ пробегает все разбиения, такие что $\ell(\mu) \leq N$, образуют однородный базис в алгебре $\Lambda(N)$.

Доказательство. Упражнение 3.1. □

3.3 Биномиальная формула

Пусть $\lambda \in \text{Sign}(N)$, и зафиксируем $n \leq N$. Мы собираемся раскладывать нормированный (лорановский) многочлен Шура $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ в ряд Тейлора по переменным x_1, \dots, x_n в точке $(0, \dots, 0)$, см. §3.1. На самом деле, мы разложим многочлен $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ по x_1, \dots, x_N , а затем, если надо, положим $x_{n+1} = \dots = x_N = 0$. Так как $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ — симметрический многочлен Лорана, то и все коэффициенты Тейлора будут симметричны по x_1, \dots, x_N . В силу предложения 3.5, возможно раскладывать многочлены $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ сразу по многочленам Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$, где $\ell(\mu) \leq N$.

Определение 3.6. Пусть $c_\mu(\lambda)$ — соответствующие коэффициенты этого разложения, то есть,

$$\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} c_\mu(\lambda) s_\mu(x_1, \dots, x_N). \quad (3.3)$$

Постараемся найти коэффициенты $c_\mu(\lambda)$. Для начала будем раскладывать многочлены s_λ , а не \tilde{s}_λ , а на известную величину $s_\lambda(1, \dots, 1)$ (см. предложение 2.10) разделим потом. Сначала выпишем очевидный случай $N = 1$:

¹⁹В §1.2 определялись многочлены Шура $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$, где λ — сигнатура длины N . Для $\mu \in \text{Part}$ возможны два случая. Если $\ell(\mu) \leq N$, то $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ определяется как лорановский многочлен Шура, соответствующий сигнатуре $(\mu_1, \dots, \mu_{\ell(\mu)}, 0, \dots, 0)$ длины N . Если же $\ell(\mu) > N$, то как будет видно из предложения 3.9 ниже, естественно положить $s_\mu(x_1, \dots, x_N) = 0$.

²⁰То есть, является многочленом в традиционном смысле, а не многочленом Лорана.

Предложение 3.7. Для всех $l \in \mathbb{Z}$,

$$u^l = (1+x)^l = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \binom{l}{m} x^m. \quad (3.4)$$

Его обобщение выглядит следующим образом:

Предложение 3.8 (Биномиальная формула). Для любой сигнатуры $\lambda \in \text{Sign}(N)$ имеем

$$s_\lambda(1+x_1, \dots, 1+x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} \det \left[\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} \right] s_\mu(x_1, \dots, x_N). \quad (3.5)$$

В правой части (3.5) стоят определители $N \times N$ матриц, $i, j = 1, \dots, N$. Далее в этой лекции аналогичные определители также имеют размер $N \times N$, если явно не обозначено противное.

Доказательство. Положим $l_i := \lambda_i + N - i$, $i = 1, \dots, N$. Тогда из (1.15) получаем

$$s_\lambda(1+x_1, \dots, 1+x_N) = \frac{\det [(1+x_j)^{l_i}]}{V_N(1+x_1, \dots, 1+x_N)}, \quad (3.6)$$

где V_N — определитель Вандермонда (1.12). Ясно, что $V_N(1+x_1, \dots, 1+x_N) = V_N(x_1, \dots, x_N)$, так как значение определителя Вандермонда зависит только от разностей переменных. Рассмотрим числитель в правой части (3.6). Пользуясь (3.4), можно записать

$$\det [(1+x_j)^{l_i}] = \det \left[\sum_{m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \binom{l_i}{m_j} x_j^{m_j} \right]. \quad (3.7)$$

Здесь индексы суммирования обозначены через m_j , чтобы можно было переписать это в удобном для нас виде:

$$\det \left[\sum_{m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \binom{l_i}{m_j} x_j^{m_j} \right] = \sum_{m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N} \det \left[\binom{l_i}{m_j} \right]. \quad (3.8)$$

Можно считать, что суммирование ведется по мультииндексам (m_1, \dots, m_N) с попарно различными координатами m_i , иначе $\det \left[\binom{l_i}{m_j} \right] = 0$. Рассмотрим действие группы \mathfrak{S}_N перестановками на таких мультииндексах. Каждая орбита состоит из $N!$ мультииндексов, выбираем в ней представителя, такого что $m_1 > \dots > m_N$, а суммирование по \mathfrak{S}_N заносим внутрь.²¹ Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N} \det \left[\binom{l_i}{m_j} \right] &= \left\{ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} x_1^{m_{\sigma(1)}} \dots x_N^{m_{\sigma(N)}} \det \left[\binom{l_i}{m_{\sigma(j)}} \right] \right\} \\ &= \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} \det \left[\binom{l_i}{m_j} \right] \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn } \sigma \cdot x_1^{m_{\sigma(1)}} \dots x_N^{m_{\sigma(N)}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как $m_1 > \dots > m_N \geq 0$, то можно найти разбиение μ , для которого $m_j = \mu_j + N - j$. Тогда сумма по всем целым m_i , таким что $m_1 > \dots > m_N \geq 0$, превратится в сумму по всем $\mu \in \text{Part}$, таким что $\ell(\mu) \leq N$. В свою очередь сумма по σ дает нужный альтернант $a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_N)$, поделив который на $V_N(x_1, \dots, x_N)$, получим (3.5), см. определение 1.6. \square

Теперь из биномиальной формулы и из формулы размерности (предложение 2.10) для $s_\lambda(1, \dots, 1)$, находим коэффициенты $c_\mu(\lambda)$ в (3.3):

$$c_\mu(\lambda) = \det \left[\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} \right] \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{j-i}{\lambda_i - \lambda_j + j - i}. \quad (3.10)$$

²¹Похожие рассуждения были уже в §1.1.

3.4 Стабильность многочленов Шура

Как объясняется в §3.1, мы хотим исследовать поведение нормированных лорановских многочленов Шура $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ (здесь количество единиц равно $N - n$, $\lambda \in \text{Sign}(N)$, $n \leq N$ фиксировано, а N растет). Для $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ уже получено разложение (3.3)–(3.10) по многочленам Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$, $\mu \in \text{Part}$, $\ell(\mu) \leq N$. В этом подразделе мы поймем, что происходит с $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ при подстановке $x_{n+1} = \dots = x_N = 0$.

Предложение 3.9. Пусть $\mu \in \text{Part}$, тогда

$$s_\mu(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = \begin{cases} s_\mu(x_1, \dots, x_{N-1}), & \text{если } \ell(\mu) \leq N - 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Доказательство. Это доказывается с помощью детерминантной формулы для многочленов Шура (1.15). Действительно, запишем

$$s_\mu(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = \frac{\det[x_j^{\mu_i + N - i}]_{x_N=0}}{\prod_{i < j} (x_i - x_j)|_{x_N=0}}. \quad (3.12)$$

В числителе рассмотрим последний столбец матрицы, он имеет вид $(x_N^{\mu_1 + N - 1}, \dots, x_N^{\mu_{N-1} + 1}, x_N^{\mu_N})^t$. Видно, что если $\mu_N > 0$ (то есть, $\ell(\mu) > N - 1$), то этот столбец нулевой, и $s_\mu(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = 0$. Если же $\mu_N = 0$, то столбец имеет вид $(0, \dots, 0, 1)^t$. Остается заметить, что

$$\det[x_j^{\mu_i + N - i}]_{i,j=1, \dots, N-1} = x_1 \dots x_{N-1} \cdot \det[x_j^{\mu_i + (N-1) - i}]_{i,j=1, \dots, N-1} \quad (3.13)$$

и $V_N(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = x_1 \dots x_{N-1} \cdot V_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1})$. \square

3.5 Определение сдвинуто-симметрических многочленов Шура

В этом подразделе мы исследуем формулу (3.10) для коэффициентов $c_\mu(\lambda)$ разложения (3.3) и выявим в $c_\mu(\lambda)$ некоторую структуру. Пользуясь этим, мы определим *сдвинуто-симметрические многочлены Шура* (англ. shifted Schur polynomials).

Напомним, что для $\mu \in \text{Part}$ и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ мы определяли $l_i := \lambda_i + N - i$, $m_j := \mu_j + N - j$. При этом $l_1 > \dots > l_N$, $l_i \in \mathbb{Z}$, и $m_1 > \dots > m_N \geq 0$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. В (3.10) встречались биномиальные коэффициенты вида $\binom{l}{m}$, мы знаем, что

$$\binom{l}{m} = \frac{l(l-1)\dots(l-m+1)}{m!}. \quad (3.14)$$

Поэтому введем следующее обозначение:

Определение 3.10. *Убывающая факториальная степень* — это $l \downarrow m := l(l-1)\dots(l-m+1)$, если $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, и $l \downarrow 0 := 1$.²²

Это обозначение оказывается очень удобным, например, при этом $\binom{l}{m} = \frac{l \downarrow m}{m!}$.

Теперь можно переписать (3.10), собрав в один множитель все, что зависит от λ , а во втором оставив все остальное:

$$c_\mu(\lambda) = \frac{\det[l_i \downarrow (\mu_j + N - j)]}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (j - i)}{\prod_{j=1}^N (\mu_j + N - j)!}. \quad (3.15)$$

Первый множитель и назовем сдвинуто-симметрическим многочленом Шура:

²²Отметим, что в литературе нет единой общепринятой формы записи величин $l \downarrow m$.

Определение 3.11. Пусть $\mu \in \text{Part}$ и y_1, \dots, y_N — переменные. *Сдвинуто-симметрическим многочленом Шура* называется

$$s_\mu^*(y_1, \dots, y_N) := \frac{\det \left[y_i^{\downarrow(\mu_j + N - j)} \right]}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_i - y_j)}. \quad (3.16)$$

См. также упражнение 3.3.

Замечание 3.12. Второй множитель в (3.15) можно переписать в более удобном виде. Разбиения удобно представлять *диаграммами Юнга* [Мак84, Глава I, §1]. Например, на рис. 1 изображена диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\mu = (4, 2, 2, 1)$ (она имеет строки длины 4, 2, 2, 1). Множество всех диаграмм Юнга обозначается через \mathbb{Y} . Мы отождествляем \mathbb{Y} с Part . Разбиения отождествляются с соответствующими диаграммами Юнга. Для любой клетки $\square \in \mu$

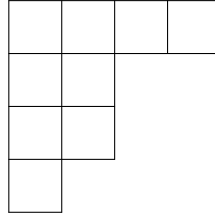


Рис. 1: Диаграмма Юнга разбиения $\mu = (4, 2, 2, 1)$.

определим ее *содержание* как

$$c(\square) := \text{номер столбца}(\square) - \text{номер строки}(\square). \quad (3.17)$$

Например, на рис. 2 в каждой клетке диаграммы $(4, 2, 2, 1)$ написано содержание этой клетки.

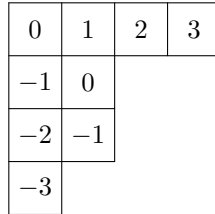


Рис. 2: Содержания клеток диаграммы Юнга.

Положим

$$(z)_\mu := \prod_{\square \in \mu} (z + c(\square)), \quad (3.18)$$

где произведение идет по всем клеткам диаграммы Юнга μ .

Оказывается (упражнение 3.4), что второй множитель в (3.15) имеет вид

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (j - i)}{\prod_{j=1}^N (\mu_j + N - j)!} = \frac{1}{(N)_\mu}. \quad (3.19)$$

Теперь биномиальную формулу (предложение 3.8, а также (3.3)–(3.10)) можно переписать следующим образом:

Предложение 3.13. Для любой сигнатуры $\lambda \in \text{Sign}(N)$ имеем

$$\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} \frac{s_\mu^*(\lambda_1, \dots, \lambda_N) s_\mu(x_1, \dots, x_N)}{(N)_\mu} \quad (3.20)$$

Замечание 3.14. В формуле (3.20) переменные x_1, \dots, x_N уравниваются в правах с компонентами сигнатуры $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Это будет удобно для исследования поведения $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ при $N \rightarrow \infty$. Как объясняется в §3.1, мы будем исследовать асимптотическое поведение коэффициентов Тейлора, то есть величин $\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{(N)_\mu}$.

Таким образом, теперь у нас есть сдвинуто-симметрические многочлены Шура s_μ^* , обычные многочлены Шура s_μ ($\mu \in \text{Part}$), а также лорановские (нормированные) многочлены Шура \tilde{s}_λ ($\lambda \in \text{Sign}(N)$). Приведем некоторые свойства сдвинуто-симметрических многочленов Шура, которые похожи на свойства обычных многочленов. Наряду с переменными y_i в $s_\mu^*(y_1, \dots, y_N)$ также удобно ввести сдвинутые переменные \tilde{y}_i по формуле

$$\tilde{y} = y + \delta, \quad \delta = (N - 1, N - 2, \dots, 1, 0), \quad (3.21)$$

то есть, $\tilde{y}_i = y_i + N - i$.

Предложение 3.15. (1) Выражение $s_\mu^*(y_1, \dots, y_N)$ является симметричным по $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$;
(2) $s_\mu^*(y)$ является многочленом от y_1, \dots, y_N (или, что эквивалентно, от $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$);
(3) (стабильность) Сдвинуто-симметрические многочлены Шура s_μ^* стабильны в том же смысле, что и обычные многочлены Шура s_μ :

$$s_\mu^*(y_1, \dots, y_N)|_{y_N=0} = \begin{cases} s_\mu^*(y_1, \dots, y_{N-1}), & \text{если } \ell(\mu) \leq N - 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Доказательство. Упражнение 3.5. □

3.6 Алгебры симметрических и сдвинуто-симметрических функций

В данном подразделе мы введем необходимый формализм, касающийся алгебр симметрических и сдвинуто-симметрических функций. Он оказывается полезным во многих ситуациях, его применение не ограничивается рамками данных лекций.

Сначала опишем алгебру симметрических функций (см., например, [Мак84, Глава I, §2]). Напомним (определение 3.4), что через $\Lambda(N)$ мы обозначаем алгебру симметрических многочленов от N переменных x_1, \dots, x_N , то есть, $\Lambda(N) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\text{Sym}}_N$. Это многочлены в традиционном смысле, а не многочлены Лорана. Алгебра $\Lambda(N)$ является $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированной.²³

Определение 3.16. Алгебра симметрических функций Λ — это проективный предел алгебр $\Lambda(N)$ (обозначается $\Lambda = \varprojlim \Lambda(N)$) в категории градуированных алгебр относительно проекций $\Lambda(N) \rightarrow \Lambda(N - 1)$, состоящих в специализации $x_N = 0$.

Другими словами, каждый элемент $f \in \Lambda$ представляет собой последовательность $f = (f_N)$, где

- $f_N \in \Lambda(N)$;
- $f_N|_{x_N=0} = f_{N-1}$;
- $\sup_N \deg f_N < \infty$.

²³Понятие \mathbb{Z} -градуированной алгебры дано в определении 1.1, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированная алгебра определяется аналогично.

Первые два пункта разъясняют смысл понятия «проективный предел», третий пункт показывает, что этот предел берется именно в категории градуированных алгебр, а не просто алгебр. Другими словами, для фиксированного k можно рассмотреть ограничение проекций $\Lambda(N) \rightarrow \Lambda(N-1)$ на $\Lambda_{\deg=k}(N)$, мы получим линейные преобразования $\Lambda_{\deg=k}(N) \rightarrow \Lambda_{\deg=k}(N-1)$. Взяв проективный предел пространств $\Lambda_{\deg=k}(N)$, мы получим $\Lambda_{\deg=k}$ — однородную компоненту степени k в алгебре Λ . Таким образом, алгебра Λ наделяется структурой $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированной алгебры.

Замечание 3.17. Алгебру симметрических функций Λ можно действительно рассматривать как алгебру функций от бесконечного числа переменных. А именно, как функции на пространстве $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$, состоящем из последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, в которых лишь конечное число компонент отлично от нуля. Действительно, для любого $x \in \mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$ найдется номер N , такой что $x = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$, и тогда значение элемента $f = (f_N) \in \Lambda$ на x полагаем равным $f_N(x_1, \dots, x_N)$.

Определение 3.18. Можно рассматривать симметрические функции Шура $s_{\mu} \in \Lambda$, где $\mu \in \text{Part}$. Это следует из стабильности многочленов Шура $s_{\mu}(x_1, \dots, x_N)$ (предложение 3.9), а также из того, что каждый многочлен Шура $s_{\mu}(x_1, \dots, x_N)$ (где $N \geq \ell(\mu)$) является однородным степени $|\mu|$.²⁴

Теперь перейдем к определению алгебры сдвинуто-симметрических функций.

Определение 3.19. Алгебра сдвинуто-симметрических многочленов от переменных y_1, \dots, y_N состоит из всех многочленов от y_1, \dots, y_N , инвариантных относительно сдвинутого действия группы \mathfrak{S}_N . Обозначение

$$\Lambda^*(N) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{*\mathfrak{S}_N}, \quad (3.23)$$

где $*\mathfrak{S}_N$ и есть сдвинутое действие, которое определяется следующим образом. В отличие от обычного действия (перестановки координат y_1, \dots, y_N), действие $*\mathfrak{S}_N$ переставляет координаты $\tilde{y}_i = y_i + N - i$, если многочлен от y_1, \dots, y_N рассматривать как многочлен от $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$. Другими словами, для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ее сдвинутое действие в координатах y записывается так:

$$*\sigma(y) = \sigma(y + \delta) - \delta, \quad y = (y_1, \dots, y_N), \quad \delta = (N-1, N-2, \dots, 0), \quad (3.24)$$

где $\sigma(y + \delta)$ — перестановка координат (обычное действие элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_N$).

Отметим, что обычное действие группы \mathfrak{S}_N на $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ перестановками координат сохраняет однородные многочлены в $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$. Поэтому алгебру симметрических многочленов $\Lambda(N) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ естественно наделять структурой градуированной алгебры. Сдвинутое действие $*\mathfrak{S}_N$ на $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$, определенное выше, уже не сохраняет однородные многочлены. Однако, оно не повышает степени многочленов, поэтому алгебру $\Lambda^*(N) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{*\mathfrak{S}_N}$ можно наделять структурой фильтрованной алгебры:

Определение 3.20. Алгебра A называется *фильтрованной*, если в A выделена последовательность вложенных друг в друга подпространств $\{0\} \subset A_{\leq 0} \subset A_{\leq 1} \subset \dots \subset A$, так что $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_{\leq i}$ и для всех m, n выполнено $A_{\leq m} \cdot A_{\leq n} \subseteq A_{\leq (m+n)}$. Говорят, что $A_{\leq m}$ — пространство элементов A , имеющих степень не выше m .

Рассмотрим проективный предел алгебр $\Lambda^*(N)$ в категории фильтрованных алгебр относительно проекций $\Lambda^*(N) \rightarrow \Lambda^*(N-1)$, состоящих в специализации $y_N = 0$ (см. также упражнение 3.6). Мы получим следующий объект:

²⁴Формально говоря, функция Шура $s_{\mu} \in \Lambda$ — это последовательность многочленов Шура $s_{\mu}(x_1, \dots, x_N)$ от N переменных. Она удовлетворяет всем трем свойствам, перечисленным в определении 3.16.

Определение 3.21. Алгебра сдвинуто-симметрических функций Λ^* состоит из последовательностей $g = (g_N)$, для которых

- $g_N \in \Lambda^*(N)$;
- $g_N|_{y_N=0} = g_{N-1}$;
- $\sup_N \deg g_N < \infty$.

Определение 3.22. Пусть A — некоторая фильтрованная алгебра. Присоединенная градуированная алгебра $\text{gr}A$ определяется как

$$\text{gr}A := \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_{\deg \leq k} / A_{\deg \leq (k-1)}. \quad (3.25)$$

Предложение 3.23. Присоединенная градуированная алгебра $\text{gr}\Lambda^*$ канонически изоморфна алгебре Λ .

Доказательство. Упражнение 3.7. □

Замечание 3.24. Так же, как в замечании 3.17 об алгебре Λ , элементы алгебры сдвинуто-симметрических функций Λ^* можно рассматривать как настоящие функции на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$.

Определение 3.25. Сдвинуто-симметрические функции Шура $s_{\mu}^* \in \Lambda^*$ определяются как «пределы» сдвинуто-симметрических многочленов Шура $s_{\mu}^*(y_1, \dots, y_N)$ аналогично определению 3.18.

Замечание 3.26. Для всех $\mu \in \text{Part}$ старшей однородной компонентой сдвинуто-симметрической функции Шура $s_{\mu}^* \in \Lambda^*$ является функция Шура $s_{\mu} \in \Lambda$. Поясним это утверждение. Пусть $|\mu| = k$. Наше утверждение означает, что при каноническом гомоморфизме

$$\Lambda_{\deg \leq k}^* \rightarrow \Lambda_{\deg \leq k}^* / \Lambda_{\deg \leq (k-1)}^* \quad (3.26)$$

функция $s_{\mu}^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^*$ переходит в функцию $s_{\mu} \in \Lambda_{\deg = k}$ (напомним, что $\Lambda_{\deg = k}$ изоморфно $\Lambda_{\deg \leq k}^* / \Lambda_{\deg \leq (k-1)}^*$, см. упражнение 3.7).

Предложение 3.27. (1) Функции Шура $s_{\mu} \in \Lambda$ (где μ пробегает все разбиения) образуют базис в алгебре Λ ;

(2) Сдвинуто-симметрические функции Шура $s_{\mu}^* \in \Lambda^*$ (где μ пробегает все разбиения) образуют базис в алгебре Λ^* . Кроме того, он согласован с фильтрацией в Λ^* , то есть, для любого k , совокупность тех функций s_{μ}^* , которые попадают в $\Lambda_{\deg \leq k}^*$, образует базис в $\Lambda_{\deg \leq k}^*$.

Доказательство. Утверждение (1) можно доказать, пользуясь определением алгебры Λ как проективного предела (определение 3.16). Утверждение (2) следует из утверждения (1) и замечания 3.26. □

Замечание 3.28. Алгебру сдвинуто-симметрических функций Λ^* можно рассматривать как своего рода деформацию алгебры симметрических функций Λ . А именно, можно рассмотреть целое семейство алгебр $\Lambda^{(h)}$ (здесь $h \in \mathbb{R}$ — параметр деформации) *h-сдвинуто-симметрических функций*. Каждая алгебра $\Lambda^{(h)}$ получается как проективный предел алгебр *h-сдвинуто-симметрических* многочленов (то растущего числа переменных), то есть, алгебр многочленов от переменных y_1, \dots, y_N , которые инвариантны относительно *h-действия* группы \mathfrak{S}_N , которое заключается в перестановке переменных $\tilde{y}_i^{(h)} := y_i - h \cdot i + \text{Const}$. Если $h = 0$, то $\Lambda^{(0)}$ — обычная алгебра симметрических функций, а если $h = 1$, то мы получаем алгебру сдвинуто-симметрических функций Λ^* . С другой стороны, для любого $h \neq 0$ алгебра $\Lambda^{(h)}$ изоморфна алгебре Λ^* (достаточно сделать замену переменных $y_i \mapsto \frac{y_i}{h}$). Таким образом, можно сказать, что алгебра Λ^* есть деформация алгебры Λ .

Пример 3.29 (Суммы Ньютона). В заключение приведем один пример. Как известно, одним из семейств образующих алгебры Λ являются суммы Ньютона $p_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, $k = 1, 2, \dots$ (если рассматривать симметрические функции на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$, то эти суммы фактически будут конечными). Попробуем найти их аналог в алгебре Λ^* . Хотелось бы взять функции вида $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - i)^k$, однако ясно, что на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$ эти суммы расходятся. Поэтому нам необходимо компенсировать эту расходимость. Положим

$$p_k^*(x) := \sum_{i=1}^{\infty} [(x_i - i)^k - (-i)^k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Ясно, что эти равенства корректно определяют функции на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$, и кроме того, они определяют сдвинуто-симметрические функции $p_k^* \in \Lambda^*$. Также ясно, что для всех $k = 1, 2, \dots$ старшей однородной компонентой функции $p_k^* \in \Lambda^*$ (в смысле замечания 3.26) является $p_k \in \Lambda$.

Заменяя i на $h \cdot i$ ($h \in \mathbb{R}$) в определении p_k^* , мы получим функции, которые естественно называть деформациями сумм Ньютона.²⁵

3.7 Упражнения

Упражнение 3.1. Докажите предложение 3.5.

Упражнение 3.2. Выведите из биномиальной формулы (предложение 3.8) формулу размерности (предложение 2.10).

Упражнение 3.3. Покажите, что сдвинуто-симметрический многочлен Шура $s_{\mu}^*(y_1, \dots, y_N)$ (определение 3.11) действительно является многочленом по y_1, \dots, y_N .

Указание. Это доказывается также, как предложение 1.5.

Упражнение 3.4. Докажите формулу (3.19).

Упражнение 3.5. Докажите предложение 3.15.

Указание. Свойство (1) следует из определения сдвинуто-симметрических многочленов Шура (определение 3.11). Свойство (2) — из упражнения 3.3. Свойство стабильности сдвинуто-симметрических многочленов Шура (свойство (3)) можно доказать точно так же, как стабильность обычных многочленов Шура (предложение 3.9).

Упражнение 3.6. Покажите, что для любого сдвинуто-симметрического многочлена $g(y_1, \dots, y_N)$ из $\Lambda^*(N)$ (см. определение 3.19) многочлен $g(y_1, \dots, y_N)|_{y_N=0}$ является сдвинуто-симметрическим по переменным y_1, \dots, y_{N-1} . Это позволяет нам рассматривать проекции $\Lambda^*(N) \rightarrow \Lambda^*(N-1)$, используемые для определения алгебры сдвинуто-симметрических функций (см. §3.6).

Упражнение 3.7. Докажите предложение 3.23, то есть, покажите, что для всех $k = 1, 2, \dots$ существует канонический изоморфизм

$$\Lambda_{\text{deg} \leq k}^* / \Lambda_{\text{deg} \leq (k-1)}^* \cong \Lambda_{\text{deg} = k}. \quad (3.28)$$

Для доказательства последнего факта используйте конструкцию проективного предела.

Упражнение 3.8. Пользуясь определениями §3.6, проверьте утверждения замечания 3.26.

Упражнение 3.9. Завершите доказательство предложения 3.27.

²⁵Существуют и другие варианты аналогов сумм Ньютона. Каждый из них имеет свои достоинства, а наиболее предпочтительного варианта, по-видимому, указать нельзя.

4 Сдвинуто-симметрические функции Шура (продолжение)

4.1 Инфинитезимально-регулярные последовательности сигнатур

Напомним (§3.6), что мы ввели градуированную алгебру симметрических функций Λ с базисом из симметрических функций Шура $\{s_\mu\}$, где μ пробегает все разбиения. Также в §3.6 мы определили алгебру сдвинуто-симметрических функций Λ^* с базисом из сдвинуто-симметрических функций Шура $\{s_\mu^*\}$, где μ также пробегает все разбиения. Напомним, что для нормированных лорановских многочленов Шура было получено разложение (3.20):

$$\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} \frac{s_\mu^*(\lambda) s_\mu(x)}{(N)_\mu}. \quad (4.1)$$

Здесь λ — сигнатура длины N . Величина $(N)_\mu$ определяется по формуле (3.18). Отметим, что

$$(N)_\mu \sim N^{|\mu|}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Для наших целей этой эквивалентности будет достаточно.

В §3.1 была высказана идея, что для доказательства теоремы Войкулеску (теорема 2.21) надо сначала рассмотреть ее инфинитезимальный вариант, то есть, найти все последовательности сигнатур $\lambda(N)$, для которых коэффициенты при $s_\mu(x)$ в (4.1) имеют пределы. Эта идея вместе с эквивалентностью (4.2) приводит к следующему определению:

Определение 4.1. Последовательность сигнатур $\lambda(N)$ (где $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$, то есть сигнатура длины N) называется *инфинитезимально-регулярной*, если для каждого фиксированного разбиения μ величины

$$\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{N^{|\mu|}} \quad (4.3)$$

имеют предел при $N \rightarrow \infty$.

Мы знаем, что $\{s_\mu^*\}$ — базис в Λ^* , согласованный с фильтрацией (предложение 3.27), поэтому свойство инфинитезимально-регулярности можно переформулировать следующим образом.

Выберем любую однородную симметрическую функцию $F \in \Lambda$ степени $k \geq 1$ (мы пишем $F \in \Lambda_{\text{deg}=k}$). «Поднимем» F в алгебру Λ^* , то есть, возьмем какую-нибудь сдвинуто-симметрическую функцию $F^* \in \Lambda_{\text{deg} \leq k}^*$, старшей однородной компонентой которой является F (см. замечание 3.26). Величины

$$\frac{F^*(\lambda(N))}{N^k} \quad (4.4)$$

имеют предел при $N \rightarrow \infty$ для всех $F \in \Lambda_{\text{deg}=k}$ и для всех $k = 1, 2, \dots$ тогда и только тогда, когда $\{\lambda(N)\}$ — инфинитезимально-регулярная последовательность сигнатур. Нетрудно проверить (упражнение 4.1), что предел (4.4) не зависит от выбора F^* , а зависит только от самой функции F . Таким образом, для инфинитезимально-регулярной последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ можно определить функционал $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$, для которого

$$\frac{F^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow \psi(F), \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

При этом ψ , разумеется, зависит от последовательности $\{\lambda(N)\}$. Функционал ψ , кроме того, что является линейным на Λ , еще и обладает свойством мультипликативности, то есть $\psi(F_1 F_2) = \psi(F_1) \psi(F_2)$. Именно это свойство позволяет перейти к однородным образующим в алгебре Λ . Сформулируем это важное соображение в виде предложения:

Предложение 4.2. Пусть $f_1, f_2, \dots \in \Lambda$ — однородные элементы алгебры Λ , $\deg f_k = k$, и алгебра Λ порождена элементами f_k как коммутативная алгебра с единицей.²⁶ Пусть $f_k^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^*$ — сдвинуто-симметрические функции, такие, что старшая однородная компонента элемента f_k^* есть f_k для всех k .

Последовательность сигнатур $\{\lambda(N)\}$ (где $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$) является инфинитезимально-регулярной (определение 4.1) тогда и только тогда, когда для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует предел (зависящий от $\{\lambda(N)\}$), такой, что

$$\frac{f_k^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow \psi_k, \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

(Тогда мультипликативный функционал (4.5) определяется условием $\psi(f_k) = \psi_k$.) В следующем подразделе мы рассмотрим хорошо известные системы однородных образующих алгебры Λ .

4.2 Однородные образующие в алгебре Λ и их сдвинуто-симметрические аналоги

Сначала рассмотрим однородные образующие в Λ . Этот материал можно найти, напр., в [Мак84, Глава I, §2].

Определение 4.3. Суммы Ньютона $p_k \in \Lambda$, полные симметрические функции²⁷ $h_k \in \Lambda$ и элементарные симметрические функции $e_k \in \Lambda$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_k(x_1, x_2, \dots) &:= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k; \\ h_k(x_1, x_2, \dots) &:= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}; \\ e_k(x_1, x_2, \dots) &:= \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $k = 1, 2, \dots$. Часто удобно считать, что $h_0 = e_0 := 1$. Отметим, что надобности определить каким-либо образом p_0 не возникает.

Замечание 4.4. Эти определения можно понимать двумя способами. Поясним это на примере функций h_k :

- Согласно определению 3.16, элемент $h_k \in \Lambda$ — это последовательность многочленов $h_k(x_1, \dots, x_N)$ из $\Lambda(N)$, $N = 1, 2, \dots$. Таким образом, положив $x_{N+1} = x_{N+2} = \dots = 0$ в (4.7), мы получим обычные симметрические многочлены от x_1, \dots, x_N ;
- Функции (4.7) можно рассматривать как элементы из $\mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots]]$, то есть, как формальные степенные ряды от бесконечного числа переменных x_1, x_2, \dots . Также можно считать, что и вся алгебра Λ вложена в $\mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots]]$.

Все три системы функций $\{p_1, p_2, \dots\}$, $\{h_1, h_2, \dots\}$, $\{e_1, e_2, \dots\}$ являются системами однородных образующих алгебры Λ . Определим производящие функции для этих наборов:

²⁶В этом случае мы говорим, что $\{f_1, f_2, \dots\}$ — система однородных образующих алгебры Λ .

²⁷Мы уже встечались с полными однородными симметрическими многочленами, но теперь слово «однородный» в названии h_k мы будем для краткости опускать.

Определение 4.5. Пусть t — формальная переменная, положим

$$\begin{aligned} P(t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k t^k}{k}; \\ H(t) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k; \\ E(t) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Определение производящей функции $P(t)$ не вполне стандартно ввиду множителей k в знаменателе, но оно оказывается удобным.

Приведем важные свойства этих производящих функций.

Предложение 4.6. *Функции $H(t)$ и $E(t)$ могут быть выражены через x_1, x_2, \dots :*

$$H(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t}, \quad E(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i t). \tag{4.9}$$

Есть соотношения, которые связывают три системы однородных образующих алгебры Λ ($\{p_k\}$, $\{h_k\}$ и $\{e_k\}$) между собой:

$$H(t)E(-t) = 1, \quad H(t) = e^{P(t)}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Упражнение 4.2. □

Теперь перейдем к факториальным аналогам однородных образующих, как подсказывает предложение 4.2. Для функций p_k нет канонических сдвинуто-симметрических аналогов,²⁸ а для h_k и e_k есть. Нам будет удобнее работать с функциями h_k , однако, с тем же успехом можно было бы использовать и e_k . До некоторого момента мы будем работать с h_k и e_k параллельно, затем сосредоточимся на h_k .

Определение 4.7. *Полные сдвинуто-симметрические функции $h_k^* \in \Lambda^*$ и элементарные сдвинуто-симметрические функции $e_k^* \in \Lambda^*$ определяются следующим образом:*

$$\begin{aligned} h_k^*(y_1, y_2, \dots) &:= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} (y_{i_1} - k + 1) \dots (y_{i_{k-1}} - 1) y_{i_k}; \\ e_k^*(y_1, y_2, \dots) &:= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (y_{i_1} + k - 1) \dots (y_{i_{k-1}} + 1) y_{i_k}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь $k = 1, 2, \dots$. Удобно также положить $h_0^* = e_0^* := 1$.

Замечание 4.8. Из этого определения сразу видна стабильность h_k^* и e_k^* (в смысле предложения 3.15 (3)), так как мы всегда полагаем равными нулю переменные y_i с наибольшим номером, а в силу ограничений $i_1 \leq \dots \leq i_k$ (соответственно, $i_1 < \dots < i_k$) эти нулевые переменные могут стоять только на последнем месте в мономе $(y_{i_1} - k + 1) \dots (y_{i_{k-1}} - 1) y_{i_k}$ (соответственно, $(y_{i_1} + k - 1) \dots (y_{i_{k-1}} + 1) y_{i_k}$). Однако, свойства сдвинуто-симметричности функций h_k^* и e_k^* из определения не видно (упражнение 4.3).

Можно пояснить, почему мы считаем h_k^* и e_k^* из определения 4.7 каноническими аналогами h_k и e_k . Оказывается,²⁹ что

$$h_k^* = s_{(k)}^*, \quad e_k^* = s_{(1^k)}^*, \tag{4.12}$$

где $k = 1, 2, \dots$, s_{μ}^* — сдвинуто-симметрические функции Шура, (k) и $(1^k) = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$ — разбиения (ср. это с предложением 2.14, которое утверждает, что $s_{(k)} = h_k$ и $s_{(1^k)} = e_k$).

²⁸См. также пример 3.29.

²⁹Упражнение 4.4.

4.3 Производящие функции для h_k^* и e_k^*

Начнем с одного общего замечания.

Замечание 4.9. В алгебре Λ^* формальные степенные ряды следует рассматривать по степеням обратной переменной v^{-1} , в отличие от алгебры Λ , где мы рассматривали ряды по степеням t (определение 4.5, предложение 4.6). Это связано с тем, что в рядах по переменной t нельзя сделать замену $t \rightarrow t + c$ ($c \neq 0$), эта операция не определена. В то же время в рядах по v^{-1} замена $v \rightarrow v + c$ вполне допустима.³⁰ А именно, рассмотрим ряд

$$\Phi(v) := \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{v} + \frac{\varphi_2}{v^2} + \dots \quad (4.13)$$

Пусть $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ — последовательность сдвижек, $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$. Ряд $\Phi(v)$ можно переразложить следующим образом:

$$\Phi(v) = \tilde{\varphi}_0 + \frac{\tilde{\varphi}_1}{v - \varepsilon_1} + \frac{\tilde{\varphi}_2}{(v - \varepsilon_1)(v - \varepsilon_2)} + \dots, \quad (4.14)$$

это приведет к линейной треугольной замене коэффициентов $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) \rightarrow (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots)$.

Определение 4.10. Производящими функциями сдвинуто-симметрических функций h_k^* и e_k^* соответственно называются следующие формальные степенные ряды по переменной v^{-1} :

$$\begin{aligned} H^*(v) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*}{v(v-1)\dots(v-k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{v^{\downarrow k}}, \\ E^*(v) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k^*}{v(v-1)\dots(v-k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^*}{v^{\downarrow k}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь $v^{\downarrow k}$ — убывающие факториальные степени, см. определение 3.10.

Приведем без доказательства формулы для производящих функций $H^*(v)$ и $E^*(v)$, похожие на формулы (4.9).

Предложение 4.11.

$$H^*(v) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{v+i}{v-y_i+i}, \quad E^*(v) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{v+y_i-i+1}{v-i+1}. \quad (4.16)$$

Замечание 4.12. (1) Из формул (4.16) уже видна сдвинуто-симметричность функций h_k^* и e_k^* (упражнение 4.3).

(2) Производящие функции $H^*(v)$ и $E^*(v)$ являются элементами алгебры $\mathbb{C}[[y_1, y_2, \dots; \frac{1}{v}]]$. Это можно увидеть двумя способами:

- С одной стороны, можно ограничиться переменными y_1, \dots, y_N (полагая $y_{N+1} = y_{N+2} = \dots = 0$), тогда произведения в правых частях (4.16) станут рациональными функциями от v , и их можно разложить в $v = \infty$. Для их коэффициентов будет выполняться свойство стабильности по N ;
- С другой стороны, можно поделить числитель и знаменатель каждого из сомножителей в правых частях (4.16) на v , и сразу рассматривать эти правые части как элементы алгебры $\mathbb{C}[[y_1, y_2, \dots; \frac{1}{v}]]$.

Замечание 4.13. Из (4.16) следует, что $H^*(v)E^*(-v-1) = 1$. Это равенство можно рассматривать как деформацию соответствующего соотношения $H(t)E(-t) = 1$ (предложение 4.6) в духе замечания 3.28 — вводя параметр h , будем иметь для $h \neq 0$ равенства $H^*(v)E^*(-v-h) = 0$, и при $h \rightarrow 0$ придем к $H(t)E(-t) = 1$.

³⁰Можно мыслить ряды по переменной t как ряды Тейлора в точке 0, а по переменной v^{-1} — как ряды в $v = \infty$. Ясно, что замена $v \rightarrow v + c$ в окрестности $v = \infty$ представляет собой почти тождественное преобразование.

4.4 Инфинитезимальная регулярность и степенные ряды

Конкретизируя предложение 4.2, можно сказать, что последовательность сигнатур $\{\lambda(N)\}$ инфинитезимально-регулярна тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\frac{h_k^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow \psi_k, \quad N \rightarrow \infty \quad (4.17)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$.

Вместо доказательства указанной сходимости нам бы хотелось рассматривать производящие функции числовых последовательностей $\frac{h_k^*(\lambda(N))}{N^k}$ и ψ_k по степеням v^{-1} и доказывать уже сходимость последовательности степенных рядов к предельному степенному ряду. Мы приведем этой определению последней сходимости и общую лемму, которая будет далее использоваться.

Определение 4.14. Будем говорить, что последовательность формальных степенных рядов $\Phi^{(N)}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{(N)} v^{-k}$ сходится к формальному степенному ряду $\Phi(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k v^{-k}$, если сходятся коэффициенты при всех степенях v^{-1} , то есть, $\varphi_k^{(N)} \rightarrow \varphi_k$ при $N \rightarrow \infty$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 4.15. Пусть $\varphi_k^{(N)}, \varphi_k$ ($k, N \in \mathbb{Z}_{>0}$) — числа. Пусть $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots$ — последовательность сдвижек (фиксированная, не зависящая от N). Построим ряды со сдвижками:

$$\Phi^{(N)}(v) := \varphi_0^{(N)} + \frac{\varphi_1^{(N)}}{v_1 - \varepsilon_1} + \frac{\varphi_2^{(N)}}{(v - \varepsilon_1)(v - \varepsilon_2)} + \dots, \quad (4.18)$$

и также пусть $\Phi(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k v^{-k}$.

Тогда

$$\frac{\varphi_k^{(N)}}{N^k} \rightarrow \varphi_k, \quad N \rightarrow \infty \quad (4.19)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$ тогда и только тогда, когда выполнена сходимость степенных рядов

$$\Phi^{(N)}(Nv) \rightarrow \Phi(v), \quad N \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

(в смысле определения 4.14).

Доказательство. Упражнение 4.5) □

В следующем подразделе мы займемся сходимостью последовательностей производящих рядов в случае, когда все сигнатуры $\lambda(N)$ неотрицательны (то есть, $\lambda(N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$). В этом случае мы будем трактовать $\lambda(N)$ как разбиения длины не больше N и изображать их диаграммами Юнга (см. замечание 3.12). Общий случай будем рассматривать в следующей лекции, а сейчас сделаем одно замечание:

Замечание 4.16 (Об общих сигнатурах). Общую (не обязательно неотрицательную) сигнатуру λ длины N будем представлять как пару диаграмм Юнга λ^+ и λ^- с дополнительным условием $\ell(\lambda^+) + \ell(\lambda^-) \leq N$. Проще всего это описать на примере. Пусть $\lambda = (3, 3, 1, 0, -2, -4)$, $N = 6$, тогда $\lambda^+ = (3, 3, 1)$ и $\lambda^- = (4, 2)$, см. рис. 3. Диаграмма λ^+ ориентирована привычно, а диаграмма λ^- повернута на 180° .

4.5 Координаты Фробениуса и инфинитезимально-регулярные последовательности неотрицательных сигнатур

Займемся описанием инфинитезимально-регулярных последовательностей неотрицательных сигнатур.

Идея состоит в переходе к координатам Фробениуса диаграммы Юнга (которые будут рассматриваться вместо длин ее строк).

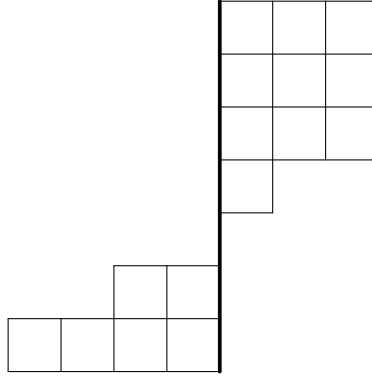


Рис. 3: Представление сигнатуры $\lambda = (3, 3, 1, 0, -2, -4)$ в виде пары диаграмм Юнга $\lambda^+ = (3, 3, 1)$ и $\lambda^- = (4, 2)$.

Определение 4.17. Пусть λ — диаграмма Юнга. Пусть $d = d(\lambda)$ — число клеток на диагонали диаграммы λ . Положим

$$a_i := \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \quad b_i := \lambda'_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (4.21)$$

Здесь λ' — транспонированная диаграмма Юнга (отраженная относительно главной диагонали). Числа $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ называются *модифицированными координатами Фробениуса* диаграммы λ .

Замечание 4.18. Модифицированные координаты Фробениуса были введены Вершиком и Керовым. Они отличаются от классических координат Фробениуса (см., напр., [Мак84]) добавлением $\frac{1}{2}$. Важная роль этих добавок выясняется при дальнейшем развитии теории. Классические координаты Фробениуса нам не понадобятся, поэтому прилагательное «модифицированные» мы будем опускать.

Ясно, что $\sum_{i=1}^d (a_i + b_i) = |\lambda|$, а также что транспозиция диаграммы λ отвечает замене $a_i \leftrightarrow b_i$. Также отметим, что $a_1 > a_2 > \dots > a_d > 0$ и $b_1 > b_2 > \dots > b_d > 0$.

Пример 4.19. Для $\lambda = (3, 3, 1)$ имеем $d = 2$, $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $b_1 = \frac{5}{1}$, $b_2 = \frac{1}{2}$, см. рис. 4. Видно, что координаты Фробениуса равны площадям соответствующих трапеций. На рис. 4 эти

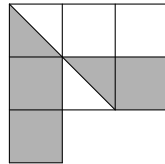


Рис. 4: Координаты Фробениуса как площади трапеций.

трапеции закрашены для a_2 («горизонтальная») и для b_1 («вертикальная»).

Сейчас мы увидим, что в терминах координат Фробениуса производящая функция (4.15) приобретает замечательно простой вид. Для начала сделаем сдвигку аргумента, $v \rightarrow v - \frac{1}{2}$, что не повлияет на асимптотическое поведение (так как аргумент v затем будет умножаться на N).

Предложение 4.20. Для любой диаграммы Юнга λ ,

$$H^*(v - \frac{1}{2}; \lambda) = \prod_{i=1}^d \frac{v + b_i}{v - a_i}, \quad (4.22)$$

где $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ — координаты Фробениуса диаграммы λ .

Замечание 4.21. Ряд

$$H^*(v - \frac{1}{2}; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*(\lambda)}{(v - \frac{1}{2})^{\downarrow k}}. \quad (4.23)$$

является сдвинуто-симметрической функцией от длин строк $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ диаграммы λ , тогда как в правой части (4.22) стоит *суперсимметрическая* функция от координат Фробениуса $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ диаграммы λ .³¹ Это пример того, как суперсимметрия возникает из диаграмм Юнга и симметрических функций.

Предложение 4.20 можно доказать, используя так называемую лемму Фробениуса, см. [Мак84, гл. I, (1.7)] (Макдональд это название не употребляет). Мы приведем несколько иное рассуждение, хотя по существу оно эквивалентно лемме Фробениуса.

Доказательство. Надо показать, что для всех $\lambda \in \mathbb{Y}$,

$$\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{v + i - \frac{1}{2}}{v - \lambda_i + i - \frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^d \frac{v + b_i}{v - a_i}. \quad (4.24)$$

Сопоставим каждой диаграмме Юнга λ полубесконечную влево конфигурацию точек

$$X(\lambda) = \{\lambda_i - i + \frac{1}{2}\}_{i=1,2,\dots} \subset \mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$

Разделим полуцелые числа \mathbb{Z}' на положительные и отрицательные, $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'_+ \sqcup \mathbb{Z}'_-$. Покажем, что

$$X(\lambda) \cap \mathbb{Z}'_+ = \{a_1, \dots, a_d\}, \quad \mathbb{Z}' \setminus X(\lambda) = \{-b_1, \dots, -b_d\}, \quad (4.26)$$

где $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ — координаты Фробениуса диаграммы λ .

Пусть $\lambda = (3, 3, 1)$. На рис. 5 изображена конфигурация точек $X(\lambda) \subset \mathbb{Z}'$. Таким образом,

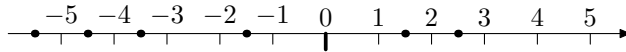


Рис. 5: Конфигурация $X(\lambda)$ для $\lambda = (3, 3, 1)$.

(4.26) утверждает, что если в конфигурации $X(\lambda)$ взять «частицы» справа от нуля и «дырки» слева, то получим как раз координаты Фробениуса $\{a_1, \dots, a_d\}$ и $\{-b_1, \dots, -b_d\}$. Это можно увидеть, если наложить числовую ось вдоль границы диаграммы Юнга, как показано на рисунке 6, и на каждом вертикальном отрезке получившейся «изломанной» оси расположить частицу (упражнение 4.6).

Итак, (4.26) установлено. Отметим, что $X(\emptyset) = \{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\}$, поэтому левую часть (4.24) можно записать как

$$\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{v + i - \frac{1}{2}}{v - \lambda_i + i - \frac{1}{2}} = \frac{\prod_{x \in X(\emptyset)} (v - x)}{\prod_{x \in X(\lambda)} (v - x)}. \quad (4.27)$$

³¹То есть, правая часть (4.22) симметрична по каждому из наборов a_1, \dots, a_d и b_1, \dots, b_d , а также выполнено дополнительное свойство: если для всех $i, j = 1, \dots, d$ положить $a_i = -b_i = t$, то результат этой подстановки не будет зависеть от t .

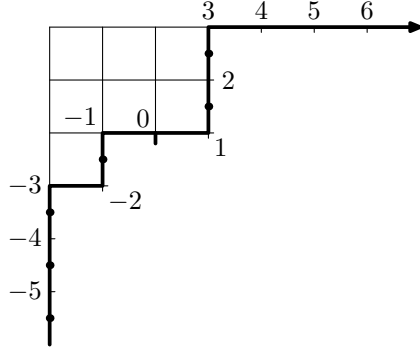


Рис. 6: К доказательству (4.26).

Видно, что почти все множители в числителе и знаменателе сокращаются, кроме конечного числа, и в результате с помощью (4.26) получается то, что требовалось. \square

Замечание 4.22. Соответствие (4.25) играет фундаментальную роль, поскольку позволяет трактовать случайные разбиения как точечные случайные процессы.

Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность неотрицательных сигнатур. Из предложения 4.20 получаем, что

$$H^*(N(v - \frac{1}{2}); \lambda(N)) = \prod_{i=1}^{d(N)} \frac{v + \frac{b_i(N)}{N}}{v - \frac{a_i(N)}{N}}, \quad (4.28)$$

где $(a_1(N), \dots, a_{d(N)}(N) \mid b_1(N), \dots, b_{d(N)}(N))$ — координаты Фробениуса диаграммы $\lambda(N)$. В силу предложения 4.11 и леммы 4.15, инфинитезимальная регулярность последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ пересказывается теперь как сходимость в $\mathbb{C}[[v^{-1}]]$ правых частей формулы (4.28).

Как мы увидим в дальнейшем, для этого необходимо и достаточно существования пределов

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_i(N)}{N} = \alpha_i, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_i(N)}{N} = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

(при этом величина $d(N)$ может как стремиться к бесконечности, так и быть ограниченной), а также предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\lambda(N)|}{N} = \delta. \quad (4.30)$$

Пример 4.23. Число γ не обязано быть нулем, например, можно рассмотреть последовательность $\lambda(N)$ диаграмм Юнга, которые представляют собой квадраты со стороной (примерно) \sqrt{N} . Тогда ясно, что все α_i и β_i равны нулю, а при этом $\gamma = 1$.

Замечание 4.24. Оказывается, что случай положительных сигнатур, который мы сейчас рассмотрели, отвечает асимптотической теории характеров бесконечной симметрической группы.

4.6 Упражнения

Упражнение 4.1. Зафиксируем $F \in \Lambda_{\deg=k}$ ($k \geq 1$). Покажите, что факт существования предела (4.4) при $N \rightarrow \infty$ и величина этого предела не зависят от выбора сдвинуто-симметрической $F^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^*$, старшая степень которой равна F .

Упражнение 4.2. Докажите предложение 4.6.

Упражнение 4.3. Докажите,³² что функции h_k^* и e_k^* (определение 4.7) являются сдвинуто-симметрическими по переменным y_1, y_2, \dots . Другими словами, если ограничиться N переменными (положить $y_{N+1} = y_{N+2} = \dots = 0$), и сделать замену $\tilde{y}_i = y_i - i + \text{Const}$ (константа может быть любая, например, ноль), то полученные многочлены уже будут симметрическими по переменным $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$ (см. также определение 3.19).

Указание. В качестве простого примера можно рассмотреть функцию

$$e_2^*(y_1, y_2, \dots) = \sum_{i < j} (y_i + 1)y_j. \quad (4.31)$$

Упражнение 4.4. Докажите равенства (4.12).

Упражнение 4.5. Докажите лемму 4.15.

Указание. Рассмотрите сначала случай нулевых сдвижек, а затем сведите общий случай к нему, заметив, что

$$\frac{1}{Nv - \varepsilon} = \frac{1}{N(v - \varepsilon/N)} \sim \frac{1}{Nv}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.32)$$

Упражнение 4.6. Завершите доказательство соотношений (4.26).

5 Последовательности Вершика-Керова и завершение доказательства теоремы Войкулеску

Эта лекция завершает обсуждение теоремы Войкулеску (теорема 2.21). Мы покажем, что для последовательностей сигнатур, удовлетворяющей определенным условиям, предел, о котором идет речь в определении 2.8, существует³³ и имеет нужный вид, как в теореме 2.21. Доказательство того, что других регулярных последовательностей сигнатур не бывает, мы опустим, но дадим некоторые указания и необходимые ссылки.

Однако сначала сделаем одно добавление к предыдущей лекции, касающееся производящей функции сдвинуто-симметрических функций h_k^* .

5.1 Производящая функция $H^*(v)$

Напомним, что у нас есть алгебра сдвинуто-симметрических функций Λ^* , присоединенная градуированная алгебра которой есть Λ (алгебра обычных симметрических функций). В алгебре Λ есть однородные образующие h_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) — полные симметрические функции. Мы рассматривали «поднятия» h_k в алгебру Λ^* — сдвинуто-симметрические функции h_k^* , которые определялись формулой (4.11). После чего мы без доказательства сказали, что производящая функция для h_k^* ,

$$H^*(v; y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*(y)}{v \downarrow k}, \quad (5.1)$$

имеет вид (предложение 4.11)

$$H^*(v; y) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{v + i}{v - y_i + i}. \quad (5.2)$$

На самом деле, равенства (5.1)–(5.2) можно взять за определение функций $h_k^* \in \Lambda^*$. Тот факт, что h_k^* имеют явный вид (4.11), нам в действительности не потребуется. Нам нужно лишь свойство, что h_k^* суть поднятия h_k , то есть,

$$h_k^* \in \Lambda_{\text{deg} \leq k}^* \quad \text{и} \quad h_k^* \bmod \Lambda_{\text{deg} \leq (k-1)}^* = h_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

³²Без использования предложения 4.11.

³³Такие последовательности сигнатур называются *регулярными*.

А это можно установить, используя лишь (5.1)–(5.2). Действительно, легко проверить, что

$$\log H^*(v; y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^*(y)}{k} v^{-k}, \quad (5.4)$$

где p_k^* — «поднятия» сумм Ньютона p_k , введенные в (3.27)). С другой стороны, в алгебре Λ есть аналогичное тождество [Мак84, Глава I, §2]

$$\log H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k \quad (5.5)$$

(здесь можно считать, что $t = v^{-1}$). Поэтому из того, что p_k^* — «поднятия» p_k , следует аналогичный факт о функциях h_k^* (упражнение 5.1).

5.2 Последовательности разбиений Вершика-Керова

В этом и следующем подразделе мы приведем достаточные условия на последовательность $\lambda(N)$, чтобы она была инфинитезимально-регулярной.³⁴ В данном подразделе мы рассмотрим случай разбиений (неотрицательных сигнатур), а в следующем — общий случай.

Напомним, что (предложение 4.20)

$$H^*(v - \frac{1}{2}; \lambda) = \prod_{i=1}^d \frac{v + b_i}{v - a_i}, \quad (5.6)$$

где $\lambda \in \text{Part}$ (то есть, λ является разбиением, а не сигнатурой) интерпретируется как диаграмма Юнга, и $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ — (модифицированные) координаты Фробениуса диаграммы λ . Обозначим правую часть этого равенства через $\Phi(v; \lambda)$. Имеем

$$\log \Phi(v; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(a; -b)}{k} v^{-k}, \quad (5.7)$$

где

$$p_k(a; -b) := \sum_{i=1}^d a_i^k - \sum_{i=1}^d (-b_i)^k \quad (5.8)$$

— суперсуммы Ньютона от координат Фробениуса $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$.

Определение 5.1. Последовательность разбиений $\{\lambda(N)\}$ называется *последовательностью Вершика-Керова*, если выполнены следующие условия:

$$\frac{a_i(N)}{N} \rightarrow \alpha_i, \quad \frac{b_i(N)}{N} \rightarrow \beta_i, \quad \frac{|\lambda(N)|}{N} \rightarrow \delta, \quad (5.9)$$

где $a_i(N)$ и $b_i(N)$ — координаты Фробениуса $\lambda(N)$.

Ясно, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0$, а также что $\sum_i (\alpha_i + \beta_i) \leq \delta$. Положим $\gamma := \delta - \sum_i (\alpha_i + \beta_i)$, и $\gamma \geq 0$. Пример 4.23 показывает, что γ не обязательно должно быть нулем (хотя соответствующие величины до предела равны нулю).

Напомним, что инфинитезимальная регулярность последовательности разбиений $\{\lambda(N)\}$ эквивалентна тому, что для всех k величины $h_k^*(\lambda(N))/N^k$ имеют предел при $N \rightarrow \infty$. Лемма 4.15 показывает, что это то же самое, что сходимость³⁵ производящих функций $H^*(Nv; \lambda(N))$ (или, что эквивалентно, производящих функций $\Phi(Nv; \lambda(N))$, так как $\Phi(v) = H^*(v - \frac{1}{2})$).

³⁴Определение 4.1.

³⁵Покоэффициентная, то есть, в смысле определения 4.14.

Теорема 5.2. Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность разбиений Вершика-Керова (определение 5.1). Тогда имеет место покоэффициентная сходимость степенных рядов

$$\Phi(Nv; \lambda(N)) \rightarrow e^{\gamma t} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i t}{1 - \alpha_i t}, \quad t := \frac{1}{v}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

Доказательство. Если прологарифмировать $\Phi(Nv; \lambda(N))$, это не испортит покоэффициентной сходимости (упражнение 5.2). Имеем

$$\log \Phi(Nv; \lambda(N)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(a(N); -b(N)) t^k}{N^k k}, \quad (5.11)$$

где $t = 1/v$.

Первое слагаемое в этой сумме (коэффициент при v в первой степени), очевидно, имеет предел:

$$\frac{p_1(a(N); -b(N))}{N} = \frac{|\lambda(N)|}{N} \rightarrow \delta, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.12)$$

Если же $k \geq 2$, то сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_i}{N} \right)^k + (-1)^{k-1} \left(\frac{b_i}{N} \right)^k \right) \quad (5.13)$$

равномерна по N .³⁶ Действительно, так как

$$\sum_i \frac{a_i}{N} + \sum_i \frac{b_i}{N} = \frac{|\lambda(N)|}{N} \leq \delta + 1 \quad (5.14)$$

для всех достаточно больших N и последовательности a_i и b_i убывают, то легко видеть, что

$$\frac{a_i}{N} \leq \frac{\delta + 1}{i}, \quad \frac{b_i}{N} \leq \frac{\delta + 1}{i}, \quad (5.15)$$

и поэтому ряд (5.13) сходится равномерно при любом $k \geq 2$.³⁷

Поэтому мы можем переставить предел по N и суммирование по i в (5.10), и получить

$$\log \Phi(Nv; \lambda(N)) \rightarrow \delta t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k(\alpha; -\beta)}{k} t^k, \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

где $t = 1/v$. Заменяя δ на $\gamma + \sum_i (\alpha_i + \beta_i)$ и вспоминая определение (5.8) суперсумм Ньютона $p_k(\alpha; -\beta)$, получим искомое утверждение теоремы. \square

5.3 Последовательности сигнатур

Теперь приведем достаточное условие инфинитезимальной регулярности последовательности сигнатур в общем случае (когда у них уже могут быть отрицательные координаты). Напомним (см. начало §4.5), что сигнатуру λ длины N удобно интерпретировать как пару разбиений λ^+ и λ^- , которые удовлетворяют дополнительному условию $\ell(\lambda^+) + \ell(\lambda^-) \leq N$. При этом разбиение λ^+ содержит в себе все положительные координаты λ , а λ^- — все отрицательные части λ , прочитанные в обратном порядке, нулевые координаты в λ при этом выкидываются. Таким путем можно свести случай общих сигнатур к случаю неотрицательных сигнатур. Этот прием, по-видимому, хорошо работает только на уровне производящих функций элементов $h_k^* \in \Lambda^*$, и становится ощутимо более сложным на уровне «индивидуальных» функций h_k^* .

³⁶Хотя при каждом фиксированном N этот ряд представляет собой конечную сумму, но количество слагаемых в ней может расти. Именно поэтому нам нужна равномерная сходимость.

³⁷Дополнительное условие $|\lambda(N)|/N \rightarrow \delta$ как раз возникает из-за того, что для $k = 1$ подобное рассуждение о равномерной сходимости не проходит.

Лемма 5.3. Пусть $\lambda \in \text{Sign}(N)$, $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$, где λ^+ и λ^- — диаграммы Юнга. Тогда

$$H^*(v; \lambda) = H^*(v; \lambda^+)H^*(-v - N - 1; \lambda^-). \quad (5.17)$$

Отметим, что к левой части формула из предложения 4.20 неприменима, и эта левая часть может определяться по формуле (5.1) или (5.2).

Доказательство. Запишем

$$H^*(v; \lambda) = \prod_{i=1}^N \frac{v+i}{v-\lambda_i+i}. \quad (5.18)$$

Отметим, что если $\lambda_i = 0$, то числитель и знаменатель сокращаются. Положим $l^+ = \ell(\lambda^+)$, $l^- = \ell(\lambda^-)$. Тогда $\lambda = (\lambda_1^+, \dots, \lambda_{l^+}^+, 0, \dots, 0, -\lambda_1^-, \dots, -\lambda_{l^-}^-)$, и

$$H^*(v; \lambda) = \prod_{i=1}^{l^+} \frac{v+i}{v-\lambda_i^++i} \prod_{j=1}^{l^-} \frac{v+(N+1-j)}{v+\lambda_j^-+(N+1-j)}, \quad (5.19)$$

где во втором произведении мы сделали замену $i = N + 1 - j$. \square

Ясно, что для функций $\Phi(v; \lambda)$ (определенных в §5.2) эта лемма переписывается так:

$$\Phi(v; \lambda) = \Phi(v; \lambda^+)\Phi(-v - N; \lambda^-). \quad (5.20)$$

Теперь можно сформулировать достаточное условие инфинитезимальной регулярности последовательности сигнатур (не обязательно неотрицательных).

Теорема 5.4. Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$. Пусть $\lambda(N) = (\lambda^+(N); \lambda^-(N))$ для всех N , и пусть каждая из последовательностей $\{\lambda^+(N)\}$ и $\{\lambda^-(N)\}$ является последовательностью разбиений Вершика-Керова (определение 5.1). Тогда

$$\Phi(Nv; \lambda(N)) \rightarrow e^{\gamma^+t + \gamma^-t'} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+ t}{1 - \alpha_i^+ t} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^- t'}{1 - \alpha_i^- t'}. \quad (5.21)$$

Здесь $v = t^{-1}$, а t' — такое, что $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = -1$, и $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$ — параметры из определения 5.1 соответственно для последовательностей разбиений $\{\lambda^+(N)\}$ и $\{\lambda^-(N)\}$.

Доказательство. По лемме 5.3:

$$\Phi(Nv; \lambda(N)) = \Phi(Nv; \lambda^+(N))\Phi(N(-v-1); \lambda^-(N)). \quad (5.22)$$

Положим $v' := -v - 1$, тогда $(v')^{-1} = t'$. Все остальное вытекает из предыдущей теоремы для случая разбиений (теорема 5.2). \square

5.4 Инфинитезимальная сходимость нормированных характеров

В этом и следующем подразделе мы покажем, что (2.32) — действительно экстремальные характеры группы $U(\infty)$ (см. теорему Войкулеску 2.21 и предшествующее ей обсуждение), и явно укажем последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$, для которых нормированные характеры $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ сходятся к (2.32). Тот факт, что формула (2.32) дает все экстремальные характеры группы $U(\infty)$, мы не доказываем, однако ниже мы дадим указания и необходимые ссылки.

Таким образом, мы хотим показать, что для последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ ($\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$), такой что $\{\lambda^+(N)\}$ и $\{\lambda^-(N)\}$ — последовательности разбиений Вершика-Керова, нормированные характеры

$$\tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) \quad (5.23)$$

сходятся *равномерно* (при каждом фиксированном n и $N \rightarrow \infty$) к функции вида $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$ на торе \mathbb{T}^n , где $x_i = u_i - 1$ и

$$\Psi(t) := e^{\gamma^+ t + \gamma^- t'} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+ t}{1 - \alpha_i^+ t} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^- t'}{1 - \alpha_i^- t'}. \quad (5.24)$$

Здесь $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = -1$ и $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$ — предельные параметры для последовательностей сигнатур $\{\lambda^\pm(N)\}$ (см. определение 5.1).

В этом подразделе мы докажем (с помощью теоремы 5.4) инфинитезимальную сходимость, а в следующем подразделе мы получим из нее равномерную.

С помощью биномиальной формулы (3.5) можно записать (см. (3.20)):

$$\tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq n} \frac{s_\mu^*(\lambda(N)) s_\mu(x_1, \dots, x_n)}{(N)_\mu}, \quad (5.25)$$

где $u_i = 1 + x_i$, и $(N)_\mu$ определено формулой (3.18).³⁸ Инфинитезимальную сходимость нормированных характеров $\tilde{s}_{\lambda(N)}$, можно сформулировать так:

Теорема 5.5. Пусть $\{\lambda(N)\}$, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$ — последовательность сигнатур, такая что $\{\lambda^\pm(N)\}$ — последовательности разбиений Вершика-Керова с параметрами $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$.

Тогда для каждого фиксированного n и $\mu \in \text{Part}$ с $\ell(\mu) \leq n$ выполняется сходимость

$$\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{(N)_\mu} \rightarrow [s_\mu] \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.26)$$

Здесь Ψ определено по формуле (5.24).

Замечание 5.6. (1) Правая часть (5.26) не зависит от x_1, \dots, x_n и представляет собой коэффициент при s_μ в $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$. Выражение $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$ — это формальный степенной ряд по x_1, \dots, x_n ,³⁹ который, кроме того, симметричен по x_1, \dots, x_n , и поэтому его можно разложить в сумму по функциям Шура, и взять коэффициент, который получится при s_μ . Ср. это рассуждение с началом §3.3.

(2) Сходимость, которую утверждает теорема 5.5 — это сходимость формальных степенных рядов $\tilde{s}_{\lambda(N)}(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ к формальному степенному ряду $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$, которую мы и называем *инфинитезимальной сходимостью нормированных характеров*.

До конца этого подраздела мы доказываем теорему 5.5.

Определение 5.7. Алгебру симметрических функций Λ можно рассматривать как алгебру полиномов от бесконечного числа переменных. В качестве этих переменных можно брать любую систему образующих алгебры Λ , например, $\{p_k\}$, $\{e_k\}$ или $\{h_k\}$. Мы будем говорить об образующих $\{h_k\}$, то есть, $\Lambda = \mathbb{C}[h_1, h_2, \dots]$.

(Комплексной) специализацией ψ алгебры Λ будем называть гомоморфизм

$$\psi: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi: h_k \mapsto \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.27)$$

где $\psi_k \in \mathbb{C}$ — произвольные комплексные числа.⁴⁰ Определенное на $\{h_1, h_2, \dots\}$, это отображение продолжается на всю алгебру Λ , и дает гомоморфизм $\psi: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$. См. также обсуждение перед предложением 4.2.

³⁸ Нам требуется лишь свойство, что $(N)_\mu \sim N^{|\mu|}$ при $N \rightarrow \infty$.

³⁹ Так как функция $\Psi(t)$ — формальный степенной ряд по t . Отметим, что он начинается с единицы (то есть, $\Psi(0) = 1$). Кроме того, $\Psi(u-1)$ является аналитической функцией на окружности \mathbb{T}^1 , но это нам пока не нужно.

⁴⁰ В этом состоит отличие от специализации алгебры Λ путем присваивания естественным переменным x_1, x_2, \dots каких-либо значений, ведь тогда необходимо требовать, чтобы все симметрические функции были корректно определены.

Другими словами, можно взять любой формальный степенной ряд, начинающийся с единицы (к комплексными коэффициентами) $A(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$, и задать специализацию алгебры Λ как $\psi: H(t) \rightarrow A(t)$. Например, в качестве этого ряда $A(t)$ можно взять функцию $\Psi(t)$, заданную (5.24).

Пример 5.8. Самая естественная специализация состоит в том, чтобы взять переменные алгебры симметрических функций x_1, x_2, \dots, x_m в некотором конечном числе, и приписать им произвольные значения. Разумеется, эту же специализацию можно задать и на образующих h_k как в определении 5.7. Обратное, однако, неверно (упражнение 5.3).

Докажем важное тождество в алгебре симметрических функций, которое затем будем специализировать.

Предложение 5.9 (формула Коши). *Пусть x_1, \dots, x_N и y_1, \dots, y_N — формальные переменные. Рассмотрим производящие функции*

$$H(y; x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(y) x_i^k, \quad (5.28)$$

где $i = 1, \dots, N$ и x_i считается параметром. Тогда

$$H(y; x_1) \dots H(y; x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} s_{\mu}(y_1, \dots, y_N) s_{\mu}(x_1, \dots, x_N). \quad (5.29)$$

Доказательство. Заметим, что

$$H(y; x_i) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j}, \quad (5.30)$$

поэтому нам надо доказать, что

$$\prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} s_{\mu}(y_1, \dots, y_N) s_{\mu}(x_1, \dots, x_N). \quad (5.31)$$

Домножая обе части на произведение определителей Вандермонда $V_N(x_1, \dots, x_N) V_N(y_1, \dots, y_N)$, получим

$$V_N(x_1, \dots, x_N) V_N(y_1, \dots, y_N) \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} a_{\mu+\delta}(y_1, \dots, y_N) a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_N), \quad (5.32)$$

где $a_{\mu+\delta}$ — альтернант (см. (1.9)–(1.10)).

Теперь предложение вытекает из следующей формулы для *определителя Коши*:

$$\det \left[\frac{1}{1 - x_i y_j} \right]_{i,j=1, \dots, N} = V_N(x_1, \dots, x_N) V_N(y_1, \dots, y_N) \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (5.33)$$

(упражнение 5.4), если заметить, что

$$\sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} a_{\mu+\delta}(y_1, \dots, y_N) a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_N) = \det \left[\frac{1}{1 - x_i y_j} \right]_{i,j=1, \dots, N} \quad (5.34)$$

(упражнение 5.5). □

Замечание 5.10. В [Мак84, Глава I, §4] формула Коши доказывается с помощью формулы Якоби-Труди, которая в свою очередь имеет вид

$$s_\mu = \det [h_{\mu_i - i + j}], \quad (5.35)$$

где $\mu \in \text{Part}$, h_1, h_2, \dots — полные симметрические функции, $h_0 = 1$, $h_{-1} = h_{-2} = \dots = 0$, а порядок детерминанта может быть любым, не меньшим, чем $\ell(\mu)$.

Следствие 5.11. Пусть $\Psi(x)$ — произвольный формальный степенной ряд со свободным членом 1 и $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ — специализация, определенная условием $\psi : H(x) \rightarrow \Psi(x)$. Тогда для любого $n = 1, 2, \dots$ и любого разбиения μ с $\ell(\mu) \leq n$

$$\psi(s_\mu) = [s_\mu] \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n).$$

Доказательство. Предполагая $N \geq n$, положим в формуле Коши $x_{n+1} = \dots = x_N = 0$. Тогда получим

$$s_\mu(y) = [s_\mu] H(y; x_1) \dots H(y; x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_N),$$

где в правой части имеется в виду коэффициент при $s_\mu(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку N может быть сколь угодно велико, отсюда следует тождество в алгебре Λ

$$s_\mu = [s_\mu] H(x_1) \dots H(x_n).$$

Применяя к обеим частям ψ , получаем требуемое. \square

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы 5.5. Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур, удовлетворяющая условиям теоремы. Мы знаем из теоремы 5.4, что для всех $k = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\frac{h_k^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow [t^k] \Psi(t), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.36)$$

где в правой части стоит коэффициент при t^k в $\Psi(t)$, а $\Psi(t)$ определяется по формуле (5.24). Пусть ψ — специализация алгебры Λ , такая что

$$\psi : h_k \rightarrow [t^k] \Psi(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

Другими словами, $\psi : H(t) \rightarrow \Psi(t)$.

Тогда (см. §4.1) для любого фиксированного разбиения μ ,

$$\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{N^{|\mu|}} \rightarrow \psi(s_\mu), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.38)$$

Отсюда следует

$$\sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq n} \frac{s_\mu^*(\lambda(N)) s_\mu(x_1, \dots, x_n)}{N^{|\mu|}} \rightarrow \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq n} \psi(s_\mu) s_\mu(x_1, \dots, x_n), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.39)$$

Здесь имеется в виду покоэффициентная сходимость формальных степенных рядов (определение 4.14), поэтому суммирование по μ законно.

С другой стороны, следствие 5.11 говорит, что правая часть совпадает с $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$. Это завершает доказательство теоремы 5.5.

5.5 Равномерная сходимость нормированных характеров

Теперь мы перейдем к доказательству равномерной сходимости нормированных характеров $\tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ к $\Psi(u_1 - 1) \dots \Psi(u_n - 1)$ на торе \mathbb{T}^n , где $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур как в теореме 5.4, а Ψ определяется по формуле (5.24). Равномерная сходимость выводится из инфинитезимальной (теорема 5.5) и из общих теорем о слабой сходимости мер, на которые мы будем ссылаться. Их можно найти, например, в [Шир07].

Обозначим

$$f_N(u_1, \dots, u_n) := \tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1), \quad f(u_1, \dots, u_n) := \Psi(u_1 - 1) \dots \Psi(u_n - 1). \quad (5.40)$$

Заметим, что f_N представляют собой преобразования Фурье вероятностных мер на решетке \mathbb{Z}^n . А именно, функция Шура $s_{\lambda(N)}$ разлагается по мономам вида $u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n}$, $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, с неотрицательными коэффициентами (см. §1.6), и поэтому можно рассмотреть меру

$$M_N := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_m}{s_{\lambda}(1, \dots, 1)} \delta_m, \quad (5.41)$$

где коэффициенты $c_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определяются из условия $s_{\lambda(N)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m u^m$, а δ_m — дельта-мера в точке $m \in \mathbb{Z}^n$. То, что мера M_N вероятностная, следует из нормировки $f_N(1, \dots, 1) = 1$.

Для мер на решетке выполнено следующее свойство:

Предложение 5.12. *Последовательность вероятностных мер M_N на решетке \mathbb{Z}^n слабо сходится к некоторой вероятностной мере M на \mathbb{Z}^n при $N \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда преобразования Фурье мер M_N (а это функции на торе \mathbb{T}^n) сходятся равномерно к преобразованию Фурье меры M .*

Та инфинитезимальная сходимость, которую мы установили в теореме 5.5, равносильна сходимости всех моментов мер M_N при $N \rightarrow \infty$.⁴¹ Пользуясь неравенством Чебышева, можно показать (упражнение 5.6), что семейство мер $\{M_N\}$ *плотно*, то есть, для всякого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset \mathbb{Z}^n$ (в нашем случае это просто конечное множество), для которого

$$M_N(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall N = 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

По теореме Прохорова, существует подпоследовательность $\{N_k\}$, такая что меры M_{N_k} сходятся к некоторой вероятностной мере M . Опять-таки с помощью неравенства Чебышева проверяется, что пределы моментов мер M_N совпадают с соответствующими моментами меры M .

Далее, мы знаем, что функция $f(u_1, \dots, u_n)$ является вещественно-аналитической на \mathbb{T}^n , то есть, однозначно определяется своими коэффициентами Тейлора в нуле. Поэтому мера M однозначно определяется своими моментами. Значит, M не зависит от выбора подпоследовательности в M_N (так как у любой подпоследовательности моменты сходятся к одним и тем же величинам), и таким образом, меры M_N слабо сходятся к M . Это, в свою очередь, влечет равномерную сходимость преобразований Фурье $f_N \rightrightarrows f$.

Таким образом, мы доказали достаточное условие регулярности последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ и показали, что функции, выписанные в теореме 2.21, действительно являются экстремальными характерами группы $U(\infty)$.

5.6 Об обратной теореме

Здесь мы дадим краткие пояснения, как доказывать, что формулы в теореме 2.21 действительно описывают *все* экстремальные характеры. Подробно об этом написано в [Око97] и [ОО98].

⁴¹Стоит отметить, что пока мы не знаем ничего о существовании предельной меры!

Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$, такая, что нормированные характеры $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ сходятся в смысле определения 2.7 к некоторой функции χ на финитном бесконечномерном торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$. Наша задача — показать, что функция χ имеет вид (2.32)–(2.33). Ключевое соображение состоит в том, чтобы, показав, что величины $|\lambda^\pm(N)|$ имеют не более, чем линейный рост. Действительно, тогда можно выделить подпоследовательность, по которой величины $|\lambda^\pm(N)|/N$ сходятся. Далее, ясно, что все $a_i^\pm(N)$ и $b_i^\pm(N)$ (координаты Фробениуса) также имеют не более, чем линейный рост,⁴² а значит, можно выбрать подпоследовательность, по которой и все величины $a_i^\pm(N)/N$ и $b_i^\pm(N)/N$ также будут иметь предел, и тогда можно будет воспользоваться прямой теоремой Войкулеску, которую мы уже доказали.

Таким образом, главная цель — показать, что последовательность $|\lambda^\pm(N)|$ не может расти слишком быстро.

Окуньков [Око97] показал, что это можно вывести из нетривиального свойства конечномерных характеров, т.н. *log-вогнутости*. На самом простом примере оно состоит в следующем. Рассмотрим разложение

$$\frac{s_\lambda(u, 1, \dots, 1)}{s_\lambda(1, \dots, 1)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) u^m. \quad (5.43)$$

Тогда последовательность $\{c(m)\}$ *log-вогнута* в том смысле, что

$$c(m-1)c(m+1) \leq c(m)^2. \quad (5.44)$$

На самом деле, в [Око97] установлен много более общий результат, повлекший за собой ряд дальнейших исследований.

Другой способ, который можно назвать *методом второго–четвертого момента*, изложен в [ОО98]. Его достоинство в том, что он допускает более простое доказательство и (в отличие от метода [Око97]) работает и в более общей ситуации, рассматриваемой в [ОО98].

Этот второй способ основан на следующем утверждении ([ОО98, Lemma 5.2]):

Лемма 5.13. *Предположим, что последовательность вероятностных мер на \mathbb{Z} плотна, все меры имеют конечные четвертые моменты, и при этом вторые моменты стремятся к бесконечности. Тогда четвертые моменты растут быстрее, нежели квадраты вторых моментов.*

Пусть теперь $\{\lambda(N)\}$, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$ — последовательность сигнатур и M_N — соответствующие вероятностные меры на \mathbb{Z} . Обозначим через $E_2(N)$ и $E_4(N)$ соответственно последовательности вторых и четвертых моментов мер M_N . Предположим, что последовательность сигнатур $\{\lambda(N)\}$ такова, что (возможно, по некоторой подпоследовательности)

$$\frac{|\lambda^+(N)| + |\lambda^-(N)|}{N} \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.45)$$

Тогда можно показать, что $E_2(N)$ также стремится к бесконечности, но при этом отношение $E_4(N)/(E_2(N))^2$ остается ограниченным. В силу леммы, семейство $\{M_N\}$ не плотно и, значит, меры M_N не имеют слабого предела, то есть характеры заведомо не имеют равномерного предела даже на окружности.

5.7 Упражнения

Упражнение 5.1. Докажите, что h_k^* суть поднятия h_k (то есть, завершите рассуждения §5.1).

Упражнение 5.2. Покажите, что покоеэффициентная сходимость (в смысле определения 4.14) степенных рядов эквивалентна покоеэффициентной сходимости их логарифмов.

⁴²Так как $\sum(a_i^\pm(N) + b_i^\pm(N)) = |\lambda^\pm(N)|$ и все $a_i^\pm(N)$ и $b_i^\pm(N)$ неотрицательны.

Упражнение 5.3. Покажите, что специализацию алгебры Λ (см. определение 5.7), состоящую в том, что $\psi(h_k) = 1/k!$ для всех $k \geq 1$, нельзя задать «естественным» образом, как в примере 5.8. Эта специализация Λ имеет большое значение, ее можно назвать *специализацией Планшереля*.

Упражнение 5.4. Докажите формулу (5.33) для определителя Коши.

Указание. Можно заметить, что

$$\det \left[\frac{1}{1 - x_i y_j} \right] \cdot \prod_{i,j=1}^N (1 - x_i y_j) \quad (5.46)$$

— кососимметрический многочлен по x_1, \dots, x_N и по y_1, \dots, y_N , поэтому он делится на $V_N(x)V_N(y)$. Кроме того, его степень равна $N(N-1)$, поэтому в результате деления может получиться только константа. Можно понять, что она равна единице.

Упражнение 5.5. Завершите доказательство формулы Коши (предложение 5.9).

Упражнение 5.6. Покажите, что если семейство вероятностных мер $\{M_N\}$ на полупрямой имеет равномерно ограниченные первые моменты, то это семейство является плотным.

6 Тотальная положительность

В предыдущих лекциях мы обсуждали теорему 2.21, дающую описание всех экстремальных характеров бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$. Согласно этой теореме, все экстремальные характеры $U(\infty)$ имеют вид (2.32)–(2.33). Теорема 2.21 была высказана Войкулеску в работе 1978 г. Но за 30 лет до того, в 1948 году, та же самая формула появилась у Шёнберга (Schoenberg) в совершенно ином контексте: тотальная положительность матриц (Войкулеску об этом явно не знал).⁴³ Само понятие тотальной положительности возникло еще в начале XX в. Шёнберг сформулировал некоторую гипотезу, решение которой было дано Эдреи (Edrei) в 1953 г. [Edr53]. В этой лекции мы обсудим работу Шёнберга, а в следующей — покажем, как связана тотальная положительность с теорией представлений.

6.1 Определение и примеры

Определение 6.1. Пусть $X = [X_{ij}]$ — матрица над \mathbb{R} (конечная или бесконечная). Пусть $I = \{i_1 < \dots < i_n\}$ и $J = \{j_1 < \dots < j_n\}$ — два конечных набора индексов. Матрица $X_{IJ} := [X_{i_k, j_l}]_{k, l=1, \dots, n}$ называется *подматрицей* матрицы X . Ее определитель $|X_{IJ}|$ называется *минором* матрицы X . Если будет нужно, мы будем говорить « IJ -подматрица» и « IJ -минор», соответственно.

Определение 6.2. Матрица X называется *тотально положительной* (обозначается $X \in (TP)$), если $|X_{IJ}| \geq 0$ для всех конечных наборов I, J (одинакового размера). Другими словами, все миноры всех порядков матрицы X должны быть неотрицательны.

Пример 6.3. Например, для матрицы размера 2×2 , $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, условие тотальной положительности означает, что $a, b, c, d \geq 0$ и $ad - bc \geq 0$.

Приведем несколько более сложных примеров тотально положительных матриц.

⁴³Термин «тотальная положительность» представляет собой кальку с английского «total positivity». Перевести этот термин как «полная положительность» мешает то обстоятельство, что в теории операторных алгебр существует понятие «complete positivity», имеющее другой смысл.

Пример 6.4. 1. Пусть $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $1 > x_1 \geq \dots \geq x_N \geq 0$ и $1 > y_1 \geq \dots \geq y_N \geq 0$, тогда матрица

$$X_{ij} = \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (6.1)$$

порядка N является totally положительной (см. упражнение 6.1).

2. Пусть $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $x_1 \geq \dots \geq x_N > 0$ и $y_1 \geq \dots \geq y_N > 0$, тогда матрица

$$X_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j} \quad (6.2)$$

порядка N является totally положительной (см. упражнение 6.1).

3. Пусть $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $x_1 \geq \dots \geq x_N$ и $y_1 \geq \dots \geq y_N$, тогда матрица

$$X_{ij} = e^{x_i y_j} \quad (6.3)$$

порядка N является totally положительной (см. упражнение 6.2).

Приведем два свойства totally положительных матриц.

Предложение 6.5. Если X — невырожденная totally положительная матрица конечного порядка, то матрица Y , определяемая как $Y_{ij} = (-1)^{i+j} (X^{-1})_{ij}$, также является totally положительной.

Доказательство. Упражнение 6.3. □

Предложение 6.6. Если $X, Y \in (TP)$ — матрицы конечного порядка, то их произведение $XY \in (TP)$.⁴⁴

Доказательство. Это следует из формулы для вычисления минора произведения двух матриц (упражнение 6.4):

$$|(XY)_{IJ}| = \sum_{K: \#K=\#I} |X_{IK}| \cdot |Y_{KJ}|. \quad (6.4)$$

Здесь I и J — конечные подмножества индексов одинакового размера. □

Более подробно о totally положительных матрицах можно прочитать в книгах [ГК50] и [Кар68].

6.2 Тотальная положительность и графы

В этом подразделе мы введем полезный комбинаторный формализм, который позволяет доказывать тотальную положительность матриц. Здесь мы будем говорить только о матрицах конечного порядка.

Пусть $\Gamma = (V, E, w)$ — оснащенный ориентированный граф с вершинами V , ребрами $E \subset V \times V$ и оснащением $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (другими словами, каждому ребру приписывается неотрицательный вес). Мы предполагаем, что граф не имеет кратных ребер.

Через P будем обозначать ориентированные пути по ребрам графа, через $w(P) := \prod_{e \in P} w(e)$ — вес пути P . Обозначим через $\text{Path}(v', v'')$ множество всех (ориентированных) путей от вершины v' до вершины v'' . Предположим, что

(C1) Для любых двух вершин v' и v'' число путей от v' к v'' конечно.

⁴⁴Что означает, что множество totally положительных матриц фиксированного порядка образует полугруппу.

Отметим, что это условие запрещает циклы и петли в графе Γ .

Определение 6.7. Пусть есть два упорядоченных конечных набора вершин одинакового размера n :

$$V' = \{v'_1, \dots, v'_n\} \subset V, \quad V'' = \{v''_1, \dots, v''_n\} \subset V. \quad (6.5)$$

С набором (V, V', V'', E, w) можно связать матрицу X порядка n следующим образом:

$$X_{ij} := \sum_{P \in \text{Path}(v'_i, v''_j)} w(P). \quad (6.6)$$

В силу условия (C1), это определение корректно.

По определению детерминанта,

$$|X| = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(s) X_{1,s(1)} \dots X_{n,s(n)} = \sum_{P_1, \dots, P_n} \text{sgn}(P_1, \dots, P_n) w(P_1) \dots w(P_n), \quad (6.7)$$

где вторая сумма ведется по всем наборам путей P_1, \dots, P_n , таких, что начало каждого пути P_i лежит в V' , а конец — в V'' , при этом пути (P_1, \dots, P_n) осуществляют биекцию между V' и V'' . Знак $\text{sgn}(P_1, \dots, P_n)$ означает знак перестановки, которая соответствует этой биекции (напомним, что элементы V' и V'' пронумерованы). Обозначим множество таких наборов путей через \mathcal{P} , а набор (P_1, \dots, P_n) для краткости будем обозначать через \vec{P} . Также через $\mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}$ обозначим подмножество таких наборов путей \vec{P} , что каждые два пути P_i и P_j из \vec{P} не пересекаются (по вершинам).

Лемма 6.8. В обозначениях, введенных выше, имеем

$$|X| = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}). \quad (6.8)$$

Эта лемма была неоднократно доказана разными авторами, ее связывают с именами Lingström, Gessel–Viennot и Karlin–McGregor.

Доказательство. Доказательство будем вести *методом инволюции*. Мы знаем, что

$$|X| = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}) = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}) + \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}). \quad (6.9)$$

Чтобы доказать, что последняя сумма равна нулю, достаточно предъявить инволюцию

$$*: \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ \rightarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ, \quad \vec{P} \mapsto \vec{P}^*, \quad (6.10)$$

такую, что

- $w(\vec{P}^*) = w(\vec{P})$;
- $\text{sgn}(\vec{P}^*) = -\text{sgn}(\vec{P})$.

Эта инволюция строится следующим образом. Пусть $\vec{P} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ$. Это значит, что какие-то два пути из \vec{P} пересекаются. Пусть i — минимальный индекс, такой что путь P_i пересекается с каким-то другим путем из \vec{P} . Пусть v — первая точка пересечения пути P_i с другим путем, и пусть j — минимальный номер (большой, чем i) из всех номеров путей P_1, \dots, P_n , которые проходят через точку v . Этими условиями номера i и j , а также точка v , определены однозначно. Инволюция $*$ по определению состоит в перестановке «хвостов» путей P_i и P_j после точки v , как показано на рис. 7. Ясно, что $*$ удовлетворяет нашим двум условиям, и поэтому лемма доказана. \square

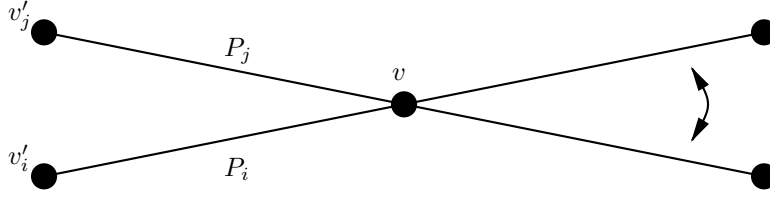


Рис. 7: Инволюция *.

Замечание 6.9. Отметим, что лемма 6.8 носит чисто алгебраический характер и условие $w(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ для нее не требуется. Однако с этого момента требование $w(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ будет нам необходимо.

Введем еще одно условие на (V, V', V'', E, w) :

(C2) Если $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$, $P \in \text{Path}(v'_{i_1}, v''_{j_2})$ и $Q \in \text{Path}(v'_{i_2}, v''_{j_1})$, то $P \cap Q \neq \emptyset$.

Предложение 6.10. Пусть $V', V'' \subset V$, $\#V' = \#V'' = N$, и набор (V, V', V'', E, w) удовлетворяет условиям (C1)–(C2). Пусть X — матрица из определения 6.7. Тогда X — totally positive матрица.

Доказательство. Это простое следствие леммы 6.8. Действительно, рассмотрим IJ -минор матрицы X , где $\#I = \#J = n$, и $V'_I \subset V'$, $V''_J \subset V''$. Тогда по лемме 6.8 имеем

$$|X_{IJ}| = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}) \quad (6.11)$$

(здесь \mathcal{P}° определяется по отношению к V'_I и V''_J). Из условия (C2) следует, что все наборы путей $\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ$ сохраняют нумерацию множеств V'_I и V''_J . Поэтому $\text{sgn}(\vec{P}) = +1$ для всех $\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ$, и так как $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, то $|X_{IJ}| \geq 0$, что и требовалось. \square

Это предложение дает мощный способ доказательства тотальной положительности матриц. Рассмотрим один пример.

Пример 6.11. Рассмотрим граф V , изображенный на рис. 8 (здесь $n = 4$, хотя можно рассматривать этот граф для любого n). Все стрелки здесь идут слева направо, и все ребра имеют вес 1. Матрица X для него имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Видно, что эта матрица связана с треугольником Паскаля. Из предложения 6.10 следует, что X — totally positive матрица. То же самое верно и для матрицы любого порядка, построенной по треугольнику Паскаля аналогичным образом.

Также в графе на рис. 8 можно рассматривать другие кратности ребер, и получать много новых примеров totally positive матриц.

Замечание 6.12. Свойство (C2) выполняется, если граф можно нарисовать на плоскости таким образом, что все стрелки направлены вправо, вершины из V' располагаются в вертикальном ряду в порядке номеров (снизу вверх или сверху вниз, неважно), а вершины из V'' расположены аналогичным образом в параллельном ряду справа — как на рис. 8.

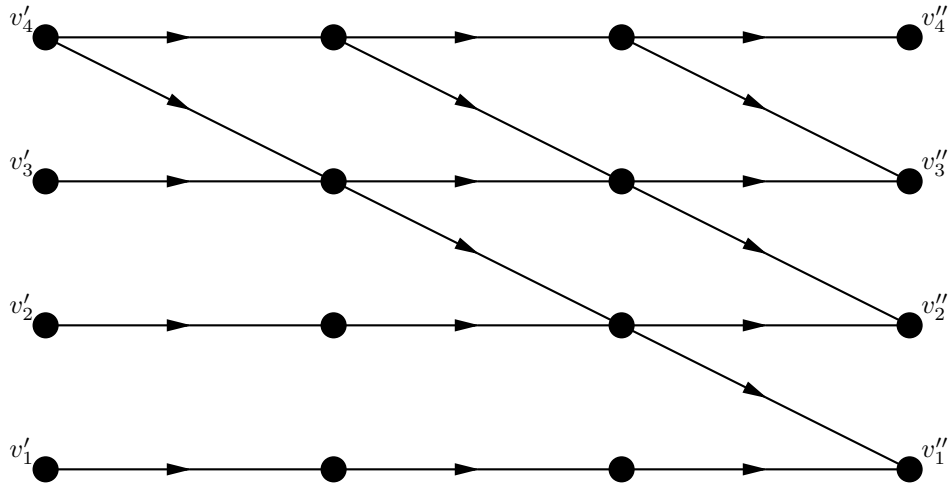


Рис. 8: Граф V .

Замечание 6.13. Пусть есть две totally положительные матрицы X и Y одинакового размера, которые построены по двум графам (скажем, у X начальные вершины V' и конечные V'' в графе Γ_X , а у Y — U' и U'' в графе Γ_Y , и эти два графа не имеют общих вершин).⁴⁵ Произведение матриц XY есть totally положительная матрица, построенная по объединению этих двух графов, которое получается, если отождествить вершины V'' и U' (то есть, v''_i с u'_i , $i = 1, \dots, \#V''$). Легко видеть, что свойство (C2) при этом не нарушается.

6.3 Тёплицевы матрицы

Теперь будем рассматривать бесконечные матрицы, которые имеют следующий специальный вид.

Определение 6.14. Матрица $[X_{ij}]_{i,j \in \mathbb{Z}}$ называется *тёплицевой*, если

$$X_{ij} = M(i - j), \quad i, j \in \mathbb{Z} \quad (6.13)$$

для некоторой функции M на \mathbb{Z} . В матричной форме

$$X = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & M(0) & M(-1) & M(-2) & \ddots \\ \ddots & M(1) & M(0) & M(-1) & \ddots \\ \ddots & M(2) & M(1) & M(0) & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

то есть, элементы матрицы X вдоль каждой диагонали, параллельной главной, постоянны.

Шёнберг в 1948 г. поставил вопрос об описании всех totally положительных тёплицевых матриц.

⁴⁵При этом считаем, что свойство (C2) выполнено.

Замечание 6.15. Вопрос был мотивирован задачей о сглаживании данных. Пусть есть последовательность данных $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, и шаблон $\{M(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$. По данным x и шаблону M строится сглаженная последовательность $y_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{i-j} M(j)$, которая представляет собой свертку $x * M$. Шёнберг показал, что преобразование $x \mapsto y$ при помощи шаблона M не увеличивает числа осцилляций (перемен знака) тогда и только тогда, когда тёплицева матрица $X_{ij} = M(i-j)$ является totally положительной.

Определение 6.16. Последовательность $M(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, для которой тёплицева матрица $X_{ij} = M(i-j)$ является totally положительной, также называется *totalno положительной*.

6.4 log-вогнутость

Пусть $M(n)$ — totally положительная последовательность, тогда $M(n) \geq 0$ для всех n (условие на миноры первого порядка), а также

$$\begin{vmatrix} M(n) & M(n-1) \\ M(n+1) & M(n) \end{vmatrix} \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.15)$$

(условие на миноры второго порядка). Второе условие равносильно log-вогнутости последовательности $M(n)$ (5.44):

$$M(n-1)M(n+1) \leq (M(n))^2. \quad (6.16)$$

Из log-вогнутости $M(n)$ уже вытекают некоторые важные свойства.

Лемма 6.17. 1. Последовательность $M(n) = cR^n$, где $c \geq 0$ и $R > 0$, является totalno положительной.

2. Если $M(n)$ — totalno положительная последовательность, то для всех $c \geq 0$ и $R > 0$ последовательность $M(n) \cdot cR^n$ также является totalno положительной.

Доказательство. Упражнение 6.6. □

Лемма 6.18. Если $M(n)$ — log-вогнутая последовательность, и $M(n) \neq cR^n$, то, заменяя $M(n)$ на $cR^n M(n)$ с подходящими c и R , можно добиться выполнения условия нормировки $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n) = 1$.

Доказательство. Упражнение 6.7. □

Таким образом, исключая тривиальный случай $M(n) = cR^n$, можно считать, что totalno положительная последовательность $M(n)$ является вероятностной мерой на \mathbb{Z} . В дальнейшем мы будем рассматривать только этот случай. Из условия log-вогнутости мы получим ограничения на «хвосты» меры $M(n)$:

Лемма 6.19. Если $M(n)$ — log-вогнутая последовательность, то

$$M(n) \leq C\varepsilon^{|n|} \quad (6.17)$$

для некоторого $0 < \varepsilon < 1$.

Доказательство. Для краткости пусть все $M(n)$ отличны от нуля (если это не так, доказательство можно провести аналогично с незначительными изменениями). Рассмотрим величины $\frac{M(n+1)}{M(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n) = 1$, то все $\frac{M(n+1)}{M(n)}$ не могут быть ≥ 1 . Поэтому существует n , для которого $\frac{M(n+1)}{M(n)} < 1$. Обозначим эту величину для данного n через ε . Тогда из условия log-вогнутости, $\frac{M(n+2)}{M(n+1)} \leq \frac{M(n+1)}{M(n)} = \varepsilon$, и так далее, и мы получаем (6.17) для $n \rightarrow +\infty$. Для $n \rightarrow -\infty$ эту оценку можно получить аналогично. □

6.5 Характеристические функции totally положительных последовательностей

Теперь мы будем рассматривать вероятностные меры $M(n)$ на \mathbb{Z} , обладающие свойством totalной положительности. Напомним, что по определению это означает, что тёплицева матрица $[M(i-j)]_{i,j \in \mathbb{Z}}$ является totally положительной.

Замечание 6.20. Totally положительные меры являются log-вогнутыми (см. §6.4). Если M' и M'' — две totally положительные меры, то в силу леммы 6.19 соответствующие тёплицевы матрицы можно перемножать (несмотря на их бесконечный размер). Это соответствует свертке вероятностных мер

$$(M' * M'')(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} M'(n-k)M''(k). \quad (6.18)$$

Таким образом, totally положительные меры образуют сверточную полугруппу.

Определение 6.21. Вероятностная мера на \mathbb{Z} однозначно задается своей характеристической функцией (см., напр., [Шир07]), которая определяется следующим образом:

$$\psi(u) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u^n M(n), \quad u \in \mathbb{T}^1. \quad (6.19)$$

Ряд $\psi(u)$ сходится в кольце вокруг окружности $\mathbb{T}^1 \subset \mathbb{C}$ и определяет голоморфную функцию в этом кольце.

Свертка мер отвечает произведению характеристических функций.

Замечание 6.22. В литературе для функции $\psi(u)$ (6.19), построенной по вероятностной мере $M(n)$ на \mathbb{Z} , также используется название *Polya frequency function*.

Шёнберг занимался классификацией totally положительных вероятностных мер в терминах их характеристических функций. Сначала рассмотрим два примера totally положительных мер (ср. с §2.5).

Пример 6.23. Пусть M — мера Бернулли:

$$M(n) := \begin{cases} 1 - \beta, & \text{если } n = 0; \\ \beta, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.20)$$

Здесь $0 \leq \beta \leq 1$. Она соответствует тёплицевой матрице вида

$$X = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 1 - \beta & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & \beta & 1 - \beta & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \beta & 1 - \beta & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Ясно, что эта матрица получается из графа, изображенного на рис. 9.⁴⁶ Этот граф удовлетворяет условию (C2) из §6.2, и поэтому мера Бернулли является totally положительной. Характеристическая функция этой меры равна

$$\psi(u) = 1 + \beta(u - 1). \quad (6.22)$$

⁴⁶То, что матрица и граф бесконечны, не имеет значения.

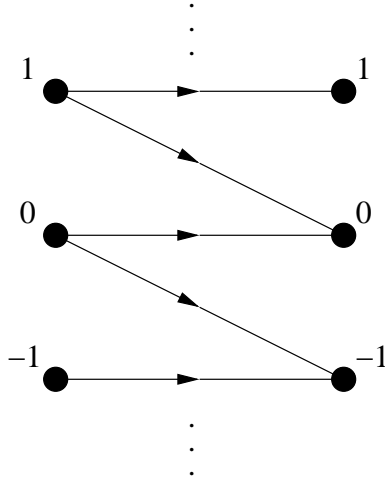


Рис. 9: Граф для тёплицевой матрицы (6.21). Вес каждого горизонтального ребра равен $1 - \beta$, вес каждого наклонного равен β .

Пример 6.24. Пусть теперь M — геометрическое распределение на неотрицательных целых числах:

$$M(n) := \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^n, & \text{если } n \geq 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.23)$$

Здесь $\alpha \geq 0$. Соответствующая M тёплицева матрица получается из графа, изображенного на рис. 10. Он также удовлетворяет условию (C2) из §6.2: это легко проверяется, а можно также, слегка продеформировав картинку, сделать так, чтобы все стрелки смотрели вправо, так что будет выполнены все условия, указанные в замечании 6.12). Поэтому мера M также totally положительна. Ее характеристическая функция равна

$$\psi(u) = \frac{1}{1 - \alpha(u-1)}. \quad (6.24)$$

Замечание 6.25. Замена $u \mapsto u^{-1}$ в характеристической функции $\psi(u)$ означает отражение меры $M(n)$ относительно нуля, что также приводит к totally положительной мере.

С учетом этого замечания, примеров 6.23 и 6.24, и того, что свертка мер соответствует произведению характеристических функций, получаем, что в качестве характеристических функций totally положительных мер могут выступать любые конечные произведения вида

$$\psi(u) = \frac{\prod(1 + \beta_i^+(u-1))}{\prod(1 - \alpha_i^+(u-1))} \cdot \frac{\prod(1 + \beta_i^-(u^{-1}-1))}{\prod(1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1))} \quad (6.25)$$

(ср. это с функцией Войкулеску (2.33)).

Замечание 6.26. Нетрудно понять, что слабые пределы вероятностных мер на \mathbb{Z} (которые соответствуют равномерной сходимости характеристических функций на \mathbb{T}^1) сохраняют totalную положительность.

Рассмотрим последовательность характеристических функций

$$\psi_n(u) := \left(1 + \frac{\gamma}{n}(u-1) \right)^n, \quad \gamma \geq 0. \quad (6.26)$$

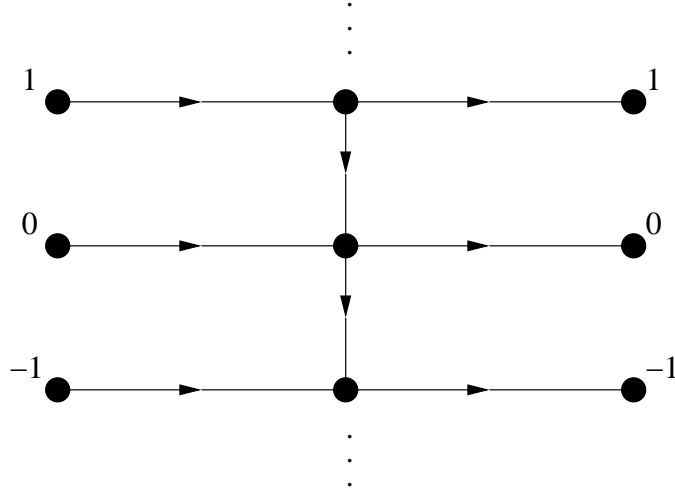


Рис. 10: Граф для тѐплицевой матрицы, соответствующей геометрическому распределению. Вес каждого левого горизонтального ребра равен $\frac{1}{1+\alpha}$, вес каждого правого горизонтального ребра равен единице, а вес каждого вертикального ребра равен $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

Характеристическая функция ψ_n получается в результате свертки n одинаковых характеристических функций меры Бернулли с параметром $\beta_n = \frac{\gamma}{n}$.⁴⁷ При $n \rightarrow \infty$ функции ψ_n сходятся (равномерно на \mathbb{T}^1) к характеристической функции меры Пуассона $e^{\gamma(u-1)}$. См. также упражнение 6.8.

Таким образом, предельными переходами из характеристических функций вида (6.25) можно получить все функции Войкулеску (2.33):

$$\Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(u) = e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)} \right). \quad (6.27)$$

Здесь $\sum \alpha_i^+ + \sum \alpha_i^- + \sum \beta_i^+ + \sum \beta_i^- < \infty$ и $\gamma^\pm \geq 0$.

Шѐнберг выдвинул гипотезу, что таким образом записываются все характеристические функции тотально положительных вероятностных мер.

Замечание 6.27 (Об условии $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$). Условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ возникало, когда мы строили функцию параметры $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$ по регулярной последовательности сигнатур $\lambda(N)$, так что α^\pm и β^\pm — предельные модифицированные координаты Фробениуса разбиений λ^\pm ,⁴⁸ а $\gamma^\pm = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\lambda(N)|}{N} - \sum (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm)$ — предельные «дефекты» сигнатур (см. предыдущую лекцию). Действительно, $\beta_1^\pm = \ell(\lambda^\pm) - \frac{1}{2}$, и $\ell(\lambda^+) + \ell(\lambda^-) \leq N$.

В рассуждении Шѐнберга условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ само собой не возникает, однако (см. упражнение 2.10) его наложение не сужает множество функций. При его выполнении параметры определены однозначно: если $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm, \gamma_1^\pm) \neq (\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm, \gamma_2^\pm)$, то и соответствующие функции Войкулеску (6.27) различны.

Множество параметров

$$\Omega = \left\{ (\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm) : \sum \alpha_i^+ + \sum \alpha_i^- + \sum \beta_i^+ + \sum \beta_i^- < \infty, \gamma^\pm \geq 0, \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1 \right\} \quad (6.28)$$

⁴⁷В теории вероятностей это соответствует суммированию независимых одинаково распределенных величин.

⁴⁸То есть, $\alpha_i^\pm = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_i^\pm(N)}{N}$, $\beta_i^\pm = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_i^\pm(N)}{N}$.

можно вложить в $\mathbb{R}^{4\infty+2}$, и Ω будет замкнутым локально компактным подмножеством в $\mathbb{R}^{4\infty+2}$ (в топологии покоординатной сходимости).

Пространство Ω можно рассматривать как одну из версий дуального объекта к бесконечномерной унитарной группе $U(\infty)$.

Замечание 6.28. Гипотеза Шёнберга была доказана Эдrei [Edr53] в 1953 г. Сам Шёнберг решил аналогичную задачу, в которой \mathbb{Z} заменено на \mathbb{R} . Он рассматривал функции $M(x)$ на \mathbb{R} , для которых $X(x, y) := M(x - y)$ — тотально положительное ядро (все миноры всех порядков неотрицательны). Ответ дается в похожих терминах, но формулировка отличается.

Замечание 6.29. Результат Шёнберга о тотально положительных функциях $M(x)$ можно также сформулировать в терминах теории представлений. Еще одна версия состоит в следующем. Пусть \mathcal{H} — множество всех эрмитовых $\infty \times \infty$ матриц $[A_{ij}]_{i,j=1,2,\dots}$.⁴⁹ На \mathcal{H} действует бесконечномерная унитарная группа $U(\infty)$ по формуле

$$A \mapsto UAU^{-1}, \quad A \in \mathcal{H}, \quad U \in U(\infty). \quad (6.29)$$

Рассмотрим множество $\mathcal{M}(\mathcal{H})^{U(\infty)}$ всех вероятностных мер на \mathcal{H} , инвариантных относительно этого действия. Это выпуклое множество, а его крайние точки как раз параметризуют тотально положительные функции $M(x)$ на \mathbb{R} , из теоремы Шёнберга.⁵⁰

6.6 Упражнения

Упражнение 6.1. Докажите, что матрицы 1 и 2 из примера 6.4 являются тотально положительными.

Указание. Можно заметить, что любая подматрица матрицы X имеет тот же самый вид, что и матрица X . Определитель же матрицы X можно вычислить с помощью определителя Коши (5.33).

Упражнение 6.2. Докажите, что матрица 3 из примера 6.4 является тотально положительной.

Указание. Используйте многочлены Шура (см., напр., §1.2).

Упражнение 6.3. Докажите предложение 6.5.

Упражнение 6.4. Докажите формулу 6.4.

Указание. Ясно, что если $\#I = 1$, то эта формула верна (это определение произведения матриц). Чтобы доказать формулу для $\#I > 1$, возьмем внешние степени матриц X и Y порядка $\#I$, и рассмотрим их произведение. Матричными элементами этого произведения как раз и будут миноры $|(XY)_{IJ}|$.

Упражнение 6.5. Приведите пример \log -вогнутой, но не тотально положительной последовательности (см. §6.4).

Упражнение 6.6. Докажите лемму 6.17.

Указание. Представьте матрицу $[cR^{x_i - y_j}]_{i,j=1,\dots,n}$ (где $x_1 < \dots < x_n$, $y_1 < \dots < y_n$) в виде произведения двух диагональных матриц.

Упражнение 6.7. Докажите лемму 6.18.

Упражнение 6.8. Докажите непосредственно, что мера Пуассона на \mathbb{Z} с характеристической функцией $\psi(u) = e^{\gamma(u-1)}$ является тотально положительной (см. замечание 6.26).

⁴⁹Условие эрмитовости означает, что $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ для всех i, j .

⁵⁰Точка p выпуклого множества называется *крайней*, если она не представляется в виде $p = \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2$, где $0 < \lambda < 1$. В случае $\mathcal{M}(\mathcal{H})^{U(\infty)}$ (и во многих других случаях) крайние точки этого множества также называются *эргодическими мерами*.

7 Тотальная положительность и теория представлений

7.1 Введение

Напомним, что в лекциях 1, 2, 3, 4, 5 мы обсуждали теорему Войкулеску 2.21 о классификации экстремальных характеров группы $U(\infty)$. Экстремальный характер бесконечномерной унитарной группы⁵¹ — это центральная функция χ на группе, а в силу определения 2.1 и замечания 2.2 можно считать, что χ — функция на бесконечномерном финитном торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$.⁵² Из теоремы 2.21 следует, что экстремальные характеры являются мультипликативными функциями на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, то есть, они имеют вид

$$\chi(u_1, u_2, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} \Psi(u_i), \quad (7.1)$$

где $(u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ и $\Psi(u) = \Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(u)$ — функция Войкулеску на \mathbb{T}^1 (2.33), $\Psi(1) = 1$.

Также в лекции 6 мы обсуждали тотально положительные последовательности $M(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ (см. определение 6.16) и задачу их классификации. Рассматривались тотально положительные последовательности, которые нормированы так, чтобы $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n) = 1$ (см. леммы 6.17 и 6.18). Оказалось, что характеристические функции $\psi(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n)u^n$, $u \in \mathbb{T}^1$, таких последовательностей — это в точности функции Войкулеску (2.33).

В этой лекции мы покажем, как задача классификации тотально положительных матриц возникает из теории представлений группы $U(\infty)$. При этом мы будем рассуждать, используя как можно меньше конкретных сведений о функциях Шура и функциях Войкулеску. Приведем краткий план наших рассуждений.

1. Функциональное уравнение для нормированных характеров компактной группы.
2. Асимптотическое функциональное уравнение для экстремальных характеров χ группы $U(\infty)$.
3. Из асимптотического функционального уравнения для χ следует, что χ мультипликативна на торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$:

$$\chi(u_1, u_2, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} \Psi(u_i), \quad (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty.$$

4. Рассмотрим коэффициенты разложения $\Psi(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n)u^n$. Тогда $M(n)$ — тотально положительная последовательность.

Большая часть лекции посвящена обсуждению п. 3.

7.2 Функциональное уравнение для нормированных характеров

Пусть G — компактная группа (в нашем случае это $U(N)$), и T — ее неприводимое конечномерное представление (см. определение 1.12). Без ограничения общности можно считать, что T — унитарное представление, то есть, что все операторы $T(g)$, $g \in G$ унитарны. Нормированный характер представления T — это функция на группе, определяемая как

$$\chi(g) = \frac{\text{Tr } T(g)}{\dim T}, \quad (7.2)$$

⁵¹См. определения 2.7 и 2.8.

⁵²Тор $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ состоит из последовательностей (u_1, u_2, \dots) , $u_i \in \mathbb{T}^1$, в которых лишь конечное число координат отлично от единицы (см. определение 2.6). Тогда $\chi(U) = \chi(u_1, u_2, \dots)$, где $U \in U(\infty)$ и u_1, u_2, \dots — собственные значения матрицы U . Здесь χ обозначает одновременно и функцию на $U(\infty)$, и функцию на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$. Мы не различаем эти объекты. См. также замечание 1.13.

где $\dim T$ — размерность пространства представления T (или, говоря короче, размерность представления T). Характер является центральной функцией.

Нормированные неприводимые характеры группы $U(N)$ — это в точности нормированные многочлены Шура $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N)$, где λ пробегает все сигнатуры длины N (характер мы рассматриваем как функцию на \mathbb{T}^N , см. замечание 1.13). См. также §1.4.

Предложение 7.1 (Функциональное уравнение для нормированных характеров). *Пусть T — неприводимое унитарное конечномерное представление G , χ — его характер, и $g_1, g_2 \in G$. Тогда*

$$\int_{h \in G} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \chi(g_1) \chi(g_2). \quad (7.3)$$

Здесь интегрирование ведется по нормированной мере Хаара на группе G (см. §1.4).

До конца данного подраздела мы доказываем это предложение.

Замечание 7.2. Если группа G коммутативна, то, как известно, все ее неприводимые конечномерные представления одномерны (упражнение 7.1). Нормированные неприводимые характеры χ в этом случае суть гомоморфизмы $\chi: G \rightarrow U(1) = \mathbb{T}^1$, то есть, $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Ясно, что это частный случай предложения 7.1.

Доказательство предложения 7.1 использует известную *лемму Шура*. Сначала дадим следующее определение.

Определение 7.3. Пусть T — конечномерное унитарное представление компактной группы G . *Коммутант* представления T состоит из всех операторов A в пространстве представления, коммутирующих с T :

$$T' := \{A: A = T(g)AT(g)^{-1}, \forall g \in G\}. \quad (7.4)$$

Лемма 7.4 (Шур). *Если представление T в определении 7.3 неприводимо, то его коммутант состоит только из скалярных операторов.*⁵³

Доказательство этой леммы можно найти во многих книгах по теории представлений.

Теперь приступим к доказательству предложения 7.1. Определим оператор усреднения

$$\overset{\circ}{T}(g) := \int_{h \in G} T(hgh^{-1}) dh = \int_{h \in G} T(h)T(g)T(h)^{-1} dh. \quad (7.5)$$

Легко видеть, что $\overset{\circ}{T} \in T'$, и по лемме Шура, $\overset{\circ}{T}$ — скалярный оператор. Так как $\overset{\circ}{T}(e) = 1$, то $\overset{\circ}{T}(g) = \chi(g)1$ для всех $g \in G$ (напомним, что χ — нормированный характер представления T). Теперь мы можем записать

$$\begin{aligned} \int_{h \in G} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh &= (\dim T)^{-1} \int_{h \in G} \text{Tr} T(g_1 h g_2 h^{-1}) dh \\ &= (\dim T)^{-1} \int_{h \in G} \text{Tr} (T(g_1)T(hg_2h^{-1})) dh \\ &= (\dim T)^{-1} \text{Tr} \left(T(g_1) \int_{h \in G} T(hg_2h^{-1}) dh \right) \\ &= (\dim T)^{-1} \text{Tr} \left(T(g_1) \overset{\circ}{T}(g_2) \right) \\ &= \chi(g_1) \chi(g_2). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что можно переставить взятие следа и интегрирование.

Предложение 7.1 доказано.

⁵³Напомним, что скалярным называется оператор вида $c\mathbf{1}$, $c \in \mathbb{C}$, где $\mathbf{1}$ — тождественный оператор.

7.3 Асимптотическое функциональное уравнение

Пусть теперь χ_N для каждого N — неприводимый нормированный характер группы $U(N)$, и пусть последовательность $\{\chi_N\}$ сходится (в смысле определения 2.7) к некоторой функции χ на $U(\infty)$.⁵⁴ Согласно определению 2.8, χ — экстремальный характер $U(\infty)$.

Так как на $U(\infty)$ нет меры Хаара (в силу некомпактности этой группы), мы не можем написать функциональное уравнение для характеров (предложение 7.1). Однако мы можем использовать тот факт, что $U(\infty)$ аппроксимируется компактными группами $U(N)$ (см. определение 2.1).

Предложение 7.5 (Асимптотическое функциональное уравнение). *Пусть χ — экстремальный характер $U(\infty)$, $g_1, g_2 \in U(\infty)$. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{h \in U(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \chi(g_1) \chi(g_2). \quad (7.7)$$

Здесь интегрирование ведется по мере Хаара на $U(N)$.

Доказательство. Это предложение напрямую следует из функционального уравнения для нормированных характеров $U(N)$ (предложение 7.1) и определения экстремального характера (см. определения 2.7 и 2.8).

Пусть χ — наш экстремальный характер и $\chi_N \rightarrow \chi$ в смысле определения 2.7. Запишем функциональное уравнение для нормированных характеров группы $U(N)$:

$$\int_{h \in U(N)} \chi_N(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \chi_N(g_1) \chi_N(g_2). \quad (7.8)$$

Из определения сходимости $\chi_N \rightarrow \chi$ ясно, что она влечет поточечную сходимость на $U(\infty)$, поэтому правая часть (7.8) сходится при $N \rightarrow \infty$ к $\chi(g_1) \chi(g_2)$.

Теперь нам надо показать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{h \in U(N)} |\chi_N(g_1 h g_2 h^{-1}) - \chi(g_1 h g_2 h^{-1})| dh = 0. \quad (7.9)$$

□

Это утверждение не очевидно, поскольку мы знаем, что сходимость $\chi_N \rightarrow \chi$ равномерна на фиксированных подгруппах $U(n)$, тогда как здесь подгруппы $U(N)$ растут. Тем не менее, эту трудность можно преодолеть, воспользовавшись леммой 7.14 (упражнение 7.3).

7.4 Мультипликативность на классах сопряженности

В этом подразделе мы увидим, что можно сказать о центральной функции χ на $U(\infty)$, если она удовлетворяет асимптотическому функциональному уравнению (7.7).

Пусть $g \in U(\infty)$. Заметим, что g можно понимать как конечную матрицу, так как g имеет вид (2.2). Через $[g]$ обозначим класс сопряженности $g \in U(\infty)$.

Определение 7.6. Пусть Γ — совокупность всех классов сопряженности в $U(\infty)$. Множество Γ можно понимать как множество неупорядоченных конечных наборов вида $\{u_1, \dots, u_n\}$ любого размера (где $u_i \in \mathbb{T}^1$), с отношением эквивалентности

$$\{u_1, \dots, u_n\} \sim \{u_1, \dots, u_n, 1\}. \quad (7.10)$$

⁵⁴Можно было бы вместо χ_N писать $\tilde{s}_{\lambda(N)}$, но в данной лекции мы хотим как можно реже использовать конкретный вид неприводимых нормированных характеров групп $U(N)$, и поэтому мы пишем χ_N .

На Γ можно ввести структуру коммутативной полугруппы. Если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, то положим

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 := \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \quad (7.11)$$

(дизъюнктное объединение наборов γ_1 и γ_2). Ясно, что эта операция коммутативна.

На уровне матриц эта операция выглядит следующим образом (здесь мы считаем элементы $U(\infty)$ матрицами конечного размера):

$$[g_1] \circ [g_2] := \left[\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \right]. \quad (7.12)$$

Обозначим последнюю матрицу через $g_1 \oplus g_2$.

В этом подразделе мы докажем следующую теорему:

Теорема 7.7. *Пусть центральная функция χ на $U(\infty)$ удовлетворяет асимптотическому функциональному уравнению (7.7). Тогда χ мультипликативна на классах сопряженности.⁵⁵*

$$\chi(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \chi(\gamma_1)\chi(\gamma_2), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma. \quad (7.13)$$

Замечание 7.8. • Разумеется, эта теорема вытекает из теоремы 2.21 о классификации экстремальных характеров группы $U(\infty)$. Однако оказывается, что ее можно установить, не используя конкретный вид многочленов Шура.

- Мультипликативность χ на классах сопряженности — это специфически бесконечномерный факт, который для групп $U(N)$ не имеет места. В этом проявляется то, что группа $U(\infty)$ одновременно и проще, и сложнее, чем группы $U(N)$.

Замечание 7.9. Теорема 7.7 верна не только для $U(\infty)$, но и для других бесконечномерных классических групп — $O(\infty)$ и $Sp(2\infty)$. Она также верна и для бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}(\infty)$. Для большей наглядности мы сначала проведем рассуждение применительно к группе $\mathfrak{S}(\infty)$, а затем перейдем к интересующему нас случаю $U(\infty)$.

7.4.1 Теорема 7.7 для бесконечной симметрической группы

Здесь мы докажем аналог теоремы 7.7 для бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}(\infty)$. Пусть $\mathfrak{S}(N)$ — симметрическая группа N -й степени. Ее можно вложить в $U(N)$, сопоставив каждому элементу $s \in \mathfrak{S}(N)$ матрицу перестановки s . Она состоит из нулей и единиц, и в каждой строке и каждом столбце стоит только одна единица. Группа $\mathfrak{S}(\infty)$ определяется аналогично $U(\infty)$ как $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{S}(N)$. Поэтому можно считать, что группа $\mathfrak{S}(\infty)$ вложена в $U(\infty)$. Здесь мы докажем следующее предложение:

Предложение 7.10. *Пусть $\chi: \mathfrak{S}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — центральная функция, для которой*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \sum_{g \in \mathfrak{S}(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) = \chi(g_1)\chi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(\infty). \quad (7.14)$$

Тогда χ мультипликативна на классах сопряженности в $\mathfrak{S}(\infty)$, то есть,

$$\chi([g_1] \circ [g_2]) = \chi([g_1])\chi([g_2]), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(\infty). \quad (7.15)$$

Замечание 7.11. Суммирование в (7.14) — это на самом деле интеграл по мере Хаара на $\mathfrak{S}(N)$, которая представляет собой равномерную меру на $\mathfrak{S}(N)$ (вес каждой перестановки равен $\frac{1}{N!}$).

⁵⁵Центральная функция на $U(\infty)$ — это фактически функция на Γ .

Замечание 7.12. Предложение 7.10 на самом деле представляет собой «комбинаторный скелет» теоремы 7.7, и оба эти утверждения доказываются аналогично.

Доказательство. Фиксируем $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(\infty)$ и пусть выполнено (7.14). Выберем и зафиксируем достаточно большое n , такое что $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(n)$. Далее предполагаем $N \geq 2n$. Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}). \quad (7.16)$$

Напомним, что мы понимаем элементы симметрических групп (перестановки) как матрицы. Представим матрицу h в блочном виде

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

где матрица a имеет формат $n \times n$ (а матрица h — формат $N \times N$).⁵⁶ Ясно, что

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

где a' означает транспонирование. Перестановки $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(n)$ представим $N \times N$ матрицами $\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответственно.

Рассмотрим класс сопряженности

$$[g_1 h g_2 h^{-1}] = \left[\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right]. \quad (7.19)$$

Ясно, что этот класс не меняется при преобразованиях h вида

$$h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathfrak{S}(N-n). \quad (7.20)$$

Поэтому класс сопряженности (7.19) зависит только от двойного класса смежности

$$\mathfrak{S}_n(N) h \mathfrak{S}_n(N) \in \mathfrak{S}_n(N) \backslash \mathfrak{S}(N) / \mathfrak{S}_n(N), \quad (7.21)$$

где $\mathfrak{S}_n(N)$ — подгруппа в $\mathfrak{S}(N)$, которая оставляет на месте $1, 2, \dots, n$, или, что то же самое,

$$\mathfrak{S}_n(N) := \left\{ \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(N) \right\} \cong \mathfrak{S}(N-n). \quad (7.22)$$

Обозначим

$$w_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(2n) \subset \mathfrak{S}(N) \quad (7.23)$$

(напомним, что $N \geq 2n$). Это матрица формата $2n \times 2n$.

Заметим, что

- $g_1 w_n g_2 w_n^{-1} = g_1 \oplus g_2$.
- $\chi(g_1 h g_2 h^{-1}) = \chi(g_1 \oplus g_2) = \chi([g_1] \circ [g_2])$ для всех $h \in \mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N)$, так как χ зависит от h только через двойной класс смежности h вида $\mathfrak{S}_n(N) h \mathfrak{S}_n(N)$.

⁵⁶Здесь и далее до конца лекции все матрицы, записанные в блочном виде будут иметь такой формат, если не оговорено противное.

Запишем левую часть (7.14) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) \\
&= \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) + \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N) \setminus (\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) \\
&= \chi([g_1] \circ [g_2]) \cdot \frac{\#(\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))}{N!} + \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N) \setminus (\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}).
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Мы знаем из (7.14), что это выражение сходится к $\chi(g_1)\chi(g_2)$ (или, что то же самое, к $\chi([g_1])\chi([g_2])$), а также что $|\chi| \leq 1$, поэтому предложение 7.10 следует из леммы 7.13 ниже. \square

Лемма 7.13. Пусть n фиксировано, а $w_n \in \mathfrak{S}(N)$ определено по формуле (7.23) выше. Тогда⁵⁷

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))}{\#\mathfrak{S}(N)} = 1. \tag{7.25}$$

Доказательство. Условие

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N) \tag{7.26}$$

(здесь, как и раньше, матрица h имеет формат $N \times N$, а подматрица a — формат $n \times n$) выполняется тогда и только тогда, когда $a = 0$. Вспоминая, что h является перестановкой множества $\{1, \dots, N\}$, мы можем записать последнее условие в виде

$$\{h(i) > n \text{ для всех } i = 1, \dots, n\}. \tag{7.27}$$

Будем интерпретировать h как случайную перестановку. Легко видеть, что при фиксированном n и $N \rightarrow \infty$ вероятность события (7.27) стремится к 1. \square

Таким образом, предложение 7.10 доказано.

7.4.2 Теорема 7.7 для бесконечномерной унитарной группы

Доказательство теоремы 7.7 для бесконечномерной унитарной группы следует той же идее и лишь немного технически сложнее.

Пусть χ — центральная функция на $U(\infty)$, удовлетворяющая асимптотическому функциональному уравнению (7.7), и пусть $g_1, g_2 \in U(\infty)$. Зафиксируем достаточно большое n , такое, что $g_1, g_2 \in U(n)$. Мы знаем из предложения 7.5, что

$$\chi(g_1)\chi(g_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{h \in U(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh, \tag{7.28}$$

где интегрирование ведется по мере Хаара на $U(N)$.

Возьмем $N \geq 2n$, потом N будет стремиться к бесконечности. Каждую матрицу $h \in U(N)$ снова представим в виде

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{7.29}$$

где a имеет формат $n \times n$. Мы знаем, что h можно подвергать преобразованиям вида

$$h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad u, v \in U(N-n), \tag{7.30}$$

⁵⁷Напомним, что подгруппа $\mathfrak{S}_n(N) \subset \mathfrak{S}(N)$ определяется по формуле (7.22).

и от этого значение $\chi(g_1 h g_2 h^{-1})$ не изменится. Поэтому χ зависит от h только через двойной смежный класс

$$U_n(N) h U_n(N) \in U_n(N) \backslash U(N) / U_n(N), \quad (7.31)$$

где $U_n(N)$ определяется аналогично $\mathfrak{S}_n(N)$ (7.22).

Лемма 7.14. *Всякий смежный класс $U_n(N) h U_n(N)$ пересекается с $U(2n) \subset U(N)$, то есть,*

$$U(N) = U_n(N) U(2n) U_n(N). \quad (7.32)$$

Доказательство. Упражнение 7.2. □

Определение 7.15. Положим для всех $N \geq n$ и $\varepsilon > 0$

$$A(n, N, \varepsilon) := \left\{ h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(N) : \|a\| \leq \varepsilon \right\} \subset U(N). \quad (7.33)$$

Здесь $\|a\|$ — обычная норма матрицы a .

Лемма 7.16. *Пусть $w_n \in U(2n) \subset U(N)$ определяется по формуле (7.23). Если $h \in A(n, N, \varepsilon)$, то в двойном классе $U_n(N) h U_n(N)$ найдется элемент из $U(2n)$, ε -близкий к w_n .*

Доказательство. Упражнение 7.5. □

Оставшаяся часть доказательства теоремы 7.7 проводится так же, как для случая симметрической группы. Для завершения доказательства теоремы 7.7 нам остается только установить следующий факт:

Лемма 7.17. *Пусть $\text{Haar}_{U(N)}$ — нормированная мера Хаара группы $U(N)$. Тогда*

$$\text{Haar}_{U(N)}(A(n, N, \varepsilon)) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty \quad (7.34)$$

для всех фиксированных n и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Нам надо показать, что у случайной матрицы, выбранной по мере Хаара на $U(N)$, левый верхний блок размера $n \times n$ с большой вероятностью имеет маленькую норму. Достаточно доказать это для $n = 1$ (упражнение 7.6).

Теперь рассмотрим первую строку матрицы из $U(N)$, пусть она состоит из чисел $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$. Это точка на сфере $S^{2N-1} \subset \mathbb{R}^{2N}$. Мера Хаара, спроектированная на первую строчку матрицы, представляет собой равномерную меру на сфере S^{2N-1} (упражнение 7.7). Нам надо показать, что по равномерной мере на сфере S^{2N-1} величина $|z_1|$ мала с большой вероятностью. Аналогично, вместо $|z_1|$ достаточно доказать то же самое для $\text{Re } z_1$.

Из упражнения 7.8 мы знаем распределение величины $\text{Re } z_1$, которое имеет плотность $\text{Const} \cdot (1 - x^2)^{\frac{2N-3}{2}} dx$, и при $N \rightarrow \infty$ стремится к дельта-мере в нуле, то есть, с большой вероятностью величина $\text{Re } z_1$ попадает в ε -окрестность нуля.

Лемма доказана. □

Таким образом, мы доказали теорему 7.7.

7.5 Связь с тотальной положительностью

В этом подразделе мы покажем, как связана мультипликативность экстремальных характеров группы $U(\infty)$ на классах сопряженности (которую мы получили, не используя конкретный вид функций Шура и теорему 2.21 о классификации экстремальных характеров) с понятием тотальной положительности.

Рассмотрим пространство $L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ функций, которые квадратично интегрируемы по мере Хаара на $U(N)$ и инвариантны относительно действия группы $U(N)$ на себе сопряжениями.⁵⁸ Согласно известному общему факту, неприводимые (*не нормированные!*) характеры составляют в пространстве $L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ ортонормированный базис. Для любой функции $\varphi \in L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ можно рассмотреть ее разложение по неприводимым характерам, которое в случае группы $U(N)$ имеет вид

$$\varphi(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\mu \in \text{Sign}(N)} c_\mu s_\mu(u_1, \dots, u_N), \quad c_\mu = (\varphi, s_\mu). \quad (7.35)$$

Определение 7.18. Через $L^2_+(U(N)) := L^2_+(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}} \subset L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ обозначим подпространство тех функций φ , для которых все $c_\mu \geq 0$, то есть,

$$(\varphi, s_\mu) \geq 0 \quad \text{для всех } \mu \in \text{Sign}(N). \quad (7.36)$$

Далее, для любых $N \geq n$ и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ выполнено

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) \in L^2_+(U(n)). \quad (7.37)$$

Действительно, это вытекает из правила ветвления лорановских многочленов Шура (§1.5):

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1} = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (7.38)$$

Видно, что если применить это правило $(N - n)$ раз к $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$, то получим линейную комбинацию многочленов s_μ ($\mu \in \text{Sign}(n)$) с целыми неотрицательными коэффициентами.

Согласно определениям 2.7 и 2.8, это означает, что для любого экстремального характера χ группы $U(\infty)$ и любого фиксированного n имеем

$$\chi|_{U(n)} \in L^2_+(U(n)). \quad (7.39)$$

Из теоремы 7.7 следует, что χ — мультипликативная функция, то есть,

$$\chi|_{U(n)}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n \Psi(u_i) \quad \text{для всех } n, \quad (7.40)$$

где Ψ — непрерывная функция на \mathbb{T}^1 . Конкретный вид функции Ψ мы предполагаем неизвестным. Разложим Ψ в ряд Фурье:

$$\Psi(u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} M(l) u^l, \quad u \in \mathbb{T}^1. \quad (7.41)$$

Как мы знаем, $\Psi(u_1) \dots \Psi(u_n)$ — функция из $L^2_+(U(n))$. Разложим симметрическую по u_1, \dots, u_n функцию $\Psi(u_1) \dots \Psi(u_n)$ в ряд по функциям Шура. Мы получим, переобозначив μ через λ (упражнение 7.9)

$$\Psi(u_1) \dots \Psi(u_n) = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(n)} c_\lambda s_\lambda(u_1, \dots, u_n), \quad c_\lambda = \det [M(\lambda_i - i + j)]_{i,j=1}^n. \quad (7.42)$$

Таким образом, из того, что для всех n функция $\chi|_{U(n)}$ лежит в $L^2_+(U(n))$, следует, что все определители вида $\det [M(\lambda_i - i + j)]_{i,j=1}^n$ неотрицательны для всех $\lambda \in \text{Sign}(n)$. Меняя i и j , получаем, что это равносильно неотрицательности определителей вида

$$\det [M(i - (j - \lambda_j))]_{i,j=1}^n, \quad \lambda \in \text{Sign}(n). \quad (7.43)$$

⁵⁸Инвариантность означает, что функции постоянны на классах сопряженности.

Построим тёплицеву матрицу (см. определение 6.14) по последовательности $M(l)$:

$$X_{ij} = M(i - j). \quad (7.44)$$

Это бесконечная в обе стороны матрица. Напомним, что последовательность $M(l)$, $l \in \mathbb{Z}$ является тотально положительной, если все миноры всех порядков матрицы X неотрицательны.

Из наших рассуждений пока можно заключить, что миноры $|X_{I,J}|$ неотрицательны для $I = \{1, \dots, n\} + k$ ($k \in \mathbb{Z}$) и любого J ,⁵⁹ то есть, в I индексы должны идти подряд. Оказывается, можно проделать некую техническую работу и заключить, что из неотрицательности таких миноров матрицы X уже следует ее тотальная положительность.

7.6 Упражнения

Упражнение 7.1. Покажите, что все неприводимые конечномерные представления коммутативной группы одномерны.

Упражнение 7.2. Докажите лемму 7.14.

Указание. Воспользуйтесь линейной алгеброй.

Упражнение 7.3. Завершите доказательство предложения 7.5.

Упражнение 7.4. Завершите доказательство леммы 7.13.

Упражнение 7.5. Докажите лемму 7.16.

Указание. Используйте соотношения между блоками матрицы h , вытекающие из ее унитарности: $aa^* + bb^* = 1$, $a^*a + c^*c = 1$ и т. д.

Упражнение 7.6. Проверьте, что лемма 7.17 действительно вытекает из того, что

$$\text{Haar}_{U(N)}(A(1, N, \varepsilon)) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty \quad (7.45)$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Упражнение 7.7. Покажите, что первая строка случайной матрицы из $U(N)$, распределенной по мере Хаара, имеет равномерное распределение на сфере S^{2N-1} .

Упражнение 7.8. Рассмотрим равномерную меру на $(k-1)$ -мерной сфере в \mathbb{R}^k :

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 = 1. \quad (7.46)$$

Тогда распределение координаты x_1 имеет плотность

$$\text{Const} \cdot (1 - x_1^2)^{\frac{k-3}{2}} dx_1. \quad (7.47)$$

Другими словами, (7.47) задает плотность проекции равномерной меры на сфере S^{k-1} на ее диаметр. Отметим, что при $k = 3$ (что соответствует обычной двумерной сфере) проекция равномерной меры на диаметр имеет постоянную плотность.

Упражнение 7.9. Докажите формулу (7.42).

Указание. Воспользуйтесь замечанием 1.11.

8 Граф Гельфанда-Цетлина

В этой лекции мы дадим еще одну интерпретацию теоремы 2.21 о классификации экстремальных характеров группы $U(\infty)$, на этот раз в чисто комбинаторных терминах.

⁵⁹Слагаемое k возникает из тёплицевости матрицы X , так что I можно сдвигать на целое число.

8.1 Гармонические функции

Определение 8.1 (Граф Гельфанда-Цетлина). Вершинами *графа Гельфанда-Цетлина* являются все сигнатуры любой длины:

$$\text{Sign} = \bigsqcup_{N=0}^{\infty} \text{Sign}(N). \quad (8.1)$$

Напомним, что $\text{Sign}(N)$ обозначает множество сигнатур длины N .⁶⁰ Удобно считать, что множество $\text{Sign}(0)$ состоит из одной вершины \emptyset . Ясно, что для $N \geq 1$ множество $\text{Sign}(N)$ уже является счетным.

Ребра в графе Гельфанда-Цетлина соединяют пары сигнатур μ, λ , таких, что $\mu \prec \lambda$. По определению это означает, что $\mu \in \text{Sign}(N-1)$ и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ для некоторого $N \geq 2$, и сигнатуры λ и μ перемежаются, то есть, $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N$. Также удобно считать, что вершина \emptyset соединена ребром со всеми вершинами из $\text{Sign}(1)$.

Ясно, что граф Гельфанда-Цетлина связан и не имеет висячих вершин. Кроме того, из любой вершины λ выходит счетное число ребер «вверх» и конечное число ребер «вниз», см. рис. 11.⁶¹

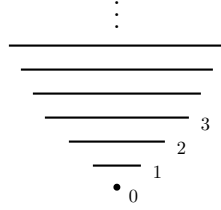


Рис. 11: Этажи графа Гельфанда-Цетлина

Определение 8.2. Через Φ обозначим множество всех функций $\varphi: \text{Sign} \rightarrow \mathbb{R}$ на графе Гельфанда-Цетлина, таких, что

- (*неотрицательность*) $\varphi(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in \text{Sign}$;
- (*нормировка*) $\varphi(\emptyset) = 1$;
- (*условие гармоничности*) Для всех $\mu \in \text{Sign}$ выполнено

$$\varphi(\mu) = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} \varphi(\lambda). \quad (8.2)$$

Пример 8.3. Например, если в (8.2) положить $\mu = \emptyset$, получим

$$\sum_{\lambda \in \text{Sign}(1)} \varphi(\lambda) = 1. \quad (8.3)$$

Заметим, что $\text{Sign}(1)$ можно отождествить с \mathbb{Z} . Если же в (8.2) $\mu \in \text{Sign}(1) = \mathbb{Z}$, то получим такое условие:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2: \lambda_1 \geq \mu \geq \lambda_2} \varphi((\lambda_1, \lambda_2)) = \varphi(\mu). \quad (8.4)$$

Ясно, что в условии гармоничности (8.2) всегда участвуют бесконечные суммы, однако в силу неотрицательности φ с ними не возникает проблем.

⁶⁰См. определение 1.3.

⁶¹Другими словами, для любого λ множество $\{\nu: \nu \succ \lambda\}$ счетно, а множество $\{\mu: \mu \prec \lambda\}$ — конечно.

Определение 8.4. *Путь* τ в графе Гельфанда-Цетлина называется конечная или бесконечная последовательность сигнатур вида

$$\tau = \{\emptyset = \lambda^0 \prec \lambda^1 \prec \lambda^2 \prec \dots\}. \quad (8.5)$$

Ясно, что $\lambda^k \in \text{Sign}(k)$. Если путь τ конечен, через $\text{end}(\tau)$ будем обозначать его конец.

Для сигнатуры λ положим $T_\lambda := \{\tau : \text{end}(\tau) = \lambda\}$. Это множество всех путей из \emptyset в λ , оно конечно. Число элементов в T_λ обозначим через $\text{Dim}\lambda$. Оказывается, эта функция нам уже встречалась (см., например, §2.4).

Замечание 8.5. Путь в графе Гельфанда-Цетлина — это то же самое, что схема Гельфанда-Цетлина (определение 1.25). Если конец пути есть $\lambda \in \text{Sign}(N)$, то схема Гельфанда-Цетлина представляет собой треугольник из целых чисел вида

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \dots & & \lambda_N \\ & & * & & * & & \dots & & * \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & * & & * & & \\ & & & & & & * & & \end{array} \quad (8.6)$$

Каждые две последовательные строки в этом треугольнике перемежаются.

Предложение 8.6. Пусть $\varphi \in \Phi$, тогда

$$\sum_{\lambda: \lambda \in \text{Sign}(N)} \varphi(\lambda) \text{Dim}\lambda = 1 \quad \text{для всех } N = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7)$$

Доказательство. По индукции. Для $N = 0$ (8.7) верно по определению, для $N = 1$ это следует напрямую из условия гармоничности, см. пример 8.3.

Теперь пусть $\mu \in \text{Sign}(N - 1)$. Перепишем условие гармоничности (8.2) в виде⁶²

$$\varphi(\mu) \text{Dim}\mu = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} \frac{\text{Dim}\mu}{\text{Dim}\lambda} \cdot \varphi(\lambda) \text{Dim}\lambda. \quad (8.8)$$

Из определения числа путей $\text{Dim}\lambda$ очевидно следует, что

$$\text{Dim}\lambda = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} \text{Dim}\mu. \quad (8.9)$$

Положим

$$p(\lambda \rightarrow \mu) := \begin{cases} \frac{\text{Dim}\mu}{\text{Dim}\lambda}, & \text{если } \mu \prec \lambda; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Из (8.9) следует, что

$$\sum_{\mu: \mu \in \text{Sign}(N-1)} p(\lambda \rightarrow \mu) = 1 \quad \text{для всех } \lambda \in \text{Sign}(N). \quad (8.11)$$

Обозначим $\tilde{\varphi}(\lambda) := \varphi(\lambda) \text{Dim}\lambda$, тогда (8.8) переписывается в виде

$$\tilde{\varphi}(\mu) = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} \tilde{\varphi}(\lambda) p(\lambda \rightarrow \mu). \quad (8.12)$$

⁶²Здесь используется, что $\text{Dim}\lambda > 0$ для всех сигнатур λ .

Запишем, пользуясь предположением индукции:

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{\mu \in \text{Sign}(N-1)} \tilde{\varphi}(\mu) = \sum_{\mu \in \text{Sign}(N-1)} \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{\varphi}(\lambda) p(\lambda \rightarrow \mu) \\
&= \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{\varphi}(\lambda) \sum_{\mu \in \text{Sign}(N-1)} p(\lambda \rightarrow \mu) = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{\varphi}(\lambda).
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Здесь мы воспользовались определением чисел $p(\lambda \rightarrow \mu)$, это позволило заменить суммирование по $\{\lambda: \lambda \succ \mu\}$ на суммирование по всем $\lambda \in \text{Sign}(N)$, поэтому можно было переставить суммирование по μ и по λ . \square

Замечание 8.7. С точки зрения теории вероятностей $p(\lambda \rightarrow \mu)$ можно рассматривать как *марковское переходное ядро*.

8.2 Центральные меры на путях

Через $T(N)$ обозначим множество всех путей длины N в графе Гельфанда-Цетлина, то есть,

$$T(N) := \{\tau: \text{end}(\tau) \in \text{Sign}(N)\}. \tag{8.14}$$

Другими словами, $T(N)$ — множество схем Гельфанда-Цетлина высоты N . Через $T(\infty)$ обозначим множество всех бесконечных (монотонных) путей в графе Гельфанда-Цетлина.

Ясно, $T(\infty)$ есть проективный предел $\varprojlim T(N)$ относительно проекций $T(N) \rightarrow T(N-1)$, состоящих в «откусывании» от пути $\tau \in T(N)$ последней вершины λ^N , или, что то же самое, в стирании верхней строчки в схеме Гельфанда-Цетлина.

Таким образом, мы получаем канонические проекции $T(\infty) \rightarrow T(N)$ для всех N . Пусть $\tau \in T(N)$. Через $\text{Cyl}(\tau)$ обозначим прообраз τ при этой проекции. Другими словами, $\text{Cyl}(\tau)$ — это множество всех бесконечных путей в графе, начало которых совпадает с τ , или множество бесконечных схем Гельфанда-Цетлина с фиксированным начальным треугольником высоты N .⁶³ Множество $\text{Cyl}(\tau)$ называется *цилиндрическим*. Множество бесконечных путей $T(\infty)$ снабдим σ -алгеброй, порожденной всеми цилиндрическими множествами.

Определение 8.8. Вероятностная мера P на $T(\infty)$ называется *центральной*, если для любого конечного пути τ значение меры P на цилиндрическом множестве $\text{Cyl}(\tau)$ зависит только от конечной вершины $\text{end}(\tau)$.

Замечание 8.9. Вероятностную меру на $T(\infty)$ можно рассматривать как закон распределения случайного бесконечного пути в графе. Также можно спроектировать меру на $T(N)$ для любого N и рассматривать случайный конечный путь длины N . Легко видеть (упражнение 8.1), что условие центральности меры P на $T(\infty)$ в терминах случайных путей эквивалентно следующему условию:

Для всякого N и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ распределение случайного пути длины N при условии, что он проходит через вершину λ , является равномерным.⁶⁴

Замечание 8.10. Условие центральности меры на $T(\infty)$ играет важную роль. В разных контекстах оно может также называться *гиббсовостью* или *перестановочностью* (*exchangeability*).

Предложение 8.11. Существует биекция $\varphi \leftrightarrow P$ между множеством Φ (см. определение 8.2) и множеством всех центральных вероятностных мер на $T(\infty)$. Она задается следующим образом:

$$\varphi(\text{end}(\tau)) = P(\text{Cyl}(\tau)) \quad \text{для всех конечных путей } \tau. \tag{8.15}$$

⁶³Отметим, что в этом треугольнике зафиксированы все элементы, а не только самая верхняя строка.

⁶⁴Это распределение уже «живет» на T_λ , множестве всех путей длины N с концом λ .

Доказательство. По теореме Колмогорова, существует взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами на проективном пределе $T(\infty) = \varprojlim T(N)$ и семействами вероятностных мер $\{P_N\}$ (где P_N — вероятностная мера на $T(N)$), которые согласованы с проекциями $T(N) \rightarrow T(N-1)$ (то есть, при такой проекции мера P_N на $T(N)$ должна переходить в меру P_{N-1} на $T(N-1)$). Другими словами, для каждого пути τ длины N выполнено $P(\text{Cyl}(\tau)) = P_N(\tau)$.

Условие согласованности семейства мер $\{P_N\}$ можно записать в следующем виде. Пусть $\mu \in \text{Sign}(N-1)$ и τ — любой путь с концом μ . Тогда

$$P_{N-1}(\tau) = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} P_N(\tau \cup \lambda), \quad (8.16)$$

где $\tau \cup \lambda$ — путь длины N , получающийся из τ добавлением вершины λ . А это и есть условие гармоничности для функции φ , связанной с P соотношением (8.15).

Далее, очевидно, что неотрицательность φ равносильна неотрицательности P . Кроме того, условие нормировки $\varphi(\emptyset) = 1$ равносильно тому, что P — вероятностная мера. \square

8.3 Гармонические функции и функции Войкулеску

Подробнее о материале этого раздела см. [Ols03].

Определение 8.12. *Крайней точкой* (extreme point) выпуклого множества E , лежащего в векторном пространстве, называется такая его точка, которая не лежит строго внутри отрезка с концами в E . Множество крайних точек множества E обозначим через $\text{Ex } E$.

Пример 8.13. Опишем крайние точки некоторых выпуклых подмножеств \mathbb{R}^2 :

- У открытого круга крайних точек нет.
- Крайние точки замкнутого круга — это вся окружность.
- У замкнутого треугольника крайними точками являются его вершины и только они.

Заметим, что каждая точка треугольника является выпуклой линейной комбинацией своих вершин. Другими словами, каждая точка треугольника — это барицентр (центр тяжести) некоторой вероятностной меры на вершинах. Кроме того, эта вероятностная мера единственна.

Для замкнутого круга также верно, что каждая точка есть барицентр некоторой вероятностной меры на множестве крайних точек, однако такое представление не единственно.

Ясно, что если a, b и c — вершины треугольника, то сам треугольник можно отождествить с $\text{Prob}(\{a, b, c\})$ — множеством вероятностных мер на $\{a, b, c\}$. Вообще, если E — конечное множество, то $\text{Prob}(E)$ — (замкнутый) симплекс в конечномерном пространстве функций на E , и $\text{Ex } \text{Prob}(E)$ есть E . Каждая точка конечномерного симплекса является барицентром некоторой вероятностной меры на вершинах, и такое представление единственно. В конечномерном пространстве симплексы суть единственные выпуклые множества с единственностью разложения по крайним точкам.

Нас интересуют выпуклые множества E в бесконечномерных векторных пространствах, удовлетворяющие следующим свойствам:

- $\text{Ex } E$ непусто.
- Любая точка из E является барицентром некоторой вероятностной меры на $\text{Ex } E$.
- Такая мера единственна.

Модельным примером таких множеств являются множества $\text{Prob}(E)$, где E — измеримое пространство (то есть, в E выделена σ -алгебра подмножеств). Крайние точки суть дельта-меры; таким образом, $\text{Ex}(\text{Prob}(E)) = E$.

Следующие результаты связывают гармонические функции на графе Гельфанда-Цетлина с функциями Войкулеску.

Теорема 8.14 (Описание крайних точек множества Φ гармонических функций).

- Множество $\text{Ex}(\Phi)$ (где Φ — множество неотрицательных нормированных гармонических функций на графе Гельфанда-Цетлина) зависит в точности от тех же параметров, что и функции Войкулеску, то есть, от элементов ω множества $\Omega \subset \mathbb{R}^{4+\infty+2}$, состоящего из наборов $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$, таких что

$$\begin{aligned}\alpha^\pm &= (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \beta^\pm &= (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \gamma^\pm &\geq 0,\end{aligned}\tag{8.17}$$

и

$$\sum_i \alpha_i^+ + \sum_i \alpha_i^- + \sum_i \beta_i^+ + \sum_i \beta_i^- < \infty, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.\tag{8.18}$$

- Биективное соответствие $\text{Ex}(\Phi) \leftrightarrow \Omega$ можно описать следующим образом. Пусть $\omega = (\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm) \in \Omega$ и $\Psi_\omega(u)$, $u \in \mathbb{T}^1$, — соответствующая функция Войкулеску (2.33). Тогда гармоническая функция $\varphi_\omega(\lambda)$ на графе Гельфанда-Цетлина определяется как

$$\varphi_\omega(\lambda) = [s_\lambda] \Psi_\omega(u_1) \dots \Psi_\omega(u_N) \quad \text{для всех } N \text{ и } \lambda \in \text{Sign}(N),\tag{8.19}$$

то есть, чтобы получить значение $\varphi_\omega(\lambda)$ для $\lambda \in \text{Sign}(N)$, надо взять N копий функции $\Psi_\omega(u)$, разложить симметрическую функцию $\Psi_\omega(u_1) \dots \Psi_\omega(u_N)$ по лорановским многочленам Шура, и взять коэффициент при $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$.

Также $\varphi_\omega(\lambda)$ можно записать в виде определителя тёмлицевой матрицы (см. (7.42))

$$\varphi_\omega(\lambda) = \det [c_{\lambda_i - i + j}],\tag{8.20}$$

где $\Psi_\omega(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u^n$.

Теорема 8.15 (Интегральное представление гармонических функций). Для любой гармонической функции $\varphi \in \Phi$ существует единственная вероятностная мера \mathcal{P} на $\text{Ex}(\Phi) = \Omega$, такая, что φ есть барицентр меры \mathcal{P} , то есть,

$$\varphi = \int_{\Omega} \varphi_\omega \mathcal{P}(d\omega).\tag{8.21}$$

Другими словами, выпуклое множество Φ изоморфно $\text{Prob}(\Omega)$.

Приведем схему доказательств теорем 8.14 и 8.15.

Через $\Upsilon(N)$ обозначим множество выпуклых комбинаций нормированных неприводимых характеров группы $U(N)$. Функции из $\Upsilon(N)$ являются центральными, поэтому их можно рассматривать как функции от собственных значений (см. также замечание 1.13). В этом смысле $\Upsilon(N)$ — множество функций вида

$$\Upsilon(N) = \left\{ \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N) : \tilde{c}_\lambda \geq 0, \sum \tilde{c}_\lambda = 1 \right\}.\tag{8.22}$$

Здесь $\tilde{s}_\lambda = \frac{s_\lambda}{s_\lambda(1, \dots, 1)} = \frac{s_\lambda}{\text{Dim} \lambda}$ — нормированные (лорановские) многочлены Шура (см. лекции 1 и 2). Ясно, что можно записать

$$\sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \frac{\tilde{c}_\lambda}{\text{Dim} \lambda} s_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} c_\lambda s_\lambda. \quad (8.23)$$

В §1.5 были определены вложения унитарных групп $U(N-1) \hookrightarrow U(N)$. При соответствующей проекции пространств функций пространство $\Upsilon(N)$ переходит в $\Upsilon(N-1)$ (упражнение 8.3). Таким образом, можно определить проективный предел

$$\Upsilon(\infty) := \varprojlim \Upsilon(N). \quad (8.24)$$

Тривиально проверяется, что $\Upsilon(\infty)$ можно естественным образом отождествить с множеством всех центральных функций χ на $U(\infty)$, для которых $\chi|_{U(N)} \in \Upsilon(N)$ для всех N . Канонические проекции $\Upsilon(\infty) \rightarrow \Upsilon(N)$ и $\Upsilon(N) \rightarrow \Upsilon(N-1)$ являются аффинными отображениями в том смысле, что они согласованы с операцией взятия выпуклой комбинации точек.

Существует биекция $\Phi \leftrightarrow \Upsilon(\infty)$, которая задается следующим образом:

$$\varphi(\lambda) = [s_\lambda](\chi|_{U(N)}), \quad \lambda \in \text{Sign}(N). \quad (8.25)$$

Таким образом, утверждения о структуре множества Φ можно переформулировать применительно к множеству $\Upsilon(\infty)$.

Заметим, что каждое множество $\Upsilon(N)$ является счетномерным симплексом, $\Upsilon(N) = \text{Prob}(\text{Ex}(\Upsilon(N)))$, а множество $\Upsilon(\infty)$ является проективным пределом этих симплексов. Имеет место следующая абстрактная теорема

Теорема 8.16. *Если выпуклое множество E представимо в виде проективного предела конечномерных или счетномерных симплексов, $E = \varprojlim E_N$, то $E = \text{Prob}(\text{Ex} E)$. Более того, любая крайняя точка из $\text{Ex} E$ допускает аппроксимацию крайними точками из $\text{Ex} E_N$, $N \rightarrow \infty$ (т.е. вершинами допредельных симплексов).*

Первое утверждение этой теоремы дает

$$\Upsilon(\infty) = \text{Prob}(\text{Ex}(\Upsilon(\infty))). \quad (8.26)$$

Согласно второму утверждению, для любой крайней точки $\chi \in \text{Ex}(\Upsilon(\infty))$ существует последовательность $\chi_N \in \text{Ex}(\Upsilon(N))$, такая, что $\chi_N \rightarrow \chi$. В нашей ситуации это в точности означает, что $\chi_N|_{\Upsilon(n)} \rightarrow \chi|_{\Upsilon(n)}$ для любого фиксированного n (имеется в виду сходимость из определения 2.7). Отсюда следует, что $\text{Ex}(\Upsilon(\infty))$ содержится в множестве пределов последовательностей $\{\chi_N\}$, $\chi_N \in \text{Ex}(\Upsilon(N))$.

В общей ситуации может оказаться, что эти два множества не равны (первое строго меньше второго). Но в нашем конкретном случае они совпадают. Одно из возможных доказательств приведено в [OO98]; оно использует мультипликативное свойство предельных функций и теорему де Финетти.

Рассуждение заканчивается применением теоремы 2.21.

Замечание 8.17. На языке гармонических функций аппроксимация крайних точек вершинами выглядит следующим образом. В предположении $\mu \in \text{Sign}(n)$, $\lambda \in \text{Sign}(N)$, $n < N$, обозначим через $\text{Dim}(\mu, \lambda)$ число (монотонных) путей от μ до λ , см. определение 8.4. Другими словами, $\text{Dim}(\mu, \lambda)$ — это число трапециевидных схем Гельфанда-Цетлина, у которых в нижнем основании стоит сигнатура μ , а в верхнем — λ . Отметим, что $\text{Dim}(\emptyset, \lambda) = \text{Dim} \lambda$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\lambda(\mu) := \frac{\text{Dim}(\mu, \lambda)}{\text{Dim} \lambda}, \quad (8.27)$$

где λ служит параметром, а μ — аргументом. Можно проверить (упражнение 8.4), что функция $\varphi_\lambda(\mu)$ удовлетворяет условиям неотрицательности, нормированности и гармоничности (до уровня N). Эту функцию можно строить рекуррентно с помощью условия гармоничности, взяв начальное условие $\varphi_\lambda(\mu) = \delta_{\mu,\lambda}/\text{Dim}\lambda$ для $\mu \in \text{Sign}(N)$ и затем последовательно спускаясь на нижележащие уровни.

Для графа Гельфанда-Цетлина утверждение об аппроксимации означает следующее:

Для каждой функции $\varphi \in \text{Ex}(\Phi)$ существует последовательность сигнатур $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$, такая, что $\varphi_{\lambda(N)} \rightarrow \varphi$ (сходимость здесь поточечная).

В этом смысле можно сказать, что $\text{Ex}(\Phi)$ — граница графа Гельфанда-Цетлина. Действительно, каждую точку $\text{Ex}(\Phi) = \Omega$ можно рассматривать как виртуальный «конец пути», из которого мы «спускаем вниз» гармоническую функцию φ .

Отождествление границы графа Гельфанда-Цетлина с множеством параметров Ω дает наиболее элементарную интерпретацию формулировку теоремы 2.21, формально не зависящую от теории представлений.

8.4 Замощения

По бесконечному пути в графе Гельфанда-Цетлина можно построить замощение верхней полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ ромбами трех видов (см. рис. 12). Проведем горизонтальные

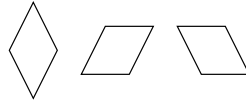


Рис. 12: Три вида ромбов.

прямые $y = N$, $N = 0, 1, 2, \dots$ и рассмотрим регулярную треугольную сетку в полуплоскости с вершинами в точках (x, y) вида

$$y = N = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } N \text{ четно} \\ \mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пусть $\emptyset = \lambda^0 \prec \lambda_1 \prec \lambda_2 \dots$ — бесконечный путь в графе. Каждая пара сигнатур λ^N и λ^{N-1} нестрого перемежается. Сделаем небольшие преобразования, чтобы перейти к строго перемежающимся последовательностям. Пусть

$$\rho^N := \left(\frac{N-1}{2}, \frac{N-3}{2}, \dots, -\frac{N-1}{2} \right) \quad (8.28)$$

— вектор длины N . Рассмотрим последовательность векторов

$$\ell^N := \lambda^N + \rho^N, \quad \ell_i^N = \lambda_i^N + \frac{N+1}{2} - i. \quad (8.29)$$

Ясно, что ℓ^N и ℓ^{N-1} (для всех N) уже строго перемежаются:

$$\ell_1^N > \ell_1^{N-1} > \ell_2^N > \dots > \ell_{N-1}^{N-1} > \ell_N^N. \quad (8.30)$$

Числа ℓ_i^N при нечетных N целые, а при четных — полуцелые.

Отметим теперь некоторые точки на наших прямых. На граничной прямой $y = 0$ таких точек нет. На прямой $y = 1$ выделим точку с x -координатой ℓ_1^1 , на прямой $y = 2$ — две точки с x -координатами ℓ_1^2 и ℓ_2^2 , и так далее, см. рисунок 13.

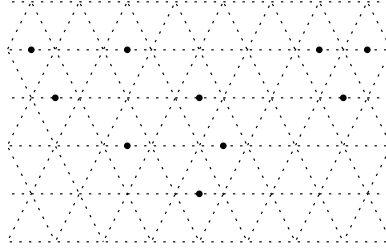


Рис. 13: Отмеченные точки ℓ_i^N .

Отметим, что каждая из отмеченных точек попадает в середину между двух соседних узлов сетки; нарисуем вокруг нее вертикальный ромб. Этим уже однозначно определяется замощение всей полуплоскости, в котором все остальные ромбы будут наклонными. В нашем случае из рис. 13 мы получим замощение, изображенное на рис. 14.

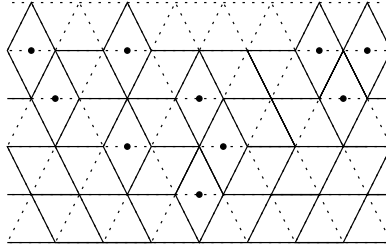


Рис. 14: Замощение полуплоскости.

Центральные вероятностные меры на путях в графе Гельфанда-Цетлина приводят к *случайным* замощениям.

8.5 Упражнения

Упражнение 8.1. Проверьте эквивалентность условия центральности (определение 8.8) и условия из замечания 8.9.

Упражнение 8.2. Покажите, что для гармонических функций φ на графе Гельфанда-Цетлина условие нормировки $\varphi(\emptyset) = 1$ равносильно тому, что $\sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \varphi(\lambda) \text{Dim} \lambda = 1$ для всех N .

Указание. Воспользуйтесь доказательством предложения 8.6.

Упражнение 8.3. Проверьте, что при вложении $U(N-1) \hookrightarrow U(N)$, определенном в §1.5, обратная проекция пространств функций переводит $\Upsilon(N)$ в $\Upsilon(N-1)$.

Указание. Воспользуйтесь правилом ветвления многочленов Шура (§1.5).

Упражнение 8.4. Проверьте, что функция $\varphi_\lambda(\mu) = \frac{\text{Dim}(\mu, \lambda)}{\text{Dim} \lambda}$ (где $\lambda \in \text{Sign}(N)$) удовлетворяет условию гармоничности (8.2) до уровня N . Обоснуйте рекуррентную конструкцию функции $\varphi_\lambda(\mu)$ из замечания 8.17.

Упражнение 8.5. Проверьте, что замощение, о котором шла речь, действительно однозначно определяется заданием вертикальных ромбов.

9 Факторы фон Неймана

В этой лекции будут кратко изложены начальные сведения об алгебрах и факторах фон Неймана, которые нам понадобятся. Ссылки на литературу можно найти в статье “von Neumann algebras” в Википедии. В частности, отмечу указанный там курс Вогана Джонса, который можно скачать. В дополнение укажу еще книгу Браттели–Робинсон, первый том которой переведен на русский. Полезная сводка результатов об алгебрах и факторах фон Неймана приведена в конце книги Диксмье о C^* -алгебрах.

Факторы фон Неймана являются бесконечномерным обобщением матричных алгебр $M_n := \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ (здесь и далее $\mathcal{L}(H)$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H).

9.1 Алгебры с инволюцией

Определение 9.1. Мы будем рассматривать алгебры \mathcal{A} над \mathbb{C} с единицей и с инволюцией $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $a \mapsto a^*$, где $*$ — антилинейный антигомоморфизм, то есть,

$$(c \cdot a)^* = \bar{c} \cdot a^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad (a^*)^* = a \quad (9.1)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$ и $c \in \mathbb{C}$. Такие алгебры называются инволютивными или $*$ -алгебрами.

Пример 9.2. Алгебра ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(H)$ в гильбертовом пространстве H является модельным примером алгебры с инволюцией, которая есть обычная операция сопряжения операторов. Напомним определение сопряженного оператора A^* :

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A^*\eta) \quad \text{для всех } \xi, \eta \in H. \quad (9.2)$$

Если $\dim H = n < \infty$, то $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = M_n$ — алгебра $n \times n$ матриц, а инволюция представляет собой сопряжение матриц.

Мы будем рассматривать $*$ -подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$, т.е. подалгебры, содержащие единицу и замкнутые относительно инволюции в $\mathcal{L}(H)$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\dim \mathcal{A} < \infty$.⁶⁵ Тогда можно показать, что алгебра \mathcal{A} есть прямая сумма матричных алгебр в конечном числе:

$$\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}. \quad (9.3)$$

Выясним, как алгебра \mathcal{A} может быть реализована в гильбертовом пространстве H .⁶⁶ Сначала рассмотрим случай одного слагаемого, $\mathcal{A} = M_n$.

Предложение 9.3. Если $\mathcal{A} = M_n \subset \mathcal{L}(H)$ — инволютивная подалгебра с единицей, то существует изоморфизм $H \simeq \mathbb{C}^n \otimes \tilde{H}$, где \tilde{H} — вспомогательное гильбертово пространство, при котором элементы подалгебры \mathcal{A} суть в точности операторы вида $a \otimes \mathbf{1}$, где $a \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.⁶⁷

Выбрав базис в \tilde{H} , мы можем изображать элементы алгебры \mathcal{A} как (конечные или бесконечные) блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Здесь a — блок размера $n \times n$.

⁶⁵При этом пространство H может быть бесконечномерным.

⁶⁶То есть, изучить представления алгебры \mathcal{A} .

⁶⁷Здесь и далее через $\mathbf{1}$ мы обозначаем тождественный оператор.

Замечание 9.4. Это предложение означает, что любое представление $*$ -алгебры $\mathcal{A} = M_n$ кратное ее тавтологическому n -мерному представлению. Представление, кратное неприводимому, называется *примарным*. Заметим, что изоморфизм $H \simeq \mathbb{C}^n \otimes \tilde{H}$ с нужными свойствами определен не однозначно: если зафиксировать один такой изоморфизм, то всякий другой получается из него подкруткой на унитарный оператор в \tilde{H} .

Теперь перейдем к общему случаю конечномерных алгебр с инволюцией.

Предложение 9.5. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ — конечномерная инволютивная подалгебра с единицей. Тогда H канонически раскладывается в прямую сумму примарных представлений, в каждом из которых нетривиально действует лишь одна из компонент разложения $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}$.

9.2 Слабая операторная топология

Перейдем к рассмотрению бесконечномерных алгебр \mathcal{A} с инволюцией (определение 9.1). Нам теперь потребуется некоторое дополнительное топологическое условие на \mathcal{A} . Существует два различных подхода к введению этого условия, приводящие к разным теориям. Один вариант (C^* -алгебры) связан с именами Гельфанда, Наймарка и Сигала (I. E. Segal), а второй, который мы будем рассматривать (алгебры фон Неймана, или W^* -алгебры), — с именами фон Неймана и его соавтора Мюррея (Murray).

Определение 9.6. Слабая операторная топология на $\mathcal{L}(H)$ порождена всеми функциями вида $A \mapsto (A\xi, \eta)$, где $\xi, \eta \in H$. Другими словами, это слабейшая топология, относительно которой все эти функции непрерывны.

Фундаментальная система окрестностей оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ выглядит следующим образом. Возьмем $\xi_1, \dots, \xi_k \in h$ и $\varepsilon > 0$, тогда соответствующая окрестность имеет вид

$$\{B \in \mathcal{L}(H) : |(B\xi_i, \xi_j) - (A\xi_i, \xi_j)| < \varepsilon \quad \forall i, j = 1, \dots, k\}. \quad (9.5)$$

Замечание 9.7. Имеется некоторое различие в поведении слабой операторной топологии на всем пространстве $\mathcal{L}(H)$ и на его ограниченных (по операторной норме) подмножествах, примерами которых служат операторные шары

$$\mathcal{L}(H)_{\leq C} := \{A \in \mathcal{L}(H) : \|A\| \leq C\}, \quad C > 0. \quad (9.6)$$

А именно, на любом операторном шаре слабая операторная топология метризуема, а на всем $\mathcal{L}(H)$ — нет.

Отметим, что в слабой операторной топологии на $\mathcal{L}(H)$ умножение операторов $\mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ является раздельно непрерывным отображением (то есть, непрерывным по каждому из аргументов при фиксированном втором), но не является непрерывным отображением по совокупности переменных.

Определение 9.8. Инволютивная подалгебра с единицей $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если она замкнута в слабой операторной топологии.

Замечание 9.9. Для любого семейства операторов $A_i \in \mathcal{L}(H)$, $i \in I$, существует наименьшая содержащая его алгебра фон Неймана \mathcal{A} . (Говорят, что \mathcal{A} порождена этим семейством.) Эта алгебра получается добавлением к семейству $\{A_i\}_{i \in I}$ единицы, всех сопряженных операторов A_i^* , взятием линейной оболочки и последующим замыканием в слабой операторной топологии.

Ясно, что всякая конечномерная инволютивная подалгебра с единицей $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ является алгеброй фон Неймана. В следующем примере мы опишем общий вид коммутативной алгебры фон Неймана.

Пример 9.10. Пусть (X, μ) — некоторое пространство с мерой. Пусть $H = L^2(X, \mu)$. В качестве \mathcal{A} возьмем пространство $L^\infty(X, \mu)$, и каждой функции $f \in L^\infty(X, \mu)$ сопоставим оператор умножения на f в пространстве $L^2(X, \mu)$.

Напомним, что $L^2(X, \mu)$ и $L^\infty(X, \mu)$ определяются с точностью до эквивалентности функций: $f \sim g$, если $\mu(x: f(x) \neq g(x)) = 0$. В этом случае говорят, что $f = g$ μ -почти всюду, или $\text{mod } 0$. Пространство $L^2(X, \mu)$ состоит из классов функций, квадратично интегрируемых по мере μ , а пространство $L^\infty(X, \mu)$ — из *существенно ограниченных* функций, то есть таких, что

$$\|f\|_\infty := \inf_{\tilde{f}: \tilde{f} \sim f} \left(\sup_{x \in X} |\tilde{f}(x)| \right) < \infty. \quad (9.7)$$

Подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ является коммутативной алгеброй фон Неймана.

9.3 Факторы фон Неймана

Алгебры фон Неймана (определение 9.8) являются аналогом прямых сумм матричных алгебр (см. предложение 9.5). Аналогом самих матричных алгебр служат факторы фон Неймана, которые определяются следующим образом.

Определение 9.11. Алгебра фон Неймана \mathcal{A} называется *фактором*, если ее центр сводится к $\mathbb{C}\mathbf{1}$.

Замечание 9.12. В случае, если \mathcal{A} — алгебра с инволюцией и единицей и $\dim \mathcal{A} < \infty$, имеем (см. предложение 9.5)

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_i}). \quad (9.8)$$

Легко видеть, что центр \mathcal{A} изоморфен $\underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_k$. Ясно, что центр \mathcal{A} имеет вид $\mathbb{C}\mathbf{1}$ в том и только том случае, когда \mathcal{A} — одна матричная алгебра.

Стоит отметить, что вся алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ является фактором фон Неймана.

Перейдем к построению одного важного нетривиального примера фактора. Пусть G — счетная группа с бесконечными классами сопряженности, кроме $\{e\}$. Например, в качестве G может выступать бесконечная симметрическая группа $S(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(n)$ (это группа финитных перестановок натурального ряда), или F_n — свободная группа с n образующими, $n \geq 2$.

В качестве пространства H возьмем $\ell^2(G)$, то есть, гильбертово пространство с ортонормальным базисом $\{\delta_g\}_{g \in G}$. Пусть L и R — соответственно левое и правое регулярные представления G в H . Они задаются формулами

$$\begin{aligned} (L(g_1)f)(g) &= f(g_1^{-1}g); \\ (R(g_2)f)(g) &= f(gg_2), \end{aligned} \quad (9.9)$$

где $f \in H = \ell^2(G)$, $g_1, g_2, g \in G$. Ясно, что

$$L(g_1)\delta_g = \delta_{g_1g}, \quad R(g_2)\delta_g = \delta_{gg_2^{-1}}, \quad g \in G. \quad (9.10)$$

Отметим, что L и R коммутируют.

Рассмотрим семейство операторов $\{L(g_1), g_1 \in G\} \subset \mathcal{L}(H)$. Пусть \mathcal{A} — алгебра фон Неймана, порожденная этим семейством (см. замечание 9.9). Она есть замыкание (в смысле слабой операторной топологии, см. определение 9.6) линейной оболочки операторов $L(g_1)$, $g_1 \in G$.

Предложение 9.13. *Так определенная алгебра фон Неймана \mathcal{A} является фактором.*

Доказательство. Пусть оператор $A \in \mathcal{A}$ лежит в центре этой алгебры. Рассмотрим вектор $\delta_e \in H = \ell^2(G)$. Пусть

$$A\delta_e = f = \sum_{g \in G} f_g \delta_g. \quad (9.11)$$

Оператор A коммутирует со всеми операторами $L(g_1)$, $g_1 \in G$, так как он лежит в центре алгебры \mathcal{A} . Также A коммутирует со всеми операторами $R(g_2)$, $g_2 \in G$, так как A лежит в алгебре \mathcal{A} , порожденной L , а R и L коммутируют.

Отсюда можно заключить, что действие оператора A полностью определяется вектором $f = A\delta_e$. Действительно, для всех $h \in G$ имеем

$$A\delta_h = AR(h^{-1})\delta_e = R(h^{-1})A\delta_e = R(h^{-1})f. \quad (9.12)$$

Далее, вектор $f = A\delta_e \in \ell^2(G)$ — это функция на группе G . Из того, что A коммутирует с R и L , следует, что f постоянна на классах сопряженности группы G . Пользуясь тем, что в группе G все классы сопряженности, кроме $\{e\}$, бесконечны, заключаем, что если $f(g) \neq 0$ для некоторого $g \neq e$, то $f \notin \ell^2(G)$. Поэтому $f = c\delta_e$, и оператор A представляет собой оператор умножения на c , то есть, лежит в $\mathbb{C}1$.

Таким образом, \mathcal{A} есть фактор фон Неймана. \square

Замечание 9.14. Факторы, построенные таким путем по группам $S(\infty)$ и F_n , неизоморфны (как алгебры с инволюцией). Чтобы фактор, построенный по некоторой группе G (с бесконечными классами сопряженности) был изоморфен фактору, построенному по $S(\infty)$, оказывается, достаточно, чтобы группа G была *аппроксимативно конечной*, то есть изоморфна индуктивному пределу последовательности конечных групп.

Вопрос, изоморфны или нет факторы, построенные по F_{n_1} и F_{n_2} при $n_1 \neq n_2$, представляет собой открытую проблему.

Существует классификация факторов фон Неймана по трем типам: I, II и III. Факторы типа I — это алгебры всех операторов вида $\mathcal{L}(H)$. Тип I подразделяется на два подтипа в зависимости от размерности пространства H — I_n и I_∞ . В факторах типа II также выделяются два подтипа — II_1 и II_∞ . Факторы типов I_n и II_1 называются *конечными*, факторы типов I_∞ и II_∞ — *полуколическими*. Нам понадобятся только конечные факторы.

9.4 Состояния

Определение 9.15. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ — алгебра фон Неймана. Через \mathcal{A}^+ обозначим *конус неотрицательных элементов*. По определению, $A \in \mathcal{A}^+$ тогда и только тогда, когда $A = A^* \geq 0$ (в операторном смысле, то есть, $(A\xi, \xi) \geq 0$ для всех $\xi \in H$).

Условие $A = A^* \geq 0$ эквивалентно тому, что оператор A представим в виде $A = B^*B$ с $B \in \mathcal{A}$. Таким образом, условие $A = A^* \geq 0$ определяется внутренней структурой $*$ -алгебры \mathcal{A} и не зависит от ее реализации как подалгебры в $\mathcal{L}(H)$. Поэтому конус \mathcal{A}^+ также определяется только внутренней структурой \mathcal{A} .

Определение 9.16. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$. Рассмотрим гильбертово пространство $H \oplus H \oplus \dots$ (счетное число копий пространства H), и рассмотрим вложение $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H \oplus H \oplus \dots)$:

$$\mathcal{L}(H) \ni A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus H \oplus \dots). \quad (9.13)$$

При этом вложении слабая операторная топология пространства $\mathcal{L}(H \oplus H \oplus \dots)$ индуцирует в \mathcal{A} некоторую топологию, которая сильнее, нежели исходная слабая топология, индуцированная вложением $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$. Эта новая топология называется *ультраслабой топологией* в \mathcal{A} .

Замечание 9.17. На операторных шарах $\mathcal{L}(H)_{\leq C}$ ультраслабая топология совпадает со слабой.

Ультраслабая топология сохраняется при $*$ -изоморфизме алгебр фон Неймана и, тем самым, не зависит от реализации алгебры фон Неймана как подалгебры в $\mathcal{L}(H)$.

Определение 9.18. Состоянием на алгебре фон Неймана \mathcal{A} называется линейный функционал $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, обладающий следующими свойствами:

- (нормировка) $\tau(1) = 1$;
- (неотрицательность) $\tau|_{\mathcal{A}^+} \geq 0$;
- (непрерывность) τ непрерывен в ультраслабой топологии на \mathcal{A} .

Замечание 9.19. Вместо непрерывности функционала τ в ультраслабой топологии можно потребовать следующее условие.

Пусть $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A}^+$ произвольное возрастающее семейство элементов, где индекс i пробегает направленное множество I . Подробнее, I — такое частично упорядоченное множество, что для любой пары (x, y) существует z , для которого $z > x$ и $z > y$, и при этом если $i \leq j$, то $A_i \leq A_j$ в том смысле, что $A_j - A_i \in \mathcal{A}^+$. Можно показать, что тогда существует точная верхняя грань $\sup_i A_i$. Условие же состоит в том, что

$$\tau(\sup_i A_i) = \sup_i \tau(A_i). \quad (9.14)$$

Отметим, что справа уже стоит супремум числовой последовательности.

Приведем некоторые примеры.

Пример 9.20. • Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ — конечномерная матричная алгебра. Можно показать, что любое состояние на ней имеет вид $\tau(A) = \text{Tr}(AB)$, где $B \geq 0$ и $\text{Tr}(B) = 1$. Также это состояние можно записать в базисе как $\tau(A) = \sum_{i=1}^n c_i (A\xi_i, \xi_i)$, где $\|\xi_i\| = 1$, $c_i \geq 0$ и $\sum c_i = 1$. Состояния $A \mapsto (A\xi_i, \xi_i)$ можно называть простейшими. Таким образом, любое состояние является выпуклой линейной комбинацией простейших.

- Пусть $H = L^2(X, \mu)$ и $\mathcal{A} = L^\infty(X, \mu)$ (см. пример 9.10). Тогда любое состояние имеет вид

$$\tau(A) = \int_X A(x) \nu(dx), \quad (9.15)$$

где ν — некоторая вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно μ .

Из этих двух примеров видно, что состояния родственны вероятностным мерам.

9.5 Конечные следы и конечные факторы

Определение 9.21. Состояние τ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} называется *конечным следом*, если $\tau(AB) = \tau(BA)$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$.

Пример 9.22. • Если $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, то конечный след только один — это обычный нормированный след, $\tau(A) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A)$.

- На абелевой алгебре $L^\infty(X, \mu)$ все состояния являются конечными следами.

Определение 9.23. Фактор фон Неймана называется *конечным*,⁶⁸ если на нем существует конечный след.

⁶⁸См. также упоминание о классификации факторов фон Неймана в конце §9.3.

Можно показать, что если конечный след существует, то он единственный.

Фактор, построенный в §9.3 по бесконечной симметрической группе $S(\infty)$, является конечным. Действительно, легко понять, что состояние $\tau(A) = (A\delta_e, \delta_e)$ является конечным следом на этом факторе. В следующем подразделе мы дадим несколько иную реализацию этого фактора. Напомним (см. конец §9.3), что он имеет тип II_1 .

Приведем еще одно определение. Пусть \mathcal{A} — алгебра фон Неймана. Оператор $U \in \mathcal{A}$ называется *унитарным*, если $UU^* = U^*U = \mathbf{1}$. Ясно, что норма любого унитарного оператора равна единице, поэтому на множестве унитарных операторов слабая и ультраслабая топологии совпадают. Через $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ обозначим множество всех унитарных операторов. Можно показать, что это топологическая группа. Она порождает исходную алгебру фон Неймана. Строить унитарные операторы U можно из самосопряженных операторов следующими двумя способами. Пусть $A^* = A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$, тогда

- Оператор e^{iA} является унитарным;
- Оператор $\frac{A+i}{A-i} := (A+i\mathbf{1})(A-i\mathbf{1})^{-1}$ также является унитарным. Отображение $A \mapsto \frac{A+i}{A-i}$ называется *преобразованием Кэли* и играет важную роль.

Теперь можно дать эквивалентное определение конечного следа. А именно, состояние τ на алгебре фон Неймана \mathcal{A} является конечным следом тогда и только тогда, когда

$$\tau(UAU^{-1}) = \tau(A) \quad (9.16)$$

для всех унитарных операторов $U \in \mathcal{A}$. Другими словами, конечные следы — это в точности унитарно инвариантные состояния.

9.6 Вторая конструкция конечного фактора

Здесь мы построим конечный фактор фон Неймана M (типа II_1), который изоморфен фактору, построенному в §9.3 по группе $S(\infty)$.

Как уже было сказано, матричная алгебра $M_n := \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ есть конечный фактор типа I_n с конечным следом $\tau_n(A) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A)$. Рассмотрим вложенную цепочку алгебр⁶⁹

$$M_2 \subset M_4 \subset M_8 \subset \dots, \quad (9.17)$$

вложение $M_{2^k} \subset M_{2^{k+1}}$ определяется как

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Ясно, что это вложение согласовано с конечными следами τ_n .

Обозначим через M индуктивный предел цепочки (9.17), то есть, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{2^k}$. На M есть три важные структуры, наследуемые с допредельных объектов M_{2^k} :

1. структура $*$ -алгебры;
2. функционал $\tau: M \rightarrow \mathbb{C}$: он определен тем условием, что $\tau|_{M_{2^k}}$ совпадает с τ_{2^k} ;
3. структура предгильбертова пространства относительно скалярного произведения $(A, B) = \tau(AB^*)$.

Рассмотрим теперь левое регулярное представление алгебры M на самой себе. Оно продолжается на гильбертово пополнение \bar{M} пространства M , в результате чего мы реализуем M как $*$ -подалгебру в $\mathcal{L}(\bar{M})$. Затем, замыкая M в слабой топологии, получаем фактор фон Неймана со следом. Последний происходит из функционала τ .

⁶⁹Отметим, что вместо 2^k можно брать числа вида $n_1 n_2 \dots n_k$ (где n_i — произвольная последовательность натуральных чисел, больших единицы), полученные факторы будут эквивалентны.

10 Представление Вейля и спинорное представление

В этой и следующей лекциях мы опишем фундаментальные конструкции представлений бесконечномерных классических групп. Они значительно отличаются от конечномерного случая, в котором основным инструментом построения представлений является *индуцирование*.⁷⁰ В бесконечномерном случае индуцирование не работает из-за отсутствия меры Хаара.

Мы обсудим конструкции представления Вейля и спинорного представления. Они во многих отношениях сходны, и чтобы подчеркнуть это сходство, изложение будет вестись параллельно. Если в какой-то момент между этими конструкциями возникает различие, то *первый случай всегда соответствует представлению Вейля, а второй — спинорному представлению*.

10.1 Комплексные симплектическая и ортогональная группы

Рассмотрим пространство \mathbb{C}^{2N} с невырожденной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которая предполагается либо кососимметрической (что соответствует представлению Вейля), либо симметрической (что соответствует спинорному представлению). Эта форма задается матрицей M размера $2N \times 2N$, такой что

$$M' = \mp M, \quad (10.1)$$

где штрих означает транспонирование.⁷¹

Векторы пространства \mathbb{C}^{2N} записываются как столбцы, и мы имеем

$$\langle v_1, v_2 \rangle = v_2' M v_1, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2N}. \quad (10.2)$$

Определение 10.1. Через $L(N, \mathbb{C})$ обозначим группу обратимых линейных преобразований \mathbb{C}^{2N} , которые сохраняют форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Другими словами, $L(N, \mathbb{C})$ состоит из матриц g размера $2N \times 2N$, таких что $g' M g = M$.

Ясно, что $L(N, \mathbb{C})$ — группа Ли. Ее алгебра Ли, как нетрудно вычислить, определяется следующим образом:

$$\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) = \{X : MX + XM' = 0\} \subset \text{Mat}(2N \times 2N, \mathbb{C}). \quad (10.3)$$

Будем записывать матрицы размера $2N \times 2N$ как блочные 2×2 матрицы с блоками размера $N \times N$. Выберем базис в \mathbb{C}^{2N} , в котором матрица формы M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1_N \\ \mp 1_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.4)$$

где через 1_N обозначена единичная матрица размера $N \times N$ с единицами на главной диагонали.

Замечание 10.2. Иногда удобнее взять

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{1}_N \\ \mp \tilde{1}_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.5)$$

где $\tilde{1}_N$ — матрица размера $N \times N$ с единицами на побочной диагонали. Мы не будем использовать этот вариант, однако перейти от одного варианта к другому не составляет большого труда.

В блочной форме условие $MX + XM' = 0$ на матрицу $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} D &= -A', \\ B' &= \pm B, \\ C' &= \pm C. \end{aligned} \quad (10.6)$$

⁷⁰См., например, основополагающую работу [ГН50].

⁷¹Здесь и далее первый знак отвечает представлению Вейля, второй — спинорному представлению.

Замечание 10.3. Если M — кососимметрическая форма, то $L(N, \mathbb{C}) = Sp(2N, \mathbb{C})$ — комплексная симплектическая группа, а если M — симметрическая форма, то $L(N, \mathbb{C}) = O(2N, \mathbb{C})$ — комплексная ортогональная группа (но мы предпочитаем заменить ее на специальную ортогональную группу $SO(N, \mathbb{C})$). Соответствующие алгебры Ли обозначаются через $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$.

Определение 10.4. Через E_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$ обозначим *матричную единицу*, то есть, матрицу размера $N \times N$, в которой все элементы нулевые, кроме одной единицы, которая стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца.

В алгебре $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ можно выписать базис. Он состоит из трех видов матриц.

$$\begin{pmatrix} -E_{ji} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \pm E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} \pm E_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

где $i, j = 1, \dots, N$.

Отметим, что в случае спинорного представления (когда берется нижний знак из \pm) базисных элементов будет меньше.

10.2 Представление Вейля и спинорное представление комплексных алгебр Ли

Рассмотрим пространство тензоров $\mathbb{T}\mathbb{C}^N$, которое можно отождествить со свободной алгеброй от N переменных $\mathbb{C}\langle z_1, \dots, z_N \rangle$. Пусть $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ — две факторалгебры $\mathbb{T}\mathbb{C}^N$ по идеалам, порожденным соответственно всеми соотношениями вида $z_i z_j = \pm z_j z_i$, $i, j = 1, \dots, N$. Ясно, что $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ — алгебра полиномов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$, а $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ — алгебра Грассмана $\Lambda[z_1, \dots, z_N]$.

Замечание 10.5. • Факторалгебры $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ можно рассматривать и как подпространства в $\mathbb{T}\mathbb{C}^N$, но нам удобнее реализовать их именно как факторалгебры.

- В алгебре Грассмана можно вместо умножения $z_i z_j$ писать внешнее умножение $z_i \wedge z_j$, но для единообразия мы так делать не будем.

Базис в $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ состоит из мономов $z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}$, где

- В случае $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ предполагается $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- В случае $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ предполагается $m_i \in \{0, 1\}$.

Ясно, что $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ — конечномерная алгебра размерности 2^N , а алгебра $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ бесконечномерна.

Определение 10.6. Определим в $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ следующие операторы. Через z_i , $i = 1, \dots, N$ будем обозначать оператор умножения на z_i слева (в случае некоммутативной алгебры $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ это уточнение существенно), а через ∂_i — *левую производную* по z_i . В алгебре $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ оператор ∂_i есть обычная производная по z_i . В $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ действие оператора ∂_i на моном $z_{i_1} \dots z_{i_k}$ (такие мономы составляют базис в $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$) определяется следующим образом:

$$\partial_i(z_{i_1} \dots z_{i_k}) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin \{i_1, \dots, i_k\}; \\ (-1)^{j-1} z_{i_1} \dots z_{i_{j-1}} z_{i_{j+1}} \dots z_{i_k}, & \text{если } i = i_j. \end{cases} \quad (10.8)$$

Другими словами, если в мономе $z_{i_1} \dots z_{i_k}$ присутствует переменная z_i , то ее сначала надо перетащить влево (при этом возникнет знак $(-1)^{j-1}$), а затем удалить.

Предложение 10.7 (Квантово-механические соотношения). *В алгебре $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ выполнены следующие коммутационные соотношения между операторами из определения 10.6:*

$$[\partial_i, z_j] = \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad [\partial_i, \partial_j] = [z_i, z_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (10.9)$$

где $[A, B] = AB - BA$ — обычный коммутатор.

В алгебре $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ выполнены аналогичные соотношения, если заменить коммутатор на антикоммутатор $\{A, B\} := AB + BA$.

Доказательство. Упражнение 10.7. □

Построим представление алгебры Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ в пространстве $\Gamma^{\pm} \mathbb{C}^N$, указав операторы, отвечающие базисным элементам в $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ (определение 10.4). Эти операторы являются квадратичными выражениями от операторов z_i и ∂_i :

$$\begin{pmatrix} -E_{ji} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow z_i \partial_j \pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \pm E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \partial_i \partial_j, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} \pm E_{ji} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mp z_i z_j. \quad (10.10)$$

Здесь $i, j = 1, \dots, N$. Обратим внимание на слагаемое $\pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{1}$, оно возникает при коммутировании (соответственно, антикоммутировании) $z_i z_j$ с $\partial_i \partial_j$.

Можно проверить (упражнение 10.2), что формулы (10.10) действительно определяют представление алгебры Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ в $\Gamma^{\pm} \mathbb{C}^N$. Представление $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ в $\Gamma^+ \mathbb{C}^N$ называется *представлением Вейля*, а представление $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) = \mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ в $\Gamma^- \mathbb{C}^N$ — *спинорным представлением*.

Наша дальнейшая задача — посмотреть, на какие группы Ли продолжаются эти представления алгебр Ли, и что происходит, когда $N \rightarrow \infty$.

10.3 Интегрирование представлений комплексных алгебр Ли

Дадим сначала общее определение.

Определение 10.8. Пусть \mathfrak{l} — комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$ — ее вещественная форма.⁷² Пусть H — \mathfrak{l} -модуль (то есть, представление алгебры Ли \mathfrak{l}). Говорят, что модуль H *унитаризуем*, если в H существует скалярное произведение (невырожденная положительно определенная полуторалинейная форма) (\cdot, \cdot) , такое, что для всех $\xi, \eta \in H$ выполнено

$$(X\xi, \eta) = -(\xi, \sigma(X)\eta), \quad (10.11)$$

где $X \in \mathfrak{l}$ и $\sigma: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$ — инволюция сопряжения относительно вещественной формы $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$.⁷³

Нас интересует возможность продолжения (или, как говорят, *интегрирования*) представления комплексной алгебры Ли \mathfrak{l} до унитарного представления подходящей вещественной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$. Пусть алгебра \mathfrak{l} конечномерна и H — ее унитаризуемое представление \mathfrak{l} . Если $\dim H < \infty$, то такое продолжение всегда существует (для односвязной группы Ли). Если же $\dim H = \infty$, продолжение существует не всегда, но имеются удобные условия, при которых оно возможно: тогда унитарное представление действует в гильбертовом пополнении пространства H .

Напомним, что в §10.2 мы построили представление Вейля и спинорное представление комплексных алгебр Ли $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ в пространствах $\Gamma^+ \mathbb{C}^N$ и $\Gamma^- \mathbb{C}^N$, соответственно. Также в $\Gamma^{\pm} \mathbb{C}^N$ действуют операторы z_i и ∂_i , $i = 1, \dots, N$ (см. определение 10.6).

Предложение 10.9. В пространстве $\Gamma^{\pm} \mathbb{C}^N$ существует единственное скалярное произведение (\cdot, \cdot) , такое, что $(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 1$ (здесь $\mathbf{1}$ — единичный тензор нулевого порядка) и

$$(z_i \xi, \eta) = (\xi, \partial_i \eta) \quad (10.12)$$

для всех $\xi, \eta \in \Gamma^{\pm} \mathbb{C}^N$ и всех $i = 1, \dots, N$.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (\cdot, \cdot) , относительно которого мономы $z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}$ составляют ортогональный базис, и

$$(z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}, z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}) = m_1! \dots m_N!. \quad (10.13)$$

⁷²То есть, алгебра \mathfrak{l} является комплексификацией алгебры $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$.

⁷³Имеется в виду антилинейное отображение, фиксирующее элементы $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$.

Непосредственно проверяется, что оно удовлетворяет условиям предложения. Проверка его единственности использует то очевидное обстоятельство, что любой базисный моном получается из $\mathbf{1}$ применением монома от операторов z_i . Используя это и (10.12), легко вычислить тогда скалярное произведение двух базисных мономов. \square

Из этого предложения легко увидеть, что представление Вейля или спинорное представление алгебр Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ унитаризуемо относительно следующей вещественной формы:

$$\mathfrak{l}(N, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R}); \\ \mathfrak{o}(2N, \mathbb{R}), \end{cases} \quad (10.14)$$

— вещественная симплектическая или вещественная ортогональная алгебра Ли, соответственно. Отметим, что алгебра $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{R})$ компактна, в то время как $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R})$ — нет. Алгебра $\mathfrak{l}(N, \mathbb{R})$ выделяется из $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ условием $\sigma(X) = X$, где инволюция σ выглядит так:

$$\sigma: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A^* & \mp C^* \\ \mp B^* & D^* \end{pmatrix}. \quad (10.15)$$

Здесь элементы алгебры $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ представляются как блочные 2×2 матрицы с блоками размера $N \times N$, а звездочка означает обычное сопряжение матриц. Эквивалентным образом алгебру Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{R})$ в ее двух вариантах можно определить так:

$$\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R}) = \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(N, N); \quad \mathfrak{o}(2N, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(2N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2N). \quad (10.16)$$

Здесь $\mathfrak{u}(2N)$ — алгебра Ли унитарной группы в \mathbb{C}^{2N} , а $\mathfrak{u}(N, N)$ — алгебра Ли псевдоунитарной группы, сохраняющей индефинитное скалярное произведение в \mathbb{C}^{2N} , задаваемое матрицей

$$\begin{pmatrix} -1_N & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Отметим еще, что в обоих случаях алгебра $\mathfrak{l}(N, \mathbb{R})$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ (здесь черта означает комплексное сопряжение), на которые дополнительно накладывается условие принадлежности к $\mathfrak{u}(N, N)$ или $\mathfrak{u}(2N)$, соответственно:

$$A = -A^*, \quad B = \pm B^*. \quad (10.18)$$

Подобную реализацию можно указать также и для группы $L(N, \mathbb{R})$. А именно, в случае представления Вейля

$$L(N, \mathbb{R}) = Sp(2N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\} \cap U(N, N) \quad (10.19)$$

— вещественная симплектическая группа, а в случае спинорного представления

$$L(N, \mathbb{R}) = O(2N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\} \cap U(2N) \quad (10.20)$$

— вещественная ортогональная группа. Здесь $U(N, N)$ и $U(2N)$ — псевдоунитарная и унитарная группы пространства \mathbb{C}^{2N} , соответственно. Данную конструкцию групп $Sp(2N)$ и $O(2N)$ можно называть их *комплексной реализацией* (ср. со стандартной реализацией, когда элементами групп являются вещественные матрицы). См. также упражнение 10.3.

Замечание 10.10. В группы $L(N, \mathbb{R})$ в комплексной реализации очень удобно вкладывается унитарная группа $U(N)$:

$$U(N) \ni U \mapsto \begin{pmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \in L(N, \mathbb{R}). \quad (10.21)$$

Сформулируем без доказательства итоговый результат о представлении Вейля и спинорном представлении конечномерных групп:

Теорема 10.11. *Представление Вейля и спинорное представление комплексных алгебр $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ интегрируется до унитарного представления групп $Mp(2N, \mathbb{R})$ (вещественная метаблектическая группа) и $Spin(2N, \mathbb{R})$ (вещественная спинорная группа).*

Группа $Mp(2N, \mathbb{R})$ является двулистным накрытием группы $Sp(2N, \mathbb{R})$, а $Spin(2N, \mathbb{R})$ — двулистным накрытием группы $SO(2N, \mathbb{R})$. Группа $Spin(2N, \mathbb{R})$ компактна, а $Mp(2N, \mathbb{R})$ — нет.

Замечание 10.12. Группа $Spin(2N, \mathbb{R})$ действует в конечномерной алгебре Грассмана $\Lambda[z_1, \dots, z_N]$, а группа $Mp(2N, \mathbb{R})$ — в гильбертовом пополнении алгебры полиномов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ по скалярному произведению из предложения 10.9. В духе нашего параллельного изложения двух представлений, обозначим оба пространства через H_N .

Пополнение $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ состоит из голоморфных функций $f(z)$ на \mathbb{C}^N со скалярным произведением, определенным гауссовской мерой:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{C}^N} f(z)\bar{g}(z)e^{-(z,z)} d_{Lebesgue}(z). \quad (10.22)$$

Разумеется, в пространство входят только функции с $(f, f) < \infty$.

10.4 Переход к индуктивному пределу

Рассмотрим индуктивные пределы конструкций, описанных выше.

- Алгебры $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ вложены следующим образом:

$$\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{l}(N+1, \mathbb{C}), \quad X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (10.23)$$

Здесь A, B, C, D — $N \times N$ матрицы, при вложении $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{l}(N+1, \mathbb{C})$ каждая из этих матриц «окаймляется» нулями.

- Группы $L(N, \mathbb{C})$ вложены аналогично:

$$L(N, \mathbb{C}) \hookrightarrow L(N+1, \mathbb{C}), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline c & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (10.24)$$

только матрицы a, b, c, d «окаймляются» немного по-другому.

Обозначим индуктивный предел групп $L(N, \mathbb{R})$ через $L(\infty, \mathbb{R})$.

- Существуют также естественные вложения пространств H_N :

$$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N] \hookrightarrow \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{N+1}], \quad \Lambda[z_1, \dots, z_N] \hookrightarrow \Lambda[z_1, \dots, z_{N+1}]. \quad (10.25)$$

Отметим, что эти вложения изометричны относительно скалярного произведения, определенного в предложении 10.9.

Обозначим через H гильбертово пополнение индуктивного предела пространств H_N .

Таким образом, мы получаем представление Вейля и спинорное представление групп $Mp(2\infty, \mathbb{R})$ и $Spin(2\infty, \mathbb{R})$, соответственно⁷⁴ в пространстве H . Наша следующая задача — расширить эти представления на более широкие группы, пополюя $L(\infty, \mathbb{R})$ в подходящей топологии. Для этого нам понадобятся операторные идеалы.

⁷⁴А также «более привычных» групп $Sp(2\infty, \mathbb{R})$ и $SO(2\infty, \mathbb{R})$.

10.5 Операторные идеалы

Более подробное изложение материала этого подраздела см. в книгах [Sim05] и [ГК65].

Пусть \mathcal{H} — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — алгебра ограниченных операторов в \mathcal{H} . Нас будут интересовать двусторонние идеалы в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, которые также инвариантны относительно операции сопряжения в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отметим следующие два примера:

- Оператор в \mathcal{H} называется *конечномерным*, если его образ представляет собой конечномерное пространство. Алгебра всех конечномерных операторов в \mathcal{H} является двусторонним идеалом в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Оператор в \mathcal{H} называется *компактным*, если он переводит ограниченные множества в предкомпактные (то есть, такие, замыкания которых суть компакты). Алгебра компактных операторов также является двусторонним идеалом в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Очевидно, конечномерные операторы компактны. Оказывается, между алгебрами конечномерных и компактных операторов есть еще много двусторонних идеалов.

Для $1 \leq p < \infty$ обозначим через ℓ^p пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с конечной нормой $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$.

Предложение 10.13 (Полярное разложение). *Для каждого ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ существует самосопряженный неотрицательно определенный ограниченный оператор (обозначаемый через $|A|$) и унитарный оператор U , такие, что*

$$A = |A|U. \quad (10.26)$$

В качестве $|A|$ можно взять оператор $(AA^*)^{1/2}$, который строится с помощью спектральной теоремы.⁷⁵ Если оператор A вырожден, то оператор U определяется неоднозначно, но нам это сейчас не так важно.

Определение 10.14. Если оператор A компактен, то $|A|$ — тоже, и поэтому у $|A|$ существуют собственные числа $x = (x_1, x_2, \dots)$. Числа x_i называются *сингулярными числами* оператора A .

Определение 10.15. Пусть $1 \leq p < \infty$. Через $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ обозначим множество компактных операторов A , у которых сингулярные числа $x = (x_1, x_2, \dots)$ лежат в ℓ^p . Норма в \mathcal{L}^p определяется как $\|A\|_p := \|x\|_p$.

Можно показать, что $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ — действительно двусторонние идеалы в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, инвариантные относительно сопряжения. Конечномерные операторы содержатся в каждом \mathcal{L}^p и плотны в нем по норме $\|\cdot\|_p$, а сами \mathcal{L}^p являются банаховыми пространствами. Можно также считать, что пространство всех компактных операторов — это $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})$. Норма $\|\cdot\|_p$ является унитарно инвариантной, то есть, $\|UAU^{-1}\|_p = \|A\|_p$ для любого $A \in \mathcal{L}^p$ и любого унитарного оператора U .

Отметим, что $\mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^{p_2}$ при $p_1 < p_2$.

Определение 10.16. Элементы пространства $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ называются *ядерными операторами*,⁷⁶ а элементы $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ — *операторами Гильберта-Шмидта*.

Ядерные операторы имеют след, а именно, существует непрерывная функция Tr на $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, которая на конечномерных операторах совпадает с обычным следом. Функция $A \mapsto \det(1 + A)$ также продолжается по непрерывности с конечномерных операторов на ядерные.

Пространство $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ можно отождествить с $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ (комплексное сопряжение здесь означает, что мы меняем комплексную структуру в \mathcal{H}). Произведение двух операторов Гильберта-Шмидта есть ядерный оператор, поэтому в $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ можно определить скалярное произведение по формуле $(A, B) = \text{Tr}(AB^*)$.

⁷⁵Как известно из спектральной теоремы, оператор AA^* подобен оператору умножения на неотрицательную функцию f . Через $(AA^*)^{1/2}$ обозначается оператор, который получается при замене функции f на \sqrt{f} .

⁷⁶Англ. *trace class operators*.

10.6 Пополнение индуктивных пределов

Группы $Sp(2\infty, \mathbb{R})$ и $SO(2\infty, \mathbb{R})$ определялись как индуктивные пределы. Они состоят из операторов в координатном пространстве $\mathcal{H} = \ell^2 \oplus \ell^2$ (данный вид пространства \mathcal{H} обусловлен тем, что мы представляли наши матрицы как блочные 2×2 матрицы с блоками размера $N \times N$), представимых в виде $1 + A$, где A — конечномерный оператор. Поскольку конечномерные операторы плотны в каждом $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, можно рассматривать пополнения этих групп по норме \mathcal{L}^p .

Рассмотрим для примера группу $Sp(2\infty, \mathbb{R}) = \varinjlim Sp(2N, \mathbb{R})$. Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (10.27)$$

где $a, b \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. На эти матрицы накладывается два условия: первое есть псевдоунитарность матрицы, что выражается соотношениями типа

$$-aa^* + bb^* = -1, \quad -ab' + ba' = 0 \quad (10.28)$$

а второе условие состоит в том, что $a - 1$ и b — конечномерные операторы.

Пополнение группы $Sp(2\infty, \mathbb{R})$ в $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ получается в результате подходящего изменения второго условия: вместо конечномерности операторов $a - 1$ и b мы требуем теперь, чтобы они лежали в $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$. Обозначим это пополненную группу через $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$. Топология в $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ определяется нормой пространства $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$.

Обозначим через $\overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$ полную симплектическую группу, которая возникает при полном снятии второго условия.

Из того, что $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ — двусторонние идеалы в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, следует, что $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ для всех $1 \leq p < \infty$ является нормальной подгруппой в $\overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$.

Точно так же можно определить группы $SO(2\infty, \mathbb{R})_p$ и полную ортогональную группу $\overline{O}(2\infty)$.

Далее, у групп $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ и $SO(2\infty)_p$ имеются двулистные накрытия, которые мы будем обозначать через $Mp(2\infty, \mathbb{R})_p$ и $Spin(2\infty)_p$.

Справедлива следующая теорема о продолжении представления Вейля и спинорного представления с индуктивных пределов групп на их пополнения.

Теорема 10.17. *Представление Вейля и спинорное представление продолжаются по непрерывности с $Mp(2\infty, \mathbb{R})$ и $Spin(2\infty)$ на $Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$ и $Spin(2\infty, \mathbb{R})_1$, соответственно.*

Так как $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p \triangleleft \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$, то для всех p (и, в частности, для $p = 1$) группа $\overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$ действует на $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ сопряжениями. Это действие продолжается на двулистное накрытие $Mp(2\infty, \mathbb{R})_p$.

Пусть W — представление Вейля группы $Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$. Пусть $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$. Если $g \in Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$, то ясно, что $hgh^{-1} \in Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$. Поэтому можно определить представление

$$W_h(g) := W(hgh^{-1}). \quad (10.29)$$

Возникает естественный вопрос: как соотносятся между собой представления W и W_h ? В конечномерном случае они эквивалентны, так как $g \mapsto hgh^{-1}$ есть внутренний автоморфизм автоморфизм группы. Разумеется, если $h \in Sp(2\infty, \mathbb{R})_1$, то W_h и W эквивалентны. Оказывается, что это верно для большего множества сопрягающих элементов h , но не для всех $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$:

Теорема 10.18. *Элементы $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$, сохраняющие представление Вейля — это в точности такие $h = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, что b является оператором Гильберта-Шмидта.*

Операторы $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$, описанные в предыдущей теореме, на самом деле образуют группу, и представление Вейля можно продолжить на нее в качестве проективного представления.

Точно такой же результат имеет место и для спинорного представления.

10.7 Упражнения

Упражнение 10.1. Проверьте соотношения из предложения 10.7.

Упражнение 10.2. Проверьте, что формулы (10.10) действительно определяют представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ в $\Gamma^+ \mathbb{C}^N$, и алгебры Ли $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ в $\Gamma^- \mathbb{C}^N$.

Упражнение 10.3. Как осуществляется переход от комплексных реализаций (10.19) и (10.20) групп $Sp(2N, \mathbb{R})$ и $O(2N)$ к стандартным вещественным реализациям?

11 Фактор–представления и сферические представления

11.1 Конечные фактор–представления

Пусть \mathcal{K} — произвольная группа (дискретная или топологическая), \mathcal{A} — фактор фон Неймана (см. определения 9.8 и 9.11). Элементы \mathcal{A} мы также будем называть операторами. Напомним, что через $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ обозначается группа унитарных операторов фактора \mathcal{A} , то есть, таких операторов $U \in \mathcal{A}$, что $UU^* = U^*U = \mathbf{1}$. Это действительно группа, и даже топологическая группа относительно ультраслабой топологии (впрочем, на \mathcal{U} ультраслабая топология совпадает со слабой и с сильной топологиями). Напомним, что алгебра фон Неймана, порожденная \mathcal{U} , совпадает с \mathcal{A} .

Определение 11.1. Отображение $\pi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{U}$ называется *фактор–представлением* группы \mathcal{K} , если

- π — гомоморфизм групп;
- Алгебра фон Неймана, порожденная образом $\pi(\mathcal{K})$ (см. замечание 9.9), совпадает со всем фактором \mathcal{A} . Это обозначается $\langle \pi(\mathcal{K}) \rangle = \mathcal{A}$;
- Если \mathcal{K} — топологическая группа, то π также предполагается непрерывным.

Пример 11.2. Пусть \mathcal{A} — фактор типа I_n , то есть, \mathcal{A} изоморфен $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ — алгебре всех операторов в \mathbb{C}^n . Ясно, что в этом случае $\mathcal{U} = U(n)$. При любой реализации фактора в гильбертовом пространстве π превращается в унитарное представление, кратное некоторому неприводимому представлению.

Нас будут интересовать конечные фактор–представления (то есть, представления, порождающие факторы типа I_n и II_1). Напомним, что на конечном факторе существует конечный след τ (см. определения 9.18 и 9.21) — линейный функционал, такой, что

- $\tau|_{\mathcal{A}^+} \geq 0$, где \mathcal{A}^+ — конус положительных элементов фактора \mathcal{A} ;
- $\tau(UAU^{-1}) = \tau(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{U}$;
- $\tau(\mathbf{1}) = 1$.

Для конечного фактор–представления, как и для конечномерного представления, можно определить *характер* — функцию χ на группе, равную

$$\chi(u) = \tau(\pi(u)), \quad u \in \mathcal{K}. \quad (11.1)$$

Пример 11.3. Если фактор \mathcal{A} имеет тип I_n , то при любой его реализации χ сводится к обычному нормированному характеру, $\chi(u) = \frac{\text{Tr } \pi(u)}{\text{Tr } \pi(e)}$. Заметим, что χ не зависит от кратности единственной неприводимой компоненты. Если же \mathcal{A} имеет тип II_1 , мы получаем естественное обобщение этого понятия. Видно, что нормировка характера здесь существенна (ср. с замечанием 2.9).

Сформулируем абстрактную теорему.

Теорема 11.4. *Конечное фактор–представление однозначно определяется своим характером.*

Как и в теории конечномерных представлений, характеры допускают определение, формально независимое от представлений. Предварительно введем

Определение 11.5. Функция χ на группе \mathcal{K} называется *положительно определенной*, если $\chi(u^{-1}) = \overline{\chi(u)}$ для всех $u \in \mathcal{K}$, и для любого конечного набора элементов группы $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{K}$ матрица $[\chi(u_i u_j^{-1})]_{i,j=1}^n$ является неотрицательно определенной, то есть, для произвольных чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \chi(u_i u_j^{-1}) \geq 0. \quad (11.2)$$

Заметим, что характер фактор–представления является положительно определенной функцией. Действительно, для любых $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{K}$ и $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ рассмотрим оператор $A = \sum_{i=1}^n c_i \pi(u_i) \in \mathcal{A}$. Ясно, что условие (11.2) равносильно тому, что $\tau(AA^*) \geq 0$ (что верно по условию неотрицательности следа).

Определение 11.6. Через $\Upsilon(\mathcal{K})$ обозначим множество всех функций $\chi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$, которые

- положительно определены;
- центральны, то есть, постоянны на классах сопряженности в \mathcal{K} ;
- нормированы, $\chi(e) = 1$;
- непрерывны, если группа \mathcal{K} — топологическая.

Ясно, что $\Upsilon(\mathcal{K})$ — выпуклое множество. Следующая теорема дает альтернативное определение характеров:

Теорема 11.7. *Характеры конечных фактор–представлений суть в точности крайние точки выпуклого множества $\Upsilon(\mathcal{K})$.*⁷⁷

Замечание 11.8. Для случая $\mathcal{K} = U(\infty)$ эта теорема уже была в лекции 8. Там определялось множество $\Upsilon(\infty)$. Легко понять, что это в точности $\Upsilon(U(\infty))$ в смысле определения 11.6.

Мы уже знаем описание всех крайних точек множества $\Upsilon(U(\infty))$, это функции Войкулеску (см. теорему 8.14). Из теорем 11.4 и 11.7 вытекает, что должны существовать конечные фактор–представления, соответствующие этим крайним точкам. В этой лекции мы сначала сведем фактор–представления к эквивалентному понятию *сферических представлений*, а затем предьявим явную конструкцию сферических представлений, которые соответствуют некоторым из этих характеров.

11.2 Сферические представления

Если фактор \mathcal{A} (например, типа Π_1) реализован внутри алгебры операторов $\mathcal{L}(H)$, то можно определить его *коммутант* \mathcal{A}' , то есть, множество всех операторов, коммутирующих с \mathcal{A} . Если вспомнить две конструкции фактора типа Π_1 из лекции 9, то видно, что в каждой из конструкций наряду с самим фактором неявно присутствует и его коммутант:

- В конструкции с помощью левого регулярного представления в $\ell^2(S(\infty))$ также можно рассматривать правое регулярное представление;

⁷⁷См. определение 8.12.

- В конструкции фактора с помощью индуктивного предела матричных алгебр размера 2^n также наряду с левым действием можно рассматривать и правое.

Поэтому фактор-представления группы \mathcal{K} естественным образом приводят к представлениям *дубля* группы \mathcal{K} , то есть, группы $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Дадим сначала более общее определение.

Определение 11.9. Пусть G — группа и $K \subset G$ — подгруппа. Нас интересуют неприводимые унитарные представления $T: G \rightarrow U(H)$.⁷⁸ Через H^K обозначим пространство K -инвариантных векторов в H . Такие векторы называются *сферическими*.

Пара (G, K) называется *парой Гельфанда*, если для любого неприводимого представления T группы G пространство H^K имеет размерность 0 или 1.

Определение 11.10. Представление пары Гельфанда (G, K) называется *сферическим*, если размерность H^K равна единице.

Определение 11.11. Возьмем в сферическом представлении T вектор $\xi \in H^K$ с $\|\xi\| = 1$. Он, конечно, определен лишь с точностью до умножения на комплексное число, по модулю равное единице, однако соответствующий ему *матричный элемент*

$$\varphi(g) := (T(g)\xi, \xi), \quad g \in G, \quad (11.3)$$

уже определяется однозначно. Функция φ называется *сферической функцией* представления T .

Сформулируем абстрактную теорему.

Теорема 11.12. *Неприводимое унитарное сферическое представление пары Гельфанда (G, K) однозначно определяется своей сферической функцией.*

Определение 11.13. Пусть (G, K) — пара Гельфанда. Через $\Phi(G, K)$ обозначим множество функций φ на группе G , которые удовлетворяют следующим свойствам:

- φ положительно определена;
- φ K -биинвариантна, или K -двусторонне инвариантна), то есть,

$$\varphi(u_1 g u_2) = \varphi(g) \quad \text{для всех } g \in G, u_1, u_2 \in K. \quad (11.4)$$

- $\varphi(e) = 1$;
- если в группе есть топология, то φ непрерывна;

Ясно, что $\Phi(G, K)$ — выпуклое множество. Сформулируем еще одну абстрактную теорему.

Теорема 11.14. *Неприводимые сферические представления пары Гельфанда (G, K) находятся во взаимно однозначном соответствии с крайними точками множества $\Phi(G, K)$.*

Приведем пример, который исторически привел к понятию сферического представления. Он также объясняет происхождение самого термина.

Пример 11.15. Пусть $G = SO(3)$ — группа собственных вращений трехмерного пространства. Пусть $K \subset G$ — подгруппа, сохраняющая третью ось Oz . Ясно, что $K \cong SO(2)$. K -биинвариантные функции на G должны быть инвариантны относительно правого действия группы K , поэтому их можно рассматривать как функции на сфере $G/K \cong S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Они к тому же инвариантны относительно левого действия группы K , то есть, вращений сферы S^2 вокруг оси Oz . Другими словами, эти функции постоянны вдоль каждой параллели.⁷⁹ Можно считать, что они на самом деле зависят от широты, а широту измерять вдоль вертикального диаметра сферы. Таким образом, широта будет числом из отрезка $[-1, 1]$. На самом деле, эти сферические функции являются многочленами Лежандра (с точностью до нормировочного множителя).

⁷⁸Это уже обычные представления, а не фактор-представления.

⁷⁹Мы считаем, что ось Oz направлена вверх.

Замечание 11.16. Существует много примеров пар Гельфанда: если K — компактная подгруппа, выделяемая инволютивным автоморфизмом из простой группы Ли G (в этом случае однородное пространство является римановым симметрическим пространством), то (G, K) является парой Гельфанда.

Сформулируем еще одну абстрактную теорему, которая нам в дальнейшем пригодится.

Теорема 11.17. *Индуктивный предел пар Гельфанда снова является парой Гельфанда.*

С этого момента мы ограничимся рассмотрением пар Гельфанда специального вида. А именно, пусть \mathcal{K} — произвольная дискретная или топологическая группа. Положим $G = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, а в качестве подгруппы $K \subset G$ возьмем *диагональ* $\{(u, u) : u \in \mathcal{K}\}$. Ясно, что $K \cong \mathcal{K}$.

Теорема 11.18. *Для любой (топологической) группы \mathcal{K} так определенная пара (G, K) является парой Гельфанда.*

Посмотрим, какими могут быть сферические представления этой пары. Пусть сперва группа \mathcal{K} компактна. Тогда известно, что все ее неприводимые унитарные представления конечномерны.

Предложение 11.19. *Все неприводимые сферические представления T пары (G, K) (где \mathcal{K} компактна) имеют вид*

$$T = \pi \otimes \bar{\pi}, \quad (11.5)$$

где π — неприводимое унитарное представление \mathcal{K} .

Представление $\bar{\pi}$ — это *сопряженное* представление, которое действует в пространстве $\overline{H(\pi)}$ (само π действует в $H(\pi)$). Пространство $\overline{H(\pi)}$ получается из $H(\pi)$ путем сопряжения комплексной структуры.

Доказательство. Реализуем T в $H(\pi) \otimes \overline{H(\pi)}$. Для конечномерных пространств верно, что

$$H(\pi) \otimes \overline{H(\pi)} \cong \mathcal{L}(H(\pi)). \quad (11.6)$$

(Отметим, что если пространство $H(\pi)$ бесконечномерно, то написанное равенство неверно; чтобы его исправить, необходимо $\mathcal{L}(H(\pi))$ заменить на $\mathcal{L}^2(H(\pi))$ — пространство операторов Гильберта–Шмидта.)

Представление $\pi \otimes \bar{\pi}$ действует в $H(\pi) \otimes \overline{H(\pi)}$. При отождествлении этого пространства с $\mathcal{L}(H(\pi))$ действие $\pi \otimes \bar{\pi}$ принимает вид

$$(\pi \otimes \bar{\pi})(u_1, u_2)A = T(u_1, u_2)A = \pi(u_1)A\pi(u_2)^{-1}, \quad A \in \mathcal{L}(H(\pi)), \quad u_1, u_2 \in \mathcal{K}. \quad (11.7)$$

При этом в $\mathcal{L}(H(\pi))$ есть единственное K -инвариантное подпространство — оно натянуто на единичный оператор.⁸⁰ \square

В случае, когда группа \mathcal{K} не компактна, а $H(\pi)$ бесконечномерно, это рассуждение не проходит, поскольку тогда единичный оператор не попадает в пространство операторов Гильберта–Шмидта. Однако, предложение остается в силе для любых групп \mathcal{K} , если вместо неприводимых унитарных представлений π рассматривать конечные фактор–представления.

Предложение 11.20. *Существует биективное соответствие между конечными фактор–представлениями π группы \mathcal{K} и неприводимыми сферическими представлениями T пары Гельфанда (G, K) , где $G = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ и K — диагональ.*

⁸⁰ Действительно, если бы существовал нескаларный K -инвариантный оператор A , то он был бы сплетающим для представления π с самим собой, что по лемме Шура (лемма 7.4) невозможно.

Доказательство. ($T \rightarrow \pi$) Пусть T — сферическое представление, тогда положим $\pi := T|_{\mathcal{K} \times \{e\}}$, то есть, просто возьмем ограничение представления T на первую компоненту. Можно показать, что π будет фактор-представлением группы \mathcal{K} , причем конечным: след на факторе задается матричным элементом, отвечающим сферическому вектору.

Отметим, что если представление T конечномерно, то в качестве фактор-представления при ограничении T на $\mathcal{K} \times \{e\}$ мы получим соответствующее неприводимое представление π (такое, что $T = \pi \otimes \bar{\pi}$), повторенное столько раз, какова его размерность (см. предложение 11.19).

($\pi \rightarrow T$) Пусть π — конечное фактор-представление группы \mathcal{K} , \mathcal{A} — соответствующий фактор фон Неймана. На \mathcal{A} есть конечный след τ и можно определить скалярное произведение $(A, B) := \tau(AB^*)$, $A, B \in \mathcal{A}$. Пусть $\overline{\mathcal{A}}$ — гильбертово пополнение пространства \mathcal{A} по этому скалярному произведению. Построим представление T в $\overline{\mathcal{A}}$ по формуле $T(u_1, u_2)A = \pi(u_1)A\pi(u_2)^{-1}$, $A \in \mathcal{A}$, $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$. Тогда можно показать, что единственным (с точностью до пропорциональности) сферическим вектором представления T является единичный оператор $\mathbf{1} \in \overline{\mathcal{A}}$. В случае фактора типа I_n построенное представление T будет тензорным произведением неприводимого представления на сопряженное к нему, но в случае II_1 это заведомо неверно. \square

Существует биекция между пространством $\Upsilon(\mathcal{K})$ (определение 11.6) и пространством $\Phi(G, K)$ (определение 11.13). Эту биекцию можно записать следующим образом:

- ($\Upsilon(\mathcal{K}) \rightarrow \Phi(G, K)$) Пусть $\chi \in \Upsilon(\mathcal{K})$, тогда $\varphi(u_1, u_2) := \chi(u_1 u_2^{-1})$, $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$.
- ($\Phi(G, K) \rightarrow \Upsilon(\mathcal{K})$) Пусть $\varphi \in \Phi(G, K)$, тогда $\chi(u) := \varphi(u, e)$.

Это соответствие основано на том простом факте, что биекция $\chi \leftrightarrow \varphi$ отождествляет центральные функции на \mathcal{K} и K -биинвариантные функции на $G = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ (где $K \subset G$ — диагональ). При этом остальные свойства, включенные в определение $\Upsilon(\mathcal{K})$ и $\Phi(G, K)$, автоматически переносятся с χ на φ и обратно.

Теперь ясно, какой более общий смысл имеет замечание о факторах \mathcal{A} и \mathcal{A}' , данное в начале этого подраздела. Пусть T — сферическое представление пары (G, K) со сферической функцией $\varphi(u_1, u_2)$. Тогда можно определить характер χ на \mathcal{K} по формуле $\chi(u) := \varphi(u, e)$, и мы получим характер конечного фактор-представления группы \mathcal{K} . Обозначим соответствующий фактор через \mathcal{A} . Но аналогично можно определить характер $\chi(u) := \varphi(e, u)$, и тогда получится фактор \mathcal{A}' (коммутант фактора \mathcal{A}).

11.3 Подготовка к построению сферических представлений

Теперь приступим к явной реализации сферических представлений, соответствующих функциям Войкулеску (см. теорему 2.21). Мы ограничимся двумя модельными примерами, которые соответствуют следующим характеристам:

- $\mathbb{T}^1 \ni u \mapsto \frac{1}{1-\alpha(u-1)}$, где $\alpha \geq 0$. Как функция на группе этот характер записывается в виде

$$\chi(U) = \det(1 - \alpha(U - 1))^{-1}, \quad U \in U(\infty). \quad (11.8)$$

- $\mathbb{T}^1 \ni u \mapsto 1 + \beta(u - 1)$, где $\beta \in [0, 1]$. Как функция на группе этот характер записывается в виде

$$\chi(U) = \det(1 + \beta(U - 1)), \quad U \in U(\infty). \quad (11.9)$$

Представления, соответствующие всем остальным функциям Войкулеску, можно по свести к этим двум случаям, используя бесконечные тензорные произведения.⁸¹ Для построения двух искомых сферических представлений мы используем представление Вейля и спинорное представление, построенные в предыдущей лекции.

⁸¹Нужно еще реализовать факторпредставления, связанные с параметром γ ; это также возможно.

Напомним, что представление Вейля алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R})$ и спинорное представление алгебры Ли $\mathfrak{o}(2N)$ действуют в пространствах $\Gamma^+\mathbb{C}^N = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ и $\Gamma^-\mathbb{C}^N = \Lambda[z_1, \dots, z_N]$ соответственно. На комплексификациях этих алгебр представления были заданы явными формулами (10.10). Эти представления являются унитаризируемыми (определение 10.8) и интегрируются до представлений групп $Mp(2N, \mathbb{R})$ и $Spin(2N)$. Эти группы являются двулистными накрытиями групп $Sp(2N, \mathbb{R})$ и $O(2N)$ соответственно.

Нам потребуется заменить N на $2N$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ (все комплексные матрицы размера $2N \times 2N$) и зададим два ее вложения: одно в алгебру Ли $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C})$, другое в алгебру Ли $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C})$. Как и в предыдущей лекции, мы будем писать единообразные формулы для обоих представлений, причем верхний знак всегда будет соответствовать первому представлению, а нижний — второму. Элементы $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ будем записывать в блочном виде $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A, B, C, D — $N \times N$ матрицы, а элементы $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C})$ — в виде соответствующих матриц 4×4 . Вложения выглядят следующим образом:

$$\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & 0 & B \\ 0 & -D' & \pm B' & 0 \\ \hline 0 & \pm C' & -A' & 0 \\ C & 0 & 0 & D \end{array} \right). \quad (11.10)$$

Здесь как и раньше штрих означает транспонирование. Легко проверить, что условия (10.1) выполнены, поэтому правая матрица действительно лежит в $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C})$).

Для последних алгебр мы располагаем представлениями в $\Gamma^\pm\mathbb{C}^{2N}$, см. формулы (10.10), задающие представление на базисных элементах. Ограничивая эти представления на подалгебру $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$, мы получим два ее представления, действующих в тех же пространствах $\Gamma^\pm\mathbb{C}^{2N}$.

Выпишем их в явном виде. Пространство \mathbb{C}^{2N} будем рассматривать как $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N$, и в $\Gamma^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ операторы умножения и дифференцирования⁸² обозначим через $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N, z_1, \dots, z_N$ и $\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_N, \partial_1, \dots, \partial_N$ соответственно. Тогда действие на базисных элементах выглядит так:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow -\tilde{z}_j \tilde{\partial}_i \mp \frac{1}{2} \delta_{ij}; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} &\rightarrow z_i \partial_j \pm \frac{1}{2} \delta_{ij}; \\ \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \tilde{\partial}_i \partial_j; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \mp z_i \tilde{z}_j. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Используя подкрутку на одномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$, можно избавиться от множителей $\frac{1}{2}$ и модифицировать представления следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow -\tilde{z}_j \tilde{\partial}_i \mp \delta_{ij}; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} &\rightarrow z_i \partial_j; \\ \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \tilde{\partial}_i \partial_j; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \mp z_i \tilde{z}_j. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Рассмотрим две различные вещественные формы алгебры $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ — $\mathfrak{u}(N, N)$ и $\mathfrak{u}(2N)$. Напомним, что они состоят из матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, таких, что $A = -A^*$, $D = -D^*$, $C = \pm B^*$ (плюс отвечает $\mathfrak{u}(N, N)$, минус — $\mathfrak{u}(2N)$).

Замечание 11.21. Это соответствует тому, что алгебру $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{R})$ можно реализовать как $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2N, 2N)$, а $\mathfrak{o}(4N)$ — как $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(4N)$.

⁸²В случае некоммутативной алгебры $\Gamma^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ — левого умножения и левого дифференцирования.

Определение 11.22. Введем в $\Gamma^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ градуировку, полагая $\deg z_i = 1$ и $\deg \tilde{z}_i = -1$ для всех $i = 1, \dots, N$. Через $\Gamma_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ обозначим подалгебру элементов нулевой степени.

Легко проверить, что подалгебра $\Gamma_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ инвариантна относительно $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$. Кроме того, можно показать, что представление $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ в $\Gamma_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ неприводимо.

Замечание 11.23. Алгебра $\Gamma_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ имеет конечную размерность, поэтому неприводимое представление определяется старшим весом. Модуль $\Gamma_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ имеет вес $(\underbrace{1, \dots, 1}_N, 0, \dots)$. В

случае бесконечномерного модуля $\Gamma_0^+(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ также можно говорить о старшем весе, и он равен $(\underbrace{-1, \dots, -1}_N, 0, \dots)$. В обоих случаях вектор старшего веса есть $\mathbf{1}$.

Предложение 11.24. Представления представления вещественных алгебр Ли $\mathfrak{u}(N, N)$ в $\Gamma_0^+(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ и $\mathfrak{u}(2N)$ в $\Gamma_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ интегрируются до представлений групп $U(N, N)$ и $U(2N)$ соответственно.

Определение 11.25. Обозначим первое из представлений в предыдущем предложении через W_N , а второе — через S_N . Отметим, что S_N действует в конечномерном пространстве $\Gamma_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$, в то время как W_N — в гильбертовом пополнении пространства $\Gamma_0^+(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$.

В пространстве $\Gamma_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ есть выделенный вектор $\mathbf{1}$. Рассмотрим его матричный элемент.

Предложение 11.26. Имеем

$$\left(W_N \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right) = (\det a)^{-1}, \quad \left(S_N \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right) = \det a, \quad (11.13)$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ лежит в $U(N, N)$ или $U(2N)$, соответственно.

Идея доказательства. Мы рассмотрим только случай представления S_N . В случае представления W_N следует действовать аналогично, однако это требует обоснований, так как представление бесконечномерно.

В силу своей конечномерности, унитарное представление S_N группы $U(2N) \subset GL(2N, \mathbb{C})$ продолжается до комплексно-аналитического представления группы $GL(2N, \mathbb{C})$. Рассмотрим треугольное разложение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

Тогда, пользуясь формулами (11.12), можно увидеть, что

$$\left(S_N \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right) = \left(S_N \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right), \quad (11.15)$$

(отметим, что матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ надо перекинуть на второй вектор $\mathbf{1}$ и транспонировать).

Далее, из (11.12) видно, что элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}$ сохраняет $\mathbf{1}$. Значит, остается элемент $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, но опять-таки из (11.12) видно, что он умножает $\mathbf{1}$ на $\det a$. \square

11.4 Построение сферических представлений

Наша цель — построить представления бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$, отвечающие характерам $\chi(U) = \det(1 - \alpha(U - 1))^{-1}$ и $\chi(U) = \det(1 + \beta(U - 1))$, $U \in U(\infty)$. Мы будем строить соответствующие сферические представления, что, как объясняется в начале лекции, эквивалентно. Рассмотрим пару Гельфанда (G, K) , где $G = U(\infty) \times U(\infty)$ и $K \subset G$ — диагональ, $K \cong U(\infty)$.

Все конструкции, описанные в предыдущем подразделе при построении представлений W_N и S_N (определение 11.25), выстраиваются в индуктивные пределы. Таким путем мы получаем представление W_∞ группы $U(\infty, \infty)$, а также представление S_∞ группы $U(2\infty)$. Отметим, что обе эти группы состоят из операторов, отличающихся от единицы на конечномерный оператор.

А именно, они состоят из блочных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, которые псевдоунитарны либо унитарны, причем операторы $a - 1, b, c$ и $d - 1$ конечномерны.

До сих пор в наших построениях отсутствовали непрерывные параметры; сейчас они появятся. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ мы определим вложение дубля $G = U(\infty) \times U(\infty)$ в группы $U(\infty, \infty)$ и $U(2\infty)$, зависящие от t . Разберем сначала случай $U(\infty, \infty)$. Рассмотрим однопараметрическую группу гиперболических поворотов

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \in U(1, 1). \quad (11.16)$$

Интерпретируя $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ как бесконечномерные скалярные операторы, можно сказать, что гиперболические повороты лежат в $\overline{U}(\infty, \infty)$ — *полной псевдоунитарной группе*, состоящей из операторов вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для которых выполняется условие псевдоунитарности и на операторы a, b, c, d не накладывается никаких дополнительных условий, кроме ограниченности. См. также §10.6. Отметим, что полная группа $\overline{U}(\infty, \infty)$ действует сопряжениями на группе $U(\infty, \infty)_1$ — пополнении группы $U(\infty, \infty)$ по ядерной норме.

Вложение $G \hookrightarrow U(\infty, \infty)$ (зависящее от параметра t) имеет вид

$$G \ni (U_1, U_2) \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \in U(\infty, \infty). \quad (11.17)$$

Обозначим образ (U_1, U_2) через $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Легко проверяется, что эта матрица действительно лежит в группе $U(\infty, \infty)$ (а не только в $U(\infty, \infty)_1$). В частности, $a = \operatorname{ch}^2 t U_2 - \operatorname{sh}^2 t U_1$, и $a - 1$ — финитная матрица, так как $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

Рассмотрим матричный элемент, отвечающий $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ при представлении Вейля W_∞ (предложение 11.26 остается в силе). Он равен

$$(\det a)^{-1} = (\det U_2)^{-1} \det(1 - \operatorname{sh}^2 t (U_1 U_2^{-1} - 1))^{-1} \quad (11.18)$$

Множитель $(\det U_2)^{-1}$ можно отбросить, домножив все представление на одномерное. Обозначая $\operatorname{sh}^2 t = \alpha \geq 0$, видим, что мы получили требуемое сферическое представление, отвечающее характеру бесконечномерной унитарной группы $\chi(U) = \det(1 - \alpha(U - 1))^{-1}$. Как объясняется в начале лекции, этому сферическому представлению соответствует конечное факторпредставление с нужным характером.

Рассмотрим теперь второй случай. Здесь надо вкладывать дубль G в группу $U(2\infty)$ и пользоваться спинорным представлением вместо представления Вейля. Также вместо гиперболических поворотов следует использовать обычные, они лежат в *полной унитарной группе* $\overline{U}(2\infty)$

и действуют сопряжениями на $U(2\infty)_1$. В результате имеем

$$G \ni (U_1, U_2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in U(2\infty). \quad (11.19)$$

В левом верхнем углу этой матрицы будет стоять оператор $a = \cos^2 t U_2 + \sin^2 t U_1$, и матричный элемент спинорного представления будет иметь вид (см. предложение 11.26):

$$\det a = \det U_2 \det (1 + \sin^2 t (U_1 U_2^{-1} - 1)). \quad (11.20)$$

Множитель $\det U_2$, как и выше, не играет роли, так как отвечает одномерному представлению $U(\infty)$, и поэтому его можно не учитывать. Обозначая $\sin^2 t = \beta$, видим, что мы построили искомое сферическое представление, отвечающее характеру $\chi(U) = \det(1 + \beta(U - 1))^{-1}$. Ему соответствует искомое конечное фактор–представление, как объясняется в начале лекции.

Замечание 11.27. Отметим, что в конечномерном случае «подкрутка» на поворот или гиперболический поворот не меняет представления,⁸³ так как это сопряжение является внутренним автоморфизмом. В бесконечномерном случае этот автоморфизм уже не является внутренним, что объясняет, почему в результате получается не эквивалентное представление. Важное обстоятельство состоит в том, что «подкрутка» устроена так, что она оставляет неподвижными все элементы диагональной подгруппы K ; именно благодаря этому вектор $\mathbf{1}$ будет K -инвариантным.

Замечание 11.28. Мы видели, что теория фактор-представлений и теория неприводимых унитарных представлений приводят к одному и тому же результату, если ограничиваться конечными факторами и сферическими представлениями. Однако, в других задачах эти два подхода уже расходятся. Например, можно изучать более общие фактор-представления, не являющиеся конечными. С другой стороны, можно интересоваться не обязательно сферическими неприводимыми представлениями и не обязательно только парами Гельфанда (G, K) с $G = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, где $K \cong \mathcal{K}$ — диагональ. Последних имеется три: $\mathcal{K} = U(\infty), SO(\infty), Sp(\infty)$, но есть еще семь других (например, $G = U(\infty), K = SO(\infty)$, и т. п.). Все они связаны с римановыми симметрическими пространствами компактного типа. Первые три пары приводят к фактор-представлениям, а остальные 7 — нет.

12 Случайные матрицы и точечные процессы

12.1 Круговой унитарный ансамбль

В этой лекции мы переходим к новому сюжету, связанному со случайными матрицами и случайными точечными процессами. Для начала рассмотрим одну из первых моделей в теории случайных матриц — *круговой унитарный ансамбль Дайсона* (Dyson's circular unitary ensemble, CUE) [Dys62]. Когда говорят о случайных матрицах, имеют в виду вероятностную меру на каком-то пространстве матриц. Таким образом, случайная матрица — это случайный элемент этого пространства, распределенный согласно данной вероятностной мере.

Определение 12.1. Круговой унитарный ансамбль Дайсона задается нормированной мерой Хаара на унитарной группе $U(N)$.

Одним из основных объектов изучения в теории случайных матриц является спектр (набор собственных значений), который, естественно, также является случайным. Спектр унитарной матрицы $U \in U(N)$ — это неупорядоченный набор N чисел на единичной окружности,

$$\{u_1, \dots, u_N\} \subset \mathbb{T}^1. \quad (12.1)$$

⁸³Точнее, класс эквивалентности представления.

Если матрица $U \in U(N)$ принадлежит ансамблю Дайсона (то есть, распределена по нормированной мере Хаара), то совместное распределение собственных значений имеет вид

$$P(du_1 \dots du_N) = \text{const} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} |u_i - u_j|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N, \quad (12.2)$$

где $d\theta_1 \dots d\theta_N$ — мера Лебега на торе \mathbb{T}^N (мы считаем, что $u_j = e^{i\theta_j}$), а const — нормировочный множитель.

В теории случайных матриц изучается предельное поведение набора случайных точек $\{u_1, \dots, u_N\}$ на окружности, когда $N \rightarrow \infty$. Ясно, что с ростом N плотность точек возрастает. Можно раздуть окружность, так что ее радиус станет равным N , тогда средняя плотность точек будет равна единице. Можно изучать асимптотику расстояния между двумя соседними точками, а также многие другие вопросы — модель Дайсона оказывается очень богатой.

12.2 γ -модель

Ансамбль Дайсона описывает распределение меры Хаара унитарной группы $U(N)$ по классам сопряженных элементов. Нас же будут интересовать модели, связанные с двойственным к $U(N)$ объекту, т.е. представлениями этой группы.

Один из возможных вариантов построения таких моделей таков. Пусть π — конечномерное представление группы $U(N)$, тогда оно раскладывается в сумму неприводимых:

$$\pi = \bigoplus_{i \in I} m_i \pi_{\lambda^{(i)}}, \quad (12.3)$$

где $\pi_{\lambda^{(i)}}$ — неприводимое представление, соответствующее сигнатуре $\lambda^{(i)} \in \text{Sign}(N)$ (см. теорему 1.16), а m_i — кратности. Индекс i пробегает какое-то конечное множество I . Ясно, что

$$\dim \pi = \sum_{i \in I} m_i \dim \pi_{\lambda^{(i)}}, \quad (12.4)$$

и поэтому с разложением представления π на неприводимые можно связать вероятностную меру на конечном подмножестве в $\text{Sign}(N)$:

$$P = \frac{1}{\dim \pi} \sum_{i \in I} m_i \dim \pi_{\lambda^{(i)}} \delta_{\lambda^{(i)}}, \quad (12.5)$$

где $\delta_{\lambda^{(i)}}$ — дельта-мера, сосредоточенная на сигнатуре $\lambda^{(i)}$.

Эквивалентное определение: рассмотрим нормированный характер представления π и разложим его по неприводимым нормированным характерам (которые являются нормированными полиномами Шура, см. лекцию 1):

$$\chi_\pi = \sum_{i \in I} \tilde{c}_{\lambda^{(i)}} \tilde{s}_{\lambda^{(i)}}, \quad \tilde{c}_{\lambda^{(i)}} \geq 0, \quad \sum_{i \in I} \tilde{c}_{\lambda^{(i)}} = 1. \quad (12.6)$$

Тогда

$$P = \sum \tilde{c}_i \delta_{\lambda^{(i)}}.$$

Эту простую конструкцию можно слегка обобщить. Вспомним пространство $\Upsilon(U(N))$ центральных положительно определенных нормированных функций на $U(N)$ (см. лекции 8 и 11). Это счетномерный симплекс, вершины которого нумеруются сигнатурами из $\text{Sign}(N)$. Каждый элемент $\chi \in \Upsilon(U(N))$ однозначно задает вероятностную меру на $\text{Sign}(N)$: Мы выписываем каноническое разложение

$$\chi = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda, \quad \tilde{c}_\lambda \geq 0, \quad \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda = 1. \quad (12.7)$$

и затем полагаем

$$P = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \delta_\lambda.$$

Здесь уже видна аналогия между двумя моделями. А именно, в первой модели (ансамбль Дайсона) возникала случайная N -ка точек на окружности \mathbb{T}^1 , а во второй модели — случайная N -ка на решетке \mathbb{Z} целых чисел, двойственной к \mathbb{T}^1 . Эта аналогия будет углубляться по мере дальнейшего изучения второй модели.

Конкретизируем теперь вторую модель: возьмем в качестве $\chi \in \Upsilon(U(N))$ ограничение на $U(N)$ характера Войкулеску группы $U(\infty)$ (см. 2.21), отвечающего параметру $\gamma = \gamma^+$ (при этом все остальные параметры считаем равными нулю). Напомним, что этот характер задается следующей функцией Войкулеску:

$$\Psi(u) = e^{\gamma(u-1)}. \quad (12.8)$$

При ограничении на $U(N)$ возникает функция на группе

$$\chi(U) = \prod_{k=1}^N \Psi(u_k), \quad U \in U(N), \quad (12.9)$$

где $\{u_1, \dots, u_k\}$ — собственные значения матрицы U . Зададимся вопросом, какая вероятностная мера соответствует этой функции $\chi \in \Upsilon(U(N))$ в смысле (12.7). Другими словами, мы хотим разложить произведение (12.9) в сумму по нормированным функциям Шура $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N)$. Ответ дает следующее предложение. В нем используется обозначение $l_i := \lambda_i + N - i$; отметим, что все l_i различны.

Предложение 12.2. *Имеем*

$$\prod_{k=1}^N e^{\gamma(u_k-1)} = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N), \quad (12.10)$$

где коэффициенты \tilde{c}_λ имеют вид

$$\tilde{c}_\lambda = \frac{e^{-N\gamma} \gamma^{-\frac{N(N-1)}{2}}}{1!2! \dots (N-1)!} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{\gamma^{l_i}}{l_i!} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)^2. \quad (12.11)$$

Если какое-то из l_i отрицательно, то $\tilde{c}_\lambda = 0$.

Отметим, что в этой формуле, так же, как в (12.2), возникает квадрат определителя Вандермонда.

Доказательство. Достаточно найти разложение по обычным (не нормированным) функциям Шура

$$\prod_{k=1}^N e^{\gamma(u_k-1)} = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} c_\lambda s_\lambda(u_1, \dots, u_N), \quad (12.12)$$

поскольку коэффициенты \tilde{c}_λ и c_λ связаны следующим образом:

$$\tilde{c}_\lambda = c_\lambda \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)}{0!1!2! \dots (N-1)!}, \quad (12.13)$$

см., например, лекцию 3.

Далее, воспользуемся формулой (7.42), в которую подставим

$$\Psi(u) = e^{\gamma(u-1)} = e^{-\gamma} e^{\gamma u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{\gamma^l}{l!} e^{-\gamma}. \quad (12.14)$$

Тогда получим

$$c_\lambda = \det \left[\frac{\gamma^{\lambda_i - i + j}}{(\lambda_i - i + j)!} e^{-\gamma} \right]_{i,j=1}^N = e^{-\gamma N} \gamma^{\sum l_i} \gamma^{-\frac{N(N-1)}{2}} \cdot \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]_{i,j=1}^N. \quad (12.15)$$

Остается вычислить последний детерминант. Умножим и поделим его i -ю строку на $l_i! = (\lambda_i + N - i)!$, получим

$$\det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]_{i,j=1}^N = \frac{1}{\prod l_i!} \cdot \det \left[l_i^{\downarrow(N-j)} \right]_{i,j=1}^N. \quad (12.16)$$

Здесь $l_i^{\downarrow(N-j)} = l_i(l_i-1) \dots (l_i-N+j+1)$ — убывающая факториальная степень. Теперь заметим, что в $\det[l_i^{\downarrow(N-j)}]$ факториальные степени можно заменить обычными, и получим, что это — определитель Вандермонда, равный $\prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)$. Собирая все формулы вместе, видим, что предложение доказано. \square

Замечание 12.3. Отметим, что функцию $\chi \in \Upsilon(U(N))$, определенную формулой (12.9), можно получить и из других соображений. А именно, воспользуемся двойственностью Шура–Вейля. Рассмотрим пространство $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$, в котором действует группа $U(N)$.⁸⁴ Пусть $\chi^{(n)}$ — характер представления $U(N)$ в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\chi^{(n)}(u_1, \dots, u_N) = (u_1 + \dots + u_N)^n. \quad (12.17)$$

Теперь *рандомизируем* n , то есть, сделаем число n случайным, распределенным по закону Пуассона с параметром $\nu > 0$,

$$\text{Prob}(n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}, \quad (12.18)$$

и затем возьмем математическое ожидание. Другими словами, мы рассматриваем следующую функцию на группе $U(N)$ (также ясно, что она входит в $\Upsilon(U(N))$):

$$\chi(U) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!} \chi^{(n)}(U). \quad (12.19)$$

Оказывается, эта функция совпадает с (12.9), а параметры связаны соотношением $\gamma = \frac{\nu}{N}$ (см. упражнение 12.1).

Замечание 12.4. Отметим, что вероятностную меру, построенную в предложении 12.2, можно рассматривать не только как меру на N -ках целых чисел вида $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ (то есть, на сигнатурах), а также как меру на N -ках вида $(l_1, \dots, l_N) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Отметим, что все l_i различны, в то время как некоторые из λ_i могут совпадать.

12.3 Точечные процессы

Изложим формализм, охватывающий описанные выше модели и многие другие.

Пусть \mathfrak{X} — дискретное пространство, которое может быть конечным или счетным (например, $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ или $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ или $\mathfrak{X} = \{1, 2, \dots, N\}$).

Определение 12.5. (Точечной) *конфигурацией* в \mathfrak{X} называется любое подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$. Мы считаем, что в одной точке множества \mathfrak{X} не может находиться более одной точки конфигурации X .

⁸⁴Группа $U(N)$ действует в каждом \mathbb{C}^N тавтологически, а $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ есть тензорное произведение представлений.

Через $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ обозначим множество всех конфигураций на множестве \mathfrak{X} .⁸⁵ Пространство $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ наделяется топологией произведения «двоеточий» $\{0, 1\}$. Это вполне несвязное (totally disconnected) пространство. Разумеется, если \mathfrak{X} конечно, то и $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ тоже конечно.

Определение 12.6. *Точечным процессом* на множестве \mathfrak{X} называется борелевская вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Другими словами, точечный процесс — это случайная конфигурация на множестве \mathfrak{X} .

Замечание 12.7. Термин «точечный процесс» является не совсем удачным, однако он является общепринятым. Также точечные процессы иногда называют *точечными случайными полями*.

Если множество \mathfrak{X} конечно, то точечный процесс на \mathfrak{X} можно задать, просто определив вероятности всех конфигураций. Это также возможно, если \mathfrak{X} счетно, но число точек в конфигурации фиксировано, или если мера сосредоточена на подмножестве конечных конфигураций.

Например, обозначим через $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$ множество всех N -точечных конфигураций в \mathfrak{X} . Множество всех сигнатур длины N — $\text{Sign}(N)$ — можно отождествить с множеством $\text{Conf}_N(\mathbb{Z})$ (сигнатуре $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ соответствует множество $\{l_1, \dots, l_N\}$, где $l_i = \lambda_i + N - i$). Нашу γ -модель можно рассматривать как меру на $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, то есть, как N -точечный процесс в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. В предложении 12.2 мы как раз вычислили вероятность каждой отдельной конфигурации.

Однако, может случиться, что мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ не имеет атомов, то есть, вероятность каждой отдельной фиксированной конфигурации равна нулю. Ясно, что тогда меру нельзя определить путем задания вероятности каждой конфигурации. В следующем подразделе мы введем язык, позволяющий описывать такие неатомические меры.

12.4 Корреляционные функции

Пусть $\text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$ — множество всех конечных конфигураций. Если $A, B \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$, причем $A \subseteq B$, то через $U(A, B)$ обозначим множество $\{X \in \text{Conf}(\mathfrak{X}) : X \cap B = A\}$. Другими словами, $U(A, B)$ — это множество таких (не обязательно конечных) конфигураций в \mathfrak{X} , пересечение которых с «окном» B совпадает с A . Ясно, что в топологии пространства $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ множества $U(A, B)$ являются одновременно открытыми и замкнутыми, и они составляют базу топологии $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Отсюда следует, что любая борелевская мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ полностью определяется своими значениями на множествах вида $U(A, B)$.

Определение 12.8. Пусть P — борелевская вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Определим функцию на всех конечных конфигурациях

$$\rho : \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(C) := P\{X : X \supseteq C\}. \quad (12.20)$$

Другими словами, $\rho(C)$ — вероятность того, что случайная конфигурация X содержит множество C . Также можно сказать, что $\rho(C)$ — вероятность того, что в точках конечного множества $C \subset \mathfrak{X}$ окажутся точки случайной конфигурации.

Функция ρ называется *корреляционной функцией* точечного процесса P .

Предложение 12.9. *Корреляционная функция ρ однозначно определяет точечный процесс P .*

Доказательство. Пусть $C \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$. Обозначим множество $\{X : X \supseteq C\} \subset \text{Conf}(\mathfrak{X})$ через $V(C)$. Фиксируем $A, B \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$, $A \subseteq B$. Запишем следующую формулу, вытекающую из метода включений–исключений:

$$U(A, B) = \sum_{C: A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|C|-|A|} V(C), \quad (12.21)$$

⁸⁵Более привычное обозначение — $\{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$, однако, мы будем писать $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

где сумма рассматривается как операция над мультимножествами в \mathfrak{X} . Так как множества $U(A, B)$ полностью определяют меру, а их мера выражается через корреляционную функцию, предложение доказано. \square

Корреляционную функцию $\rho: \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ можно рассматривать как совокупность функций $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ на \mathfrak{X}^n , где

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \rho(\{x_1, \dots, x_n\}). \quad (12.22)$$

Функция ρ_n называется *n-точечной*, или *n-частичной* корреляционной функцией. По определению, ρ_n — симметрическая функция.

Функция $\rho_1(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, носит специальное название — *функция плотности*. Ясно, что $\rho_1(x)$ — вероятность обнаружить частицу в точке x , $\rho_2(x_1, x_2)$ — вероятность наличия частиц в двух данных различных точках x_1, x_2 и так далее.

Корреляционные функции являются гибким инструментом описания точечных процессов.

12.5 Детерминантные точечные процессы

Перейдем к рассмотрению важного класса точечных процессов — детерминантных точечных процессов.

Определение 12.10. Точечный процесс P называется *детерминантным*, если существует функция $K: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$, такая, что для любого $n = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n. \quad (12.23)$$

Функция $K(x, y)$ называется корреляционным ядром.

Можно сказать, что $\det K_X := \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$ — минор матрицы K размера $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$.

Более подробно определение 12.10 означает, что

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1) &= K(x_1, x_1), \\ \rho_2(x_1, x_2) &= \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (12.24)$$

и так далее.

Замечание 12.11. Общий точечный процесс полностью определяется счетным набором корреляционных функций с растущим числом аргументов $n = 1, 2, 3, \dots$, а детерминантный точечный процесс определяется только одной функцией от двух переменных. Тем самым, для задания детерминантного процесса нужно гораздо меньше информации, чем для задания общего процесса.

Замечание 12.12. Вопрос о том, как по корреляционным функциям $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ определить, является ли точечный процесс детерминантным, является открытым.

Замечание 12.13. Корреляционное ядро K определяется неоднозначно. Например, его «калибровка»

$$K(x, y) \mapsto \varphi(x)K(x, y)\varphi(y)^{-1}, \quad (12.25)$$

где φ — любая не обращающаяся в нуль функция на \mathfrak{X} , не меняет корреляционных функций (и тем самым не меняет точечного процесса). Кроме того, если ядро K не симметрично, то его можно транспонировать, это также не меняет корреляционных функций. Неясно, есть ли другие сколько-нибудь общие преобразования ядра, которые также не меняют корреляционных функций.

Можно показать, что модель Дайсона и γ -модель, определенные выше, являются детерминантными точечными процессами.

Мы далее рассмотрим один специальный класс N -точечных процессов и докажем его детерминантность.

12.6 Ортогональный полиномиальный ансамбль

Пусть теперь \mathfrak{X} — дискретное подмножество \mathbb{R} (например, решетка \mathbb{Z} или полурешетка $\mathbb{Z}_{\geq 0}$). Будем предполагать, что \mathfrak{X} счетно; в случае конечного множества ситуация только проще. Пусть W — всюду положительная функция на \mathfrak{X} , у которой существуют все моменты:

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} |x|^n W(x) < \infty \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots \quad (12.26)$$

Функция W называется *весовой функцией*.

Оказывается, по функции W для каждого $N = 1, 2, \dots$ можно построить N -точечный процесс в \mathfrak{X} (то есть, вероятностную меру на $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$). Он оказывается детерминантным. Такой точечный процесс называется *N -точечным ортогональным ансамблем* с весом W . Вероятность конфигурации $X \in \text{Conf}_N(\mathfrak{X})$ определяется как

$$P(X) := \text{const} \cdot \prod_{x \in X} W(x) \cdot V_N^2(X), \quad (12.27)$$

где $V_N^2(X)$ — квадрат определителя Вандермонда переменных $x \in X$. Отметим, что $V_N^2(X)$ не зависит от нумерации точек $x \in X$. Здесь и далее через const мы обозначаем различные нормировочные константы.

Предложение 12.14. *Мера (12.27) существует и является детерминантной.*

Теперь введем некоторые дополнительные обозначения, которые требуются, чтобы описать корреляционное ядро процесса P .

Рассмотрим *весовое* вещественное гильбертово пространство

$$\ell^2(\mathfrak{X}, W) := \left\{ f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|^2 := \sum_{x \in \mathfrak{X}} |f(x)|^2 W(x) < \infty \right\} \quad (12.28)$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_W := \sum_{x \in \mathfrak{X}} f(x)g(x)W(x). \quad (12.29)$$

Конечность всех моментов веса W означает, что пространство полиномов $\mathbb{R}[x]$ отображается в $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$. Поскольку \mathfrak{X} счетно, ядро этого отображения тривиально, т.е. $\mathbb{R}[x]$ является подпространством в $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$.

От весового пространства можно перейти к обычному:

$$\ell^2(\mathfrak{X}, W) \rightarrow \ell^2(\mathfrak{X}), \quad f \mapsto f\sqrt{W}. \quad (12.30)$$

Поэтому $\mathbb{R}[x]\sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X})$.

В пространстве $\mathbb{R}[x]\sqrt{W}$ рассмотрим подпространство размерности N :

$$\text{span} \{1, x, x^2, \dots, x^{N-1}\} \sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X}). \quad (12.31)$$

Через K обозначим оператор ортогонального проектирования на это подпространство. В $\ell^2(\mathfrak{X})$ существует канонический базис $\{e_x\}$, $e_x(y) = \delta_{xy}$, и в этом базисе оператор K записывается $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ матрицей.

Предложение 12.15. *Матрица K является корреляционным ядром процесса (12.27).*

Будем доказывать предложения 12.14 и 12.15 одновременно.

Доказательство. Применим процесс ортогонализации Грама–Шмидта к векторам $1, x, x^2, \dots \in \ell^2(\mathfrak{X}, W)$. В результате получим ортогональные многочлены p_0, p_1, p_2, \dots . Отметим, что переход от $\{x^i\}$ к $\{p_i\}$ представляет собой треугольное преобразование. Нормируем $\{p_i\}$ так, чтобы они были ортонормальны:

$$(p_n, x^k)_W = (p_n, p_k)_W = 0 \quad \text{для всех } k < n, \quad \deg p_n = n, \quad (p_n, p_n)_W = 1. \quad (12.32)$$

Положим

$$\varphi_i(x) := p_{i-1}(x) \sqrt{W(x)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (12.33)$$

Ясно, что

$$\text{span} \{1, x, x^2, \dots, x^{N-1}\} \sqrt{W} = \text{span} \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subset \ell^2(\mathfrak{X}). \quad (12.34)$$

Легко видеть, что формулу (12.27) для меры P можно переписать так:

$$P(x) = \text{const} \cdot (\det [\varphi_i(x_j)]_{i,j=1}^N)^2. \quad (12.35)$$

Также ясно, что матрица ортопроектора $K(x, y)$ на подпространство $\text{span} \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ имеет вид

$$K(x, y) = \sum_{i,j=1}^N \varphi_i(x) \varphi_j(y), \quad x, y \in \mathfrak{X}. \quad (12.36)$$

Теперь можно непосредственно перейти к вычислению корреляционных функций процесса P . Пусть $n \leq N$, фиксируем множество $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathfrak{X}$. Будем вычислять корреляционную функцию $\rho(Y)$. Все вычисления далее справедливы с точностью до умножения на константу. Ясно, что

$$\rho(Y) = \sum_{Z: |Z|=k} P(Y \sqcup Z), \quad (12.37)$$

где $k := N - n$. Заменяем суммирование по Z на суммирование по z_1, \dots, z_k , это приведет к появлению множителя $\frac{1}{k!}$. Таким образом,

$$\rho(Y) = \text{const} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{z_1, \dots, z_k \in \mathfrak{X}} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_N) \\ (j_1, \dots, j_N) \in \mathfrak{S}_N}} \pm \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \varphi_{i_{n+1}}(z_1) \dots \varphi_{i_{n+k}}(z_k) \times \\ \times \varphi_{j_1}(y_1) \dots \varphi_{j_n}(y_n) \varphi_{j_{n+1}}(z_1) \dots \varphi_{j_{n+k}}(z_k). \quad (12.38)$$

Здесь \mathfrak{S}_N — симметрическая группа, а \pm — произведение знаков перестановок (i_1, \dots, i_N) и (j_1, \dots, j_N) . Отметим, что в суммах выше мы можем предполагать, что числа z_1, \dots, z_k пробегают все множество \mathfrak{X} , так как если какое-то из z_m совпадет с каким-то из y_l , в определителе в (12.35) возникнет две одинаковые строки, и он будет равен нулю. В сумме выше это означает, что соответствующие слагаемые взаимно уничтожатся (ср. с более мощным методом инволюции в лемме 6.8).

В сумме (12.38) просуммируем сначала по $z_1, \dots, z_k \in \mathfrak{X}$. Ясно, что возникнут суммы вида

$$\sum_{z_1 \in \mathfrak{X}} \varphi_{i_{n+1}}(z_1) \varphi_{j_{n+1}}(z_1) = (\varphi_{i_{n+1}}, \varphi_{j_{n+1}})_{\ell^2(\mathfrak{X})} = \delta_{i_{n+1}, j_{n+1}} \quad \text{в силу ортонормальности.} \quad (12.39)$$

Так как множество $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ можно перенумеровать $k!$ способами, множитель $\frac{1}{k!}$ уходит. Кроме того, ясно, что как множества, $\{i_1, \dots, i_n\} = \{j_1, \dots, j_n\}$. Поэтому получаем

$$\rho(Y) = \text{const} \cdot \sum_{\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_n\}} \pm \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \varphi_{j_1}(y_1) \dots \varphi_{j_n}(y_n). \quad (12.40)$$

Здесь \pm — знак перестановки $I \rightarrow J$ ($I = \{i_1, \dots, i_n\}$ и $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ — две нумерации одного и того же множества). Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ — перестановка, такая, что $j_{\sigma(1)} = i_1, \dots, j_{\sigma(n)} = i_n$. Тогда

$$\rho(Y) = \text{const} \sum_{\sigma=(i_1, \dots, i_n) \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn} \sigma \cdot \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \varphi_{i_1}(y_{\sigma(1)}) \dots \varphi_{i_n}(y_{\sigma(n)}) \quad (12.41)$$

Теперь можно считать, что числа i_1, \dots, i_n — любые от 1 до N , а не обязательно различные (если какие-то два числа совпадают, то соответствующие слагаемые взаимно уничтожаются). Поэтому, суммируя по i_1, \dots, i_n от 1 до N и пользуясь (12.36), получим

$$\rho(Y) = \text{const} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn} \sigma K(y_1, y_{\sigma(1)}) \dots K(y_n, y_{\sigma(n)}) = \text{const} \cdot \det [K(y_i, y_j)]_{i,j=1}^n. \quad (12.42)$$

Константа здесь на самом деле равна единице, так как можно проделать все те же рассуждения для $Y = \emptyset$, и ясно, что $\rho(\emptyset) = \sum_{Z \in \text{Conf}_N(\mathfrak{X})} P(\emptyset \sqcup Z) = 1$. \square

Замечание 12.16. На самом деле, мы доказали более сильное утверждение. А именно, если K — матрица произвольного N -мерного проектора в пространстве $\ell^2(\mathfrak{X})$ (где счетное дискретное множество \mathfrak{X} уже не обязательно вложено в \mathbb{R}), то существует единственный N -точечный детерминантный процесс с ядром K . Ясно, что для N -точечного процесса мера $P(X)$ каждой конфигурации совпадает с N -частичной корреляционной функцией, поэтому этот процесс можно описать следующим образом:

$$P(X) = \det K_X, \quad |X| = N, \quad (12.43)$$

где $K_X = [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$ — соответствующая подматрица.

12.7 Упражнения

Упражнение 12.1. Докажите утверждение в конце замечания 12.3 о том, что функцию χ (12.9) можно также получить как характер представления $U(N)$ в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ со случайным n .

13 Точечные процессы. Продолжение

В этой лекции мы продолжим заниматься точечными процессами. Сначала обсудим некоторые дальнейшие свойства корреляционных функций точечных процессов (см. определение 12.8), а затем перейдем к описанию детерминантных процессов с эрмитово-симметричным корреляционным ядром (определение 12.10).

13.1 Некоторые замечания о корреляционных функциях

Напомним, что все происходит на конечном или счетном дискретном пространстве \mathfrak{X} . Точечный процесс — это вероятностная мера P на множестве конфигураций $\text{Conf}(\mathfrak{X}) := \{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$.⁸⁶ Корреляционная функция $\rho: \text{Conf}_{fin} \rightarrow \mathbb{R}_+$ определяется на всех конечных множествах по формуле $\rho(A) = P(X: X \supseteq A)$, $A \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$. При этом ρ — функция множества. Другой способ понимать этот объект — говорить, что ρ — это набор функций $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$, где ρ_n — функция на множестве

$$\tilde{\mathfrak{X}}^n := \underbrace{\mathfrak{X} \times \dots \times \mathfrak{X}}_n \setminus \{x_i = x_j: 1 \leq i \neq j \leq n\}. \quad (13.1)$$

⁸⁶Конфигурации мы считаем множествами, а не мультимножествами, поэтому не может быть двух частиц в одной точке.

Другими словами, $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ — это декартова степень \mathfrak{X}^n , из которой выкинуты все диагонали вида $\{x_i = x_j\}$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Функции ρ_n и ρ связаны следующим образом: $\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \rho(\{x_1, \dots, x_n\})$, где все x_i попарно различны.

Замечание 13.1. Мы будем предполагать, что корреляционные функции ρ_n зависят от попарно различных аргументов.

Замечание 13.2. Можно также считать, что $\rho_n = 0$, если $x_i = x_j$ для некоторых $1 \leq i \neq j \leq n$, и мы этим будем пользоваться.

Ясно также, что каждая из функций ρ_n является симметрической.

Напомним (предложение 12.9), что корреляционные функции определяют точечный процесс однозначно.

Замечание 13.3. Отметим, что это утверждение справедливо, если пространство \mathfrak{X} дискретно, однако на непрерывных пространствах в некоторых исключительных ситуациях оно может быть неверным. Как правило, все же, корреляционные функции однозначно задают точечный процесс.

Более явное задание точечного процесса дают следующие функции. Пусть $B \subseteq \mathfrak{X}$ — конечное множество («окно»). Положим

$$\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m) := P(X : X \cap B = \{x_1, \dots, x_m\}), \quad (13.2)$$

где x_1, \dots, x_m попарно различны. Другими словами, $\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m)$ — вероятность, что в «окне» B частицы точечного процесса располагаются строго в точках x_1, \dots, x_m . Ясно, что функции $\pi_{B,m}$ однозначно определяют точечный процесс.

Замечание 13.4. Ясно, что $\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m) = P(U(A, B))$, где $A = \{x_1, \dots, x_m\}$. Напомним, что $U(A, B)$ определено в начале §12.4. Также отметим, что $\rho(x_1, \dots, x_n) = P(V(C)) = P(U(C, C))$, где $C = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $V(C) = \{X \in \text{Conf}(\mathfrak{X}) : X \supseteq C\}$.

Из формулы включений-исключений (12.21), связывающей множества $U(A, B)$ и $V(C)$, следует связь между функциями $\pi_{B,m}$ и корреляционными функциями:

$$\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k \geq 0} \sum_{y_1, \dots, y_k \in B} \frac{(-1)^k}{k!} \rho_{m+k}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k), \quad (13.3)$$

где вторая сумма ведется по упорядоченным наборам точек $y_1, \dots, y_k \in B$ (отсюда и возникает множитель $\frac{1}{k!}$, которого нет в (12.21)). Здесь мы пользуемся соглашением из замечания 13.2 для корреляционных функций ρ_{m+k} . Отметим, что так как множество B конечно, то сумма по k выше также на самом деле конечная.

Замечание 13.5. Отметим, что корреляционные функции ведут себя более простым образом при некоторых естественных преобразованиях точечного процесса. Рассмотрим одно такое преобразование — ограничение процесса на подмножество.

Пусть $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ — подмножество. Естественным образом определяется ограничение конфигураций на \mathfrak{X}' :

$$\text{Conf}(\mathfrak{X}) \ni X \mapsto X' := X \cap \mathfrak{X}' \in \text{Conf}(\mathfrak{X}'). \quad (13.4)$$

Также возникает отображение мер на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ в меры на $\text{Conf}(\mathfrak{X}')$. Таким образом, по процессу P на \mathfrak{X} строится процесс P' на \mathfrak{X}' . Оказывается (упражнение 13.1), что корреляционные функции ρ'_n процесса P' получаются просто путем ограничения корреляционных функций ρ_n процесса P на подмножество $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$.

Отметим, что поведение функций $\pi_{B,m}$ при ограничении процесса столь просто не описывается.

13.2 Корреляционные меры

Здесь мы покажем, что корреляционные функции ρ_n более естественно понимать как (возможно, бесконечные) меры на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ (множество $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ определяется по формуле (13.1)). Отметим, что на дискретных пространствах есть соблазн не различать функции и меры, однако в некоторых ситуациях различие становится необходимым.

Определение 13.6. Конфигурации $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$ иногда удобно отождествлять с соответствующими считающими мерами,

$$\delta_X := \sum_{x \in X} \delta_x, \quad (13.5)$$

где δ_x — дельта-мера Дирака в точке $x \in \mathfrak{X}$. Отметим, что мера δ_X может быть бесконечной.

Таким образом, мы получаем вложение $\text{Conf}(\mathfrak{X}) \hookrightarrow \text{Meas}(\mathfrak{X})$ множества конфигураций на \mathfrak{X} в множество мер на \mathfrak{X} . Точечный процесс — это вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, ее можно интерпретировать как случайную меру, то есть, как вероятностную меру на $\text{Meas}(\mathfrak{X})$.

С помощью меры δ_X на \mathfrak{X} можно определить корреляционные меры следующим образом. Множество $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$ предполагается случайным, распределенным по мере P (то есть, X — случайная конфигурация точечного процесса P). По случайной конфигурации X строится случайная мера δ_X на \mathfrak{X} (определение 13.6). На пространстве \mathfrak{X}^n можно рассмотреть произведение мер δ_X , обозначаемое $\delta_X^{\otimes n}$. Меру $\delta_X^{\otimes n}$ ограничим на множество $\tilde{\mathfrak{X}}^n$, определенное формулой (13.1), то есть, определим меру

$$\tilde{\delta}_X^{\otimes n} := \delta_X^{\otimes n}|_{\tilde{\mathfrak{X}}^n}. \quad (13.6)$$

Ясно, что $\tilde{\delta}_X^{\otimes n}$ — случайная мера на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$. Рассмотрим ее математическое ожидание $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ относительно распределения P конфигурации $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$, то есть,

$$\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n}) := \sum_{Y \in \text{Conf}(\mathfrak{X})} P(Y) \tilde{\delta}_Y^{\otimes n}, \quad (13.7)$$

где сумма ведется по всем неслучайным конфигурациям $Y \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Понятно, что $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ является неслучайной мерой на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$.

Предложение 13.7. Мера $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ совпадает с ρ_n . Другими словами, вес, который мера $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ приписывает точке $(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{\mathfrak{X}}^n$, равен $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$, где ρ_n — n -ая корреляционная функция процесса P .

Определение 13.8. Мера $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ называется n -ой корреляционной мерой точечного процесса P . Мы обозначаем ее также через ρ_n .⁸⁷

Доказательство предложения 13.7. Общий принцип, лежащий в основе доказательства подобных утверждений, состоит в следующем. Сперва надо рассмотреть специальный случай, когда мера P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ является дельта-мерой, сосредоточенной на какой-то фиксированной конфигурации $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$. После этого можно перейти к общему случаю, пользуясь линейностью математического ожидания. См. также упражнение 13.2. \square

13.3 Аддитивные и мультипликативные функционалы

Точечный процесс P — это вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Здесь мы рассмотрим два типа «разумных» функций на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, интегралы от которых по мере P можно достаточно просто выразить через корреляционные функции процесса P . Функции на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ будем называть *функционалами*, чтобы отличать их от собственно функций на пространстве \mathfrak{X} (либо \mathfrak{X}^n).

⁸⁷На дискретном пространстве $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ меры и функции — это близкие объекты.

Определение 13.9. Пусть f — неотрицательная функция на \mathfrak{X}^n ($n = 1, 2, \dots$). По функции f строится *аддитивный функционал*

$$F_f(X) := \sum_{x_1, \dots, x_n \in X} f(x_1, \dots, x_n), \quad (13.8)$$

где сумма ведется по упорядоченным наборам попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in X$. Отметим, что F_f может принимать значение $+\infty$, если ряд расходится.

Замечание 13.10. В правой части (13.8) сумма ведется по всем упорядоченным наборам попарно различных индексов $x_1, \dots, x_n \in X$, Это отличается от суммы вида

$$\sum_{A \subseteq X, |A|=n} f(A), \quad (13.9)$$

где сумма ведется по всем n -точечным подмножествам $A \subseteq X$.

Подобным образом, для корреляционных функций две суммы,

$$\sum_{A \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})} \rho(A) \quad \text{и} \quad \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}} \rho_n(x_1, \dots, x_n) \quad (13.10)$$

(во второй сумме суммирование ведется по всем упорядоченным наборам попарно различных индексов), являются разными.

Замечание 13.11. Ясно, что аддитивный функционал F_f зависит только от *симметрической части* функции f ,

$$f^{sym}(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \quad (13.11)$$

Поэтому на самом деле пространство аддитивных функционалов порождается функционалами F_f , где $f = g^{\otimes n}$, то есть, $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1) \dots g(x_n)$ (принцип поляризации в линейной алгебре).

Предложение 13.12. Имеем⁸⁸

$$\langle F_f, P \rangle = \langle f, \rho_n \rangle, \quad (13.12)$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначен интеграл функции по мере.

Доказательство. Упражнение 13.3. □

Определение 13.13. Пусть φ — финитная функция (то есть, отличная от нуля лишь в конечном числе точек). Определим *мультипликативный функционал*

$$\Phi_\varphi(X) := \prod_{x \in X} (1 + \varphi(x)). \quad (13.13)$$

Отметим, что это произведение всегда фактически конечно.

Ясно, что $\Phi_\varphi(X)$ можно разложить в сумму аддитивных функционалов:

$$\Phi_\varphi(X) = 1 + \sum_{n \geq 1} F_{\varphi^{\otimes n}}(X). \quad (13.14)$$

Так как φ — финитная функция, то сумма на самом деле конечна. Ясно, что также можно выразить и интеграл $\langle \Phi_\varphi, P \rangle$ от мультипликативного функционала по мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ через корреляционные функции процесса P .

⁸⁸Утверждается, что либо обе части равенства конечны и равны друг другу, либо они обе равны $+\infty$.

13.4 Корреляционные функции как факториальные моменты

Наиболее «простыми» функционалами на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ являются следующие. Пусть $A \subset \mathfrak{X}$ — конечное подмножество. Определим функционал

$$\mathcal{N}_A(X) := |X \cap A|, \quad (13.15)$$

то есть, $\mathcal{N}_A(X)$ — это число точек конфигурации X , попавшей в «окно» A .

Если задан точечный процесс, то есть, вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, то \mathcal{N}_A становится случайной величиной на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Предложение 13.14. *Для любого конечного подмножества $A \subset \mathfrak{X}$ имеем*

$$\langle \mathcal{N}_A^{\downarrow n}, P \rangle = \rho_n(A^n). \quad (13.16)$$

Здесь $\langle \mathcal{N}_A^{\downarrow n}, P \rangle = \mathbb{E}_P(\mathcal{N}_A^{\downarrow n})$ — математическое ожидание случайной величины $\mathcal{N}_A^{\downarrow n}$, $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_n$ и $y^{\downarrow n} := y(y-1)\cdots(y-n+1)$ — факториальная степень.

Доказательство. Пусть χ_A — характеристическая функция (индикатор) множества A . Определим функцию f на \mathfrak{X}^n по формуле $f = \chi_A^{\otimes n}$. Очевидно, что $\langle f, \rho_n \rangle = \rho_n(A^n)$. Запишем, пользуясь предложением 13.12:

$$\langle f, \rho_n \rangle = \mathbb{E}_P(Ff) = \mathbb{E}_P(F_{\chi_A^{\otimes n}}). \quad (13.17)$$

Из определения аддитивного функционала следует, что $F_{\chi_A^{\otimes n}}(X) = \mathcal{N}_A^{\downarrow n}(X)$. Действительно, надо заметить, что $\mathcal{N}_A^{\downarrow n}(X)$ — это число способов выбрать упорядоченный набор из n различных точек в множестве $A \cap X$. \square

Если функции \mathcal{N}_A рассматривать как аналоги координатных функций (на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$), то интегралы их факториальных степеней $\mathcal{N}_A^{\downarrow n}$ по мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ можно рассматривать как «чистые факториальные моменты» меры P . Они выражаются через корреляционные функции меры P . Также можно рассматривать «смешанные факториальные моменты», см. упражнение 13.4. Ясно, что обычные моменты можно выразить через факториальные.

13.5 Детерминантные процессы с эрмитово-симметричным ядром

Теперь будем рассматривать детерминантные точечные процессы (определение 12.10), то есть, такие точечные процессы P на \mathfrak{X} , что существует (вообще говоря, комплекснозначная) функция двух переменных $K(x, y)$, для которой

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n. \quad (13.18)$$

Здесь ρ_n — n -ая корреляционная функция процесса P . Отметим, что правая часть равенства выше автоматически симметрична по x_1, \dots, x_n (для любой функции K).

Мы будем рассматривать важный частный случай детерминантных процессов, когда корреляционное ядро $K(x, y)$ является эрмитово-симметричным:

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}, \quad x, y \in \mathfrak{X}. \quad (13.19)$$

Рассмотрим первую и вторую корреляционные функции:

$$\rho_1(x) = P(X \ni x) = K(x, x), \quad \rho_2(x, y) = \rho_1(x)\rho_1(y) - |K(x, y)|^2 \leq \rho_1(x)\rho_2(y). \quad (13.20)$$

Будем интерпретировать точки случайной конфигурации как частицы. Видно, что вероятность одновременного попадания частиц в две точки, x и y , не больше, чем произведение вероятностей этих событий. Это можно толковать как отталкивание частиц друг от друга. Этим обусловлено исторически более раннее название детерминантных процессов — *фермионные процессы* (введенное в работах Масчи).

Замечание 13.15. В работах Масчі также были введены *бозонные процессы*, которые сейчас называются *перманентными*. Их корреляционные функции даются соответствующими перманентами.⁸⁹

13.6 Характеризация эрмитово-симметричных корреляционных ядер

В классе детерминантных процессов с эрмитово-симметричным ядром удается полностью охарактеризовать матрицы K , которые определяют детерминантные точечные процессы.

Пусть $H = \ell^2(\mathfrak{X})$ — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_x\}_{x \in \mathfrak{X}}$. Любой ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ можно отождествить с $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ матрицей $A(x, y) := (Ae_y, e_x)$, так что для всех $\xi \in H$, $\xi = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \xi(x)e_x$, выполнено

$$(A\xi)(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} A(x, y)\xi(y). \quad (13.21)$$

Другими словами, $A(x, y)$ — ядро «интегрального» оператора в $\ell^2(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathcal{H} \subset H$ — конечномерное подпространство. Пусть $K_{\mathcal{H}}$ — оператор ортогонального проектирования на \mathcal{H} . Это конечномерный оператор, который можно записать в виде

$$K_{\mathcal{H}}(x, y) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x)\varphi_i(y), \quad (13.22)$$

где $N = \dim \mathcal{H}$ и $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ — ортонормированный базис в \mathcal{H} .

Предложение 13.16. *Для любого конечномерного подпространства $\mathcal{H} \subset H$ оператор ортогонального проектирования на \mathcal{H} отвечает детерминантной мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, которая сосредоточена на N -точечных конфигурациях, где $N = \dim \mathcal{H}$.*

Доказательство. Это доказывается в точности, как предложения 12.14 и 12.15 из предыдущей лекции. \square

Наша цель — доказать следующий факт.

Предложение 13.17. *Всякий ограниченный самосопряженный оператор $K = K^*$ в $H = \ell^2(H)$, такой, что $0 \leq K \leq 1$ (то есть, $K \geq 0$ и $1 - K \geq 0$),⁹⁰ является корреляционным ядром детерминантного точечного процесса на \mathfrak{X} .*

Замечание 13.18. Отметим, что конечномерные ортогональные проекторы из предложения 13.16 входят в класс операторов, рассматриваемых в предложении 13.17.

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 13.19. *Пусть $0 \leq K = K^* \leq 1$ — оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве H .⁹¹ Тогда существует последовательность конечномерных ортогональных проекторов K_m , слабо сходящаяся к K .*

О слабой сходимости операторов можно, например, прочитать в лекции §9.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что слабая сходимость равномерно ограниченных по норме операторов равносильна сходимости их матричных элементов в фиксированном базисе. Выберем базис e_1, e_2, \dots в H , и рассмотрим конечномерные подпространства

$$H_m := \text{span} \{e_1, \dots, e_m\}. \quad (13.23)$$

⁸⁹Перманент матрицы определяется так же, как детерминант, но только сумма произведений элементов вместо знакопеременной берется обычная.

⁹⁰Можно эквивалентно сказать, что спектр оператора K лежит в $[0, 1]$.

⁹¹Это не обязательно пространство $\ell^2(\mathfrak{X})$.

Пусть $H_m^\perp = H \ominus H_m$ — ортогональное дополнение пространства H_m . Запишем оператор K в блочном виде в базисе e_1, e_2, \dots :

$$K = \begin{pmatrix} a & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad (13.24)$$

где матрица a имеет размер $m \times m$. Ясно, что из условия $0 \leq K = K^* \leq 1$ следует, что $0 \leq a = a^* \leq 1$. Рассмотрим $2m \times 2m$ операторы

$$K_m = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(1-a)} \\ \sqrt{a(1-a)} & 1-a \end{pmatrix}. \quad (13.25)$$

Здесь оператор $\sqrt{a(1-a)}$ определен, так как $a(1-a)$ — симметрический положительно определенный оператор. Легко видеть, что $K_m = K_m^* = K_m^2$, поэтому K_m — проектор в H_{2m} . Оператор K_m можно также определить и на H , так как $\mathcal{L}(H_{2m}) \subset \mathcal{L}(H)$ (окаймляя матрицу (13.25) нулями).

Операторы K_m равномерно ограничены по норме, и в базисе e_1, e_2, \dots их матричные элементы сходятся к K . Поэтому $K = \text{wlim}_{m \rightarrow \infty} K_m$, что и требовалось. \square

Теперь перейдем к доказательству предложения 13.17. Пусть $0 \leq K = K^* \leq 1$ — оператор в $H = \ell^2(\mathfrak{X})$. Пользуясь леммой, построим последовательность операторов K_m , которые слабо сходятся к K . Каждый оператор K_m определяет детерминантную меру $P^{(m)}$ на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ (предложение 13.16). Меры $P^{(m)}$ заданы на компактном пространстве $\text{Conf}(\mathfrak{X}) = \{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$, поэтому семейство $\{P^{(m)}\}$ плотно (tight). Поэтому существует подпоследовательность $P^{(m_i)}$, слабо сходящаяся к вероятностной мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Рассмотрим открытые множества $U(A, B) \subset \text{Conf}(\mathfrak{X})$, определенные в §12.4. Ясно, что $P^{(m_i)}(U(A, B)) \rightarrow P(U(A, B))$, а это влечет сходимость корреляционных функций $\rho^{(m_i)}$ точечных процессов $P^{(m_i)}$ к корреляционной функции ρ точечного процесса P . Из сходимости операторов K_m к K следует, что корреляционная функция ρ дается соответствующими минорами, то есть, что K — корреляционное ядро меры P .

Предложение 13.17 доказана.

13.7 Упражнения

Упражнение 13.1. Пусть точечный процесс P' получен из точечного процесса P на \mathfrak{X} путем ограничения на подмножество $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ (см. замечание 13.5). Покажите, что корреляционные функции P' получаются из корреляционных функций P также путем ограничения на \mathfrak{X}' .

Упражнение 13.2. Докажите предложение 13.7.

Упражнение 13.3. Докажите предложение 13.12.

Указание. Воспользуйтесь общим принципом, изложенным в доказательстве предложения 13.7.

Упражнение 13.4. Пусть $A_1, \dots, A_n \subset \mathfrak{X}$ — конечные подмножества, которые попарно дизъюнкты: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Пусть P — вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Покажите, что

$$\mathbb{E}_P(\mathcal{N}_{A_1}^{\downarrow n_1} \dots \mathcal{N}_{A_k}^{\downarrow n_k}) = \rho_{n_1 + \dots + n_k}(A_1^{n_1} \times \dots \times A_k^{n_k}) \quad (13.26)$$

(см. §13.4).

Упражнение 13.5. Верно ли, что если \mathcal{H} и \mathcal{H}' — два различных конечномерных подпространства в H , то точечные процессы, им отвечающие, тоже различны (см. предложение 13.16)? [Замечание: я еще не продумал этот вопрос должным образом.]

Упражнение 13.6. Пусть P — детерминантная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, построенная в предложении 13.17 по оператору $0 \leq K = K^* \leq 1$ в $\ell^2(\mathfrak{X})$. Покажите, что если $\sum_{x \in \mathfrak{X}} K(x, x) < \infty$, то P сосредоточена на конечных конфигурациях. [Замечание: верно и обратное утверждение, но его доказать труднее.]

Предметный указатель

- алгебра
 - h -сдвинуто-симметрических функций, 35
 - градуированная, 1
 - присоединенная, 34
 - сдвинуто-симметрических функций, 34
 - симметрических функций, 32
 - специализация, 55
 - фильтрованная, 34
- биномиальная формула, 28
- группа
 - бесконечномерная унитарная, 13
- диаграмма
 - Юнга, 30
 - координаты Фробениуса, 45
 - содержание клетки, 30
- доминантность, 7
- задача редукции, 9
- матрица
 - минор, 62
 - подматрица, 62
 - тотально положительная, 62
 - тёплицава, 68
- мера
 - Бернулли, 20
 - Хаара, 7
- метод инволюции, 65
- многочлены
 - Лорана, 1
 - антисимметрические, 3
 - симметрические, 2
 - Шура, 27
 - лорановские, 4
 - сдвинуто-симметрические, 30
 - стабильность, 29
 - сдвинуто-симметрические, 33
 - симметрические
 - полные однородные, 18
 - элементарные, 17
- мономы
 - антисимметризованные, 3
 - симметризованные, 2
- мультимножество, 18
- определитель
 - Вандермонда, 3
- последовательность
 - тотально положительная, 68
- правило ветвления, 10
- представлене, 6
- радиальная часть, 9
- разбиение, 26
 - длина, 26
- сигнатура, 2
 - длина, 2
- инфинитезимально-регулярная последовательность, 38
 - носитель, 12
 - перемежающиеся, 10
- схема Гельфанда–Цетлина, 11
- сходимость функций на T_{fin}^{∞} , 15
- условие
 - финитности, 13
- факториальная степень
 - убывающая, 30
- формула
 - Коши, 56
 - размерности, 16
- функции
 - сдвинуто-симметрические, 34
 - полные, 41
 - элементарные, 41
 - симметрические, 32
 - однородные, 39
 - суммы Ньютона, 39
 - элементарные, 39
 - суперсимметрические, 46
- функции Шура
 - сдвинуто-симметрические, 35
 - симметрические, 33
- характер, 6
 - неприводимый, 7
 - нормированный, 14
 - экстремальный, 15
- числа
 - Костки, 4, 11

Список литературы

- [Dys62] Freeman J. Dyson. Три статьи в J. Math. Phys. 3, 1962.
- [Edr53] A. Edrei. On the generating function of a doubly-infinite, totally positive sequence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74(3):367–383, 1953.
- [Kar68] S. Karlin. *Total Positivity, Vol. 1*. Stanford, 1968.
- [Oko97] Andrei Okounkov. Log-Concavity of Multiplicities with Application to Characters of $U(\infty)$. *Advances in Mathematics*, 127(2):258–282, 1997.
- [Ols03] Grigori Olshanski. The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group. *Journal of Functional Analysis*, 205(2):464–524, 2003.
- [OO98] Andrei Okounkov and Grigori Olshanski. Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity. *Int. Math. Res. Notices*, 13:641–682, 1998.
- [Sim05] Barry Simon. *Trace Ideals and Their Applications: Second Edition*, volume 120 of *Mathematical Surveys and Monographs*. 2005.
- [Вей07] Г. Вейль. *Классические группы. Их инварианты и представления*. КомКнига М., 2007.
- [ГК50] Ф.Р. Гантмахер and М.Г. Крейн. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950.
- [ГК65] И. Ц. Гохберг and М. Г. Крейн. *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов*. Москва: Наука, 1965.
- [ГН50] И.М. Гельфанд and М.А. Наймарк. *Унитарные представления классических групп*. Тр. МИАН СССР, т. 36. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1950.
- [Жел07] Д. П. Желобенко. *Компактные группы Ли и их представления*. М:МЦНМО, 2007.
- [Мак84] И. Макдональд. *Симметрические функции и многочлены Холла*. М: Мир, 1984.
- [Сте05] Р.П. Стенли. *Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции*. М: Мир, 2005.
- [Шир07] А.Н. Ширяев. *Вероятность*. М:МЦНМО, 2007.

Асимптотическая теория представлений II.

Записки лекций

Григорий Ольшанский. Запись Леонида Петрова*

Версия от 13 ноября 2012 г.

ВНИМАНИЕ! Данный текст находится в стадии активного написания, поэтому в нем может неожиданно измениться все, что угодно.

Содержание

1	Двойственность Шура–Вейля	2
2	Алгоритмы Шенстеда и Робинсона–Шенстеда	9
3	Формулы для размерности	22
4	Мера Планшереля	33
5	Разностные операторы и корреляционное ядро	42
6	Разностные операторы и исследование меры Планшереля	52
7	Предельные формы случайных диаграмм по мерам $P_N^{(n)}$	63
8	Орбитальный интеграл	70
9	Сжатие групп и алгебр Ли	78
10	Тотальная положительность и эргодические меры	88
11	Классификация эргодических мер на H	95
12	Строение эргодических мер	102
13	Заключение	110

*lenia.petrov@gmail.com

1 Двойственность Шура–Вейля

Двойственность Шура–Вейля — один из старейших сюжетов теории представлений, однако, он до сих пор порождает новые интересные результаты (в основном, за счет рассмотрения с ним связанных вероятностных моделей).

1.1 $(\mathfrak{S}(n), GL(N))$ -бимодуль

Пусть n и N — два натуральных числа. Они будут нашими основными параметрами. Через $\mathfrak{S}(n)$ будем обозначать симметрическую группу степени n , а через $GL(N) = GL(N, \mathbb{C})$ — группу обратимых матриц размера $N \times N$ с комплексными элементами.

Пусть $V = \mathbb{C}^N$, рассмотрим пространство $V^{\otimes n}$. В нем действуют две указанные группы:

- Группа $\mathfrak{S}(n)$ действует перестановкой компонент. Более подробно, перестановка $s \in \mathfrak{S}(n)$ действует на разложимый тензор $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ как

$$s(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{s^{-1}(n)}.$$

Легко проверить, что так определяется именно *левое* действие группы $\mathfrak{S}(n)$.

- Матрица $X \in GL(N)$ действует в $V^{\otimes n}$ как $X^{\otimes n}$ (то есть, покомпонентно).

Ясно, что указанные действия между собой коммутируют. Поэтому $V^{\otimes n}$ есть $(\mathfrak{S}(n), GL(N))$ -бимодуль.

Рассмотрим алгебру операторов $\text{End}(V^{\otimes n})$, а в ней — две следующие ассоциативные подалгебры с единицей:

- $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)} = \text{span} \{\text{операторы из } \mathfrak{S}(n)\}$;¹
- $\mathfrak{a}_{GL(N)} = \text{span} \{\text{операторы из } GL(N)\}$.

Определение 1.1. Пусть $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V^{\otimes n})$ — ассоциативная подалгебра с единицей. Через \mathfrak{a}' обозначим *централизатор* (или *коммутант*) алгебры \mathfrak{a} в $\text{End}(V^{\otimes n})$, по определению состоящий из операторов, коммутирующих со всеми операторами из \mathfrak{a} .

Предложение 1.2. $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = \mathfrak{a}_{GL(N)}$.

Доказательство. 1. Ясно, что $\text{End}(V^{\otimes n}) = (\text{End}(V))^{\otimes n}$.

2. $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = S^n(\text{End}(V))$, то есть, $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' \subset (\text{End}(V))^{\otimes n}$ есть в точности пространство симметрических тензоров. Это утверждение легко получается из определений.

¹Здесь и далее $\text{span} \{\dots\}$ означает линейную оболочку.

3. Пусть $S^n E$ для любого пространства E обозначает пространство симметрических тензоров над E . Тогда

$$S^n E = \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in E\}.$$

Это так называемый *принцип поляризации*.

Ясно, что $X \otimes \cdots \otimes X$ — симметрический тензор для всех $X \in E$. Также из определения ясно, что пространство всех симметрических тензоров натянуто на тензоры вида

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}(n)} s(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n).$$

Рассмотрим тензор $(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n)^{\otimes n} \in \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in E\}$. Можно понять, что²

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}(n)} s(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = [\lambda_1 \dots \lambda_n] \{(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n)^{\otimes n}\}.$$

4. Пусть теперь $E = \text{End}(V)$ в п.3. Тогда

$$(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in \text{End}(V)\}. \quad (1.1)$$

Нам же надо было показать, что

$$(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in GL(V) = GL(N)\}. \quad (1.2)$$

Так как любую матрицу можно приблизить обратимой, (1.2) следует из (1.1). □

1.2 Матричные алгебры

Излагаемый здесь материал есть, например, в книге [Вин01].

Пусть E — конечномерное пространство, $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$ — ассоциативная алгебра с единицей. Говорят, что E является \mathfrak{a} -модулем, или что задано представление алгебры \mathfrak{a} в E .

Определение 1.3. • Алгебра $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$ *полупроста*, если E — полупростой \mathfrak{a} -модуль, то есть, любой подмодуль в нем выделяется как прямое слагаемое (на языке теории представлений это называется вполне приводимостью).

- Алгебра $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$ *неприводима*, если в E нет собственных (отличных от нулевого и от всего E) \mathfrak{a} -инвариантных подпространств.

²Здесь и далее [AAA] {BBB} означает коэффициент при AAA в выражении BBB.

- Алгебра $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$ *примарна*, если пространство E представляется в виде суммы эквивалентных неприводимых модулей.

Предложение 1.4. Пусть $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$ — полупростая ассоциативная алгебра с единицей. Тогда E однозначно разлагается в прямую сумму $E = \bigoplus_i E_i$ примарных \mathfrak{a} -модулей.

Доказательство этого предложения содержится в стандартном курсе линейной алгебры, см., напр., [Вин01].

Замечание 1.5. Далее каждый примарный модуль E_i разлагается (уже не каноническим образом) в прямую сумму неприводимых. Кроме того, разным i отвечают разные неприводимые модули.

Предложение 1.4 утверждает, что в E существует подходящий базис, в котором алгебра \mathfrak{a} состоит из всех операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_1 & & & & \\ & & & A_2 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & A_2 & \\ \dots & & & \dots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где каждый блок из одинаковых операторов соответствует примарному слагаемому E_i .

Другими словами, \mathfrak{a} есть прямая сумма матричных алгебр,

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_i \text{End}(V_i).$$

Пространство E , в свою очередь, можно представить в виде

$$E = \bigoplus_i V_i \otimes W_i,$$

где W_i — вспомогательные пространства, такие, что размерность $\dim W_i$ равна кратности соответствующей неприводимой компоненты в примарной алгебре E_i . Таким образом,

$$\mathfrak{a} = \left\{ \bigoplus_i A_i \otimes \mathbf{1}_{W_i} : A_i \in \text{End}(V_i) \right\},$$

где $\mathbf{1}_{W_i}$ — тождественный оператор в пространстве W_i .

Сформулируем следующий частный случай теоремы Бернсайда:

Теорема 1.6 (см., напр., [LR04]). Если алгебра \mathfrak{a} неприводима, то $\mathfrak{a} = \text{End}(E)$.

Перейдем к описанию коммутанта \mathfrak{a}' полупростой алгебры $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$.

Предложение 1.7. Пусть $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$ — полупростая алгебра с единицей. Тогда

$$\mathfrak{a}' = \left\{ \bigoplus_i \mathbf{1}_{V_i} \otimes B_i : B_i \in \text{End}(W_i) \right\}.$$

Доказательство. Сперва надо рассмотреть частный случай $\mathfrak{a} = \text{End}(V)$, и $E = V \oplus W$. Утверждение предложения в этом случае следует из леммы Шура и того, что операторы $A \otimes \mathbf{1}_W$ и $\mathbf{1}_V \otimes B$ коммутируют для всех $A \in \text{End}(V)$ и $B \in \text{End}(W)$.

Общий случай легко свести к уже рассмотренному. \square

Предложение 1.8 (О бикоммутанте). Пусть $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$ — полупростая алгебра с единицей. Тогда

$$(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}.$$

Доказательство. Предложение следует из симметричности описания алгебры и ее коммутанта (предложение 1.7). \square

1.3 Неприводимые представления $\mathfrak{S}(n)$ и $GL(N)$

Применим утверждения §1.2 к нашему $(\mathfrak{S}(n), GL(N))$ -бимодулю $E = V^{\otimes n}$, где $V = \mathbb{C}^N$. Алгебра $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)}$ полупроста, так как натянута на представление конечной группы, которое вполне приводимо.³ Таким образом, алгебра $\mathfrak{a}_{GL(N)}$ также полупроста. Значит, можно записать следующее разложение пространства $V^{\otimes n}$:

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)} \otimes V_{\lambda}^{GL(N)}. \quad (1.3)$$

Здесь сумма ведется по некоему (пока абстрактному) набору индексов λ , $V_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)}$ и $V_{\lambda}^{GL(N)}$ — неприводимые представления соответственно $\mathfrak{S}(n)$ и $GL(N)$, отвечающие этому индексу λ .

Другими словами, пусть $\widehat{\mathfrak{S}(n)}$ — множество всех неприводимых представлений $\mathfrak{S}(n)$, а $\widehat{GL(N)}$ — множество тех неприводимых представлений $GL(N)$, которые можно извлечь из тензоров (это так называемые *полиномиальные* представления). Формула (1.3) показывает, что в $\widehat{\mathfrak{S}(n)}$ и $\widehat{GL(N)}$ существуют подмножества, которые можно параметризовать одним и тем же набором индексов λ . Между представлениями $\mathfrak{S}(n)$ и $GL(N)$ в этих подмножествах существует биективное соответствие. Элементы $\mathfrak{S}(n)$ действуют как $A_{\lambda} \otimes \mathbf{1}_{V_{\lambda}^{GL(N)}}$, а элементы $GL(N)$ — как $\mathbf{1}_{V_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)}} \otimes B_{\lambda}$. Кроме того, так как размерность $V^{\otimes n}$ конечна, множество индексов $\{\lambda\}$ также конечно.

Чтобы охарактеризовать множество индексов $\{\lambda\}$ более точно, необходимо использовать теорию представлений. Предположим, что нам известны

³Эта вполне приводимость следует из того, что любое представление конечной группы над \mathbb{C} унитаризуемо.

некоторые факты о представлениях группы $GL(N)$, и получим информацию о характерах группы $\mathfrak{S}(n)$.

Итак, пусть $T_s^{\mathfrak{S}(n)}$ — оператор представления $\mathfrak{S}(n)$ в $V^{\otimes n}$, где $s \in \mathfrak{S}(n)$. Пусть $T_g^{GL(N)}$ — оператор представления $GL(N)$ в $V^{\otimes n}$, где $g \in GL(N)$. В пространстве $V^{\otimes n}$ задано двойное представление прямого произведения $\mathfrak{S}(n) \times GL(N)$:

$$T_{s,g} = T_s^{\mathfrak{S}(n)} T_g^{GL(N)} = T_g^{GL(N)} T_s^{\mathfrak{S}(n)}, \quad (s, g) \in \mathfrak{S}(n) \times GL(N)$$

(напомним, что операторы, отвечающие $\mathfrak{S}(n)$ и $GL(N)$, коммутируют).

Определение 1.9. Напомним, что характер представления T — это функция на группе $\chi(\cdot) = \text{Tr } T(\cdot)$. Характер постоянен на классах сопряженности в группе.

Напомним описание классов сопряженности в $GL(N)$ и в $\mathfrak{S}(n)$:

- Почти всякая матрица $g \in GL(N)$ диагонализуема, поэтому классы сопряженности в $GL(N)$ параметризуются точками $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$, причем порядок x_i не важен.
- Каждый класс сопряженности в $\mathfrak{S}(n)$ состоит из перестановок, имеющих одну и ту же цикловую структуру. Цикловая структура определяется разбиением ρ числа n (записывается $\rho \vdash n$).⁴

Из формулы (1.3) следует фундаментальная формула для характеров:

$$\text{Tr } (T_{s,g}) = \sum_{\lambda} \chi_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)}(s) \chi_{\lambda}^{GL(N)}(g). \quad (1.4)$$

Так как характер постоянен на классах сопряженности, можно считать, что s задается разбиением $\rho \vdash n$, а $g = \text{diag } (x_1, \dots, x_N)$.

Сформулируем те факты о характерах $GL(N)$, которые мы предполагаем известными и будем использовать.

Предложение 1.10. *Характеры неприводимых полиномиальных представлений группы $GL(N)$ суть полиномы Шура, которые индексируются разбиениями $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ длины N .⁵ В разложении $V^{\otimes n}$ на неприводимые представления участвуют только те представления, для которых $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_N = n$.*

⁴Разбиение числа n — это последовательность вида $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_{\ell} > 0$, где $\rho_i \in \mathbb{Z}$, $\sum_i \rho_i = n$. Число $\ell = \ell(\rho)$ называется длиной разбиения, а число $n = |\rho|$ — весом разбиения.

⁵Напомним, что полиномы Шура определяются как

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det (x_j^{\lambda_i + N - i})_{i,j=1,\dots,N}}{V(x_1, \dots, x_N)},$$

где $V_N(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$ — определитель Вандермонда.

Разбиения изображаются диаграммами Юнга [Мак84, Гл. I, §1]. Через \mathbb{Y} обозначим множество всех диаграмм Юнга. Через $\mathbb{Y}(N)$ — множество диаграмм Юнга λ с $\ell(\lambda) \leq N$. Через \mathbb{Y}_n — множество диаграмм Юнга λ с $|\lambda| = n$. И наконец, обозначим $\mathbb{Y}_n(N) := \mathbb{Y}(N) \cap \mathbb{Y}_n$.

Из предложения 1.10 следует:

Предложение 1.11. *В формулах (1.3) и (1.4) множество индексов $\{\lambda\}$ на самом деле есть множество $\mathbb{Y}_n(N)$ диаграмм Юнга длины $\leq N$ с n клетками.*

Из (1.4) и нашего знания характеров $GL(N)$ можно получить информацию о характерах $\mathfrak{S}(n)$. Сначала вычислим левую часть (1.4). Пусть⁶

$$p_k(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим $p_\rho := p_{\rho_1} p_{\rho_2} \dots p_{\rho_{\ell(\rho)}}$, где ρ — любое разбиение.

Лемма 1.12. *Пусть цикловая структура $s \in \mathfrak{S}(n)$ задается разбиением $\rho \vdash n$, а $g \in GL(N)$ имеет вид $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$. Тогда*

$$\text{Tr}(T_{s,g}) = p_\rho(x_1, \dots, x_N).$$

Доказательство. Обозначим через e_1, \dots, e_N стандартный базис в \mathbb{C}^N . Базисом в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ являются тензорные мономы вида $e_{\bar{a}} := e_{a(1)} \otimes \dots \otimes e_{a(n)}$. Выберем в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ скалярное произведение, по отношению к которому базис $\{e_{\bar{a}}\}$ является ортонормальным. Тогда

$$\text{Tr}(T_{s,g}) = \sum_{\bar{a}} (T_{s,g} e_{\bar{a}}, e_{\bar{a}}).$$

Сперва рассмотрим частный случай, когда $\rho = (n)$, то есть, $s \in \mathfrak{S}(n)$ — цикл длины n . Для того, чтобы $(T_{s,g} e_{\bar{a}}, e_{\bar{a}}) \neq 0$, необходимо, чтобы $a(1) = a(2) = \dots = a(n)$. Оператор $T_g^{GL(N)}$ действует на $e_{\bar{a}}$ умножением каждого вектора e_i на x_i . Поэтому имеем

$$(T_{s,g} e_{\bar{a}}, e_{\bar{a}}) = \sum_{i=1}^N (T_g^{GL(N)} e_i^{\otimes n}, e_i^{\otimes n}) = x_1^n + \dots + x_N^n = p_n(x_1, \dots, x_N).$$

В общем случае (когда $\rho \vdash n$ — произвольное разбиение) разобьем $[n] := \{1, \dots, n\}$ на части $[n] = \sqcup C_j$, так, что s переставляет элементы в каждой части C_j по циклу. Здесь $s \in \mathfrak{S}(n)$ имеет цикловую структуру ρ , и $|C_j| = \rho_j$. Повторяя рассуждения выше для каждой части C_j , приходим к нужному произведению сумм Ньютона. \square

⁶Функции p_k называют суммами Ньютона.

Отсюда получаем следствие — таблицу характеров группы $\mathfrak{S}(n)$:

$$p_\rho(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \chi_\rho^\lambda \cdot s_\lambda(x_1, \dots, x_N). \quad (1.5)$$

Здесь s_λ — полиномы Шура, а χ_ρ^λ — значение характера неприводимого представления группы $\mathfrak{S}(n)$, отвечающего диаграмме Юнга λ , на классе сопряженности в $\mathfrak{S}(n)$, отвечающем разбиению ρ . Другими словами,

$$\chi_\rho^\lambda := \chi_\lambda^{\mathfrak{S}(n)}(s),$$

где s имеет цикловую структуру ρ .

Отметим, что при изменении N метка λ остается за тем же представлением симметрической группы $\mathfrak{S}(n)$. При $N \geq n$ формула (1.5) дает все представления $\mathfrak{S}(n)$, так как в $V^{\otimes n}$ содержится регулярное представление $\mathfrak{S}(n)$. Действительно, пусть $N = n$, рассмотрим тензорный моном $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, и его $\mathfrak{S}(n)$ -орбиту. Это и будет регулярное представление $\mathfrak{S}(n)$. Таким образом, мы получаем:

Теорема 1.13 (Фробениус). *1. Неприводимые представления $\mathfrak{S}(n)$ параметризуются диаграммами Юнга λ с n клетками.*

2. Таблица характеров $\mathfrak{S}(n)$ имеет вид $\chi_\rho^\lambda = [s_\lambda] \{p_\rho\}$.

Отметим, что сам Фробениус доказывал эту теорему без использования двойственности Шура–Вейля.

Вообще говоря, в формуле (1.5) можно считать, что число N неопределенно велико, то есть, перейти к *симметрическим функциям* (см. [Мак84, Гл. I, §2]). Пусть Λ — алгебра симметрических функций. Ее можно понимать как подалгебру в алгебре формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[x_1, x_2, \dots]]$, состоящую из рядов, которые имеют ограниченную степень,⁷ и симметричны по x_1, x_2, \dots .

Набор функций Шура $\{s_\lambda\}$, где λ пробегает все диаграммы Юнга, образует линейный базис в алгебре симметрических функций Λ . Набор $\{p_\rho\}$, где ρ пробегает все разбиения, также образует линейный базис в Λ . Теорема 1.13(2) утверждает, что таблица характеров группы $\mathfrak{S}(n)$ — это таблица коэффициентов перехода от базиса $\{p_\rho\}$ к базису $\{s_\lambda\}$. С использованием симметрических функций можно записать

$$\chi_\rho^\lambda = [s_\lambda] \{p_\rho\}, \quad p_\rho = \sum_{\lambda: |\lambda|=|\rho|} \chi_\rho^\lambda s_\lambda.$$

1.4 Вероятностная модель

Оказывается, двойственность Шура–Вейля приводит к некоторым вероятностным моделям.

⁷То есть, степени всех мономов в степенном ряду равномерно ограничены.

Мы знаем, что

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)} \otimes V_\lambda^{GL(N)}.$$

Выпишем соответствующую формулу для размерностей:

$$\dim V^{\otimes n} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \dim V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)} \dim V_\lambda^{GL(N)}.$$

Эта формула позволяет определить вероятностную меру $P_N^{(n)}(\lambda)$ на множестве диаграмм Юнга $\mathbb{Y}_n(N)$ с n клетками и имеющих длину $\leq N$. Ясно, что $\dim V^{\otimes n} = N^n$. Обозначим $\dim V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)}$ через $\dim \lambda$, а $\dim V_\lambda^{GL(N)}$ — через $\text{Dim}_N \lambda$.⁸ Таким образом,

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda. \quad (1.6)$$

Определим вероятностную меру $P_N^{(n)}$ на $\mathbb{Y}_n(N)$ следующим образом:

$$P_N^{(n)}(\lambda) := \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda}{N^n}.$$

Отметим, что для $\dim \lambda$ и $\text{Dim}_N \lambda$ существует несколько явных выражений, которые мы будем позже использовать.

В заключение отметим, что у тождества (1.6) существует и чисто комбинаторное биективное доказательство. Мы лишь укажем комбинаторный смысл тождества (1.6). А именно, $\dim \lambda = |\text{SYT}(\lambda)|$ — это число стандартных таблиц формы λ , а $\text{Dim}_N \lambda = |\text{SSYT}(\lambda; N)|$ — число полустандартных таблиц формы λ , заполненных числами $\leq N$ (см., напр., [Фул06]). Таким образом, (1.6) утверждает, что

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} |\text{SYT}(\lambda)| \cdot |\text{SSYT}(\lambda; N)|. \quad (1.7)$$

Комбинаторное доказательство этой формулы дает алгоритм Шенстеда (см., напр., [Фул06]), который мы рассмотрим в следующей лекции.

2 Алгоритмы Шенстеда и Робинсона–Шенстеда

Конечная цель данной лекции — дать комбинаторное доказательство формулы

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda, \quad (2.1)$$

⁸Размерность $\dim \lambda$ зависит от n через число клеток в диаграмме λ , но не зависит от N . В свою очередь, размерность $\text{Dim}_N \lambda$ зависит как от n , так и от «внешнего» параметра N .

где $\dim \lambda$ — размерность неприводимого представления $\mathfrak{S}(n)$, соответствующего диаграмме λ , а $\text{Dim}_N \lambda$ — размерность неприводимого представления $GL(N)$, соответствующего диаграмме λ . Формула (2.1) вытекает из двойственности Шура-Вейля, рассмотренной в предыдущей лекции. Мы запишем эту формулу в виде (1.7) и дадим ее биективное доказательство.

2.1 Правило ветвления многочленов Шура. Схемы Гельфанда–Цетлина

Напомним правило ветвления многочленов Шура (более подробно см. [Оль09, Лекция 1]). Пусть $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ — многочлен Шура, где λ — диаграмма Юнга. Многочлен $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ является симметрическим по x_1, \dots, x_N . Зафиксировав x_N , получим симметрический многочлен от x_1, \dots, x_{N-1} . Его снова можно разложить по симметрическим многочленам Шура от переменных x_1, \dots, x_{N-1} (такие многочлены образуют базис в пространстве симметрических многочленов). Полученное разложение называется *правилом ветвления*:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(x_1, \dots, x_{N-1}) x_N^{\sum \lambda_i - \sum \mu_j}. \quad (2.2)$$

Здесь сумма ведется по всем μ , которые перемежаются с λ :

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N. \quad (2.3)$$

Правило ветвления может быть доказано по определению многочленов Шура (как отношения соответствующих детерминантов).

Замечание 2.1. В условии перемежаемости (2.3) предполагается, что мы дополняем разбиение λ нулями до длины N . Ясно, что длина λ не может быть больше, чем N , так как иначе $s_\lambda(x_1, \dots, x_N) \equiv 0$.

Вообще говоря, в формуле (2.2), а также в определении размерности $\text{Dim}_N \lambda$, удобно считать λ не разбиением, а неотрицательной *сигнатурой* длины N . Сигнатура длины N — это последовательность невозрастающих целых чисел:

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Множество сигнатур длины N обозначим через $\text{Sign}(N)$. Через $\text{Sign}_+(N) \subset \text{Sign}(N)$ обозначим множество неотрицательных сигнатур, то есть, таких, что $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ясно, что $\text{Sign}_+(N) = \mathbb{Y}(N)$.⁹ Отношение перемежаемости (2.3) переносится и на сигнатуры.

Определение 2.2. *Схема Гельфанда–Цетлина* — это последовательность перемежающихся сигнатур

$$\lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)},$$

⁹Множество $\text{Sign}(N)$ параметризует неприводимые представления группы $GL(N)$, а $\text{Sign}_+(N) \subset \text{Sign}(N)$ параметризует полиномиальные представления $GL(N)$, которые получаются из тензоров (см. двойственность Шура–Вейля).

где $\lambda^{(i)} \in \text{Sign}(i)$.

Схемы Гельфанда–Цетлина удобно изображать в виде следующей пирамиды (для удобства приведем пример с $N = 4$):

$$\begin{array}{cccc}
 \lambda_1^{(4)} & & \lambda_2^{(4)} & & \lambda_3^{(4)} & & \lambda_4^{(4)} \\
 & \lambda_1^{(3)} & & \lambda_2^{(3)} & & \lambda_3^{(3)} & \\
 & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & \\
 & & & \lambda_1^{(1)} & & &
 \end{array}$$

Если в схеме Гельфанда–Цетлина зафиксировать верхнюю строчку, то число возможных заполнений пирамиды конечно.

С помощью схем Гельфанда–Цетлина можно дать комбинаторную формулу для многочленов Шура. Она получается, если к $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ ¹⁰ применить N раз правило ветвления, отделяя поочередно x_N, x_{N-1}, \dots, x_1 . В результате $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ раскладывается в сумму мономов следующим образом:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} x_1^{k_1(\tau)} \dots x_N^{k_N(\tau)}, \quad (2.4)$$

где сумма ведется по всем схемам Гельфанда–Цетлина $\tau = (\lambda^{(1)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)} = \lambda)$ с фиксированной верхней строчкой $\lambda \in \text{Sign}(N)$, и

$$\begin{aligned}
 k_N(\tau) &= \sum \lambda_i^{(N)} - \sum \lambda_j^{(N-1)}, \\
 k_{N-1}(\tau) &= \sum \lambda_j^{(N-1)} - \sum \lambda_l^{(N-2)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 k_1(\tau) &= \lambda_1^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что кратность вхождения отдельных мономов в сумму (2.4) может быть больше единицы.

Так как $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ — характер неприводимого представления $GL(N)$, соответствующего сигнатуре λ , то $\text{Dim}_N \lambda = s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N)$. Из (2.4) получим:

Следствие 2.3. Для $\lambda \in \text{Sign}(N)$ размерность $\text{Dim}_N \lambda$ равна числу схем Гельфанда–Цетлина с фиксированной верхней строчкой $\lambda^{(N)} = \lambda$.

2.2 Полустандартные таблицы Юнга и размерности неприводимых полиномиальных представлений $GL(N)$

От рассмотрения сигнатур (как это было в конце предыдущего подраздела) перейдем к неотрицательным сигнатурам. Ясно, что неотрицательные

¹⁰Если λ — произвольная сигнатура, то $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ — лорановский многочлен Шура, он определяется по той же формуле (через отношение двух определителей), что и обычный многочлен Шура. Отметим, что если сигнатура λ содержит отрицательные части, то s_λ уже не является многочленом от x_1, \dots, x_N .

сигнатуры длины N можно отождествить с диаграммами Юнга длины не больше N , то есть, $\text{Sign}_+(N) = \mathbb{Y}(N)$.

Определение 2.4. Пусть λ — диаграмма Юнга. *Полустандартной таблицей* формы λ со значениями в $[N] := \{1, \dots, N\}$ называется функция $T: \square \rightarrow [N]$, где $\square \in \lambda$, то есть, заполнение клеток диаграммы λ числами из $[N]$, при котором числа нестрого возрастают по строчкам и строго возрастают по столбцам.

Например, если $\lambda = (4, 3, 1)$ и $N = 5$, то одна из полустандартных таблиц формы λ со значениями из $[N]$ имеет вид:

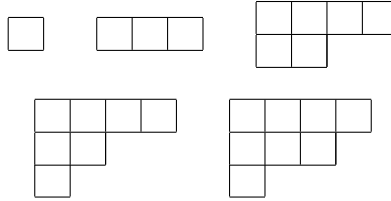
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 5 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.5)$$

Через $SSYT(\lambda; N)$ обозначим множество всех полустандартных таблиц формы λ со значениями в $[N]$. Это множество непусто, только если $\ell(\lambda) \leq N$.

Предложение 2.5. Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$. Существует биекция между множеством $SSYT(\lambda; N)$ и множеством схем Гельфанда–Цетлина с фиксированной верхней строчкой $\lambda^{(N)} = \lambda$.

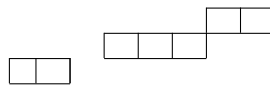
Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. По полустандартной таблице формы строится последовательность диаграмм Юнга $\lambda^{(i)}$ (которые входят в схему Гельфанда–Цетлина $\tau = (\lambda^{(1)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)})$), где $\lambda^{(i)}$ — поддиаграмма в λ , состоящая из всех клеток \square , в которых в полустандартной таблице стоит число $\leq i$.

Например, таблице (2.5) соответствует следующая последовательность диаграмм:



Более строго, условие полустандартности можно переформулировать следующим образом. Обозначим через $\lambda^{(i)}$ поддиаграмму в λ , состоящую из всех клеток \square , в которых в полустандартной таблице стоит число $\leq i$. Рассмотрим *косую диаграмму Юнга* $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$, то есть, множество клеток в полустандартной таблице, в которых стоит число i . Условие полустандартности состоит в том, что для всех i косая диаграмма $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ представляет собой *горизонтальную полосу* — такую косую диаграмму, в которой в каждом столбце стоит не более одной клетки.¹¹

¹¹Пример горизонтальной полосы:



Таким образом, каждая полустандартная таблица есть последовательность диаграмм Юнга, в которой каждая следующая диаграмма получается из предыдущей приклеиванием горизонтальной полоски. Легко понять, что это условие равносильно перемежаемости диаграмм Юнга в этой последовательности. Таким образом, данная последовательность диаграмм является схемой Гельфанда–Цетлина. \square

Из этого предложения следует, что

$$\dim_N \lambda = |SSYT(\lambda; N)|.$$

2.3 Стандартные таблицы Юнга и размерности неприводимых представлений $\mathfrak{S}(n)$

При комбинаторной интерпретации размерности $\dim \lambda$ неприводимого представления группы $\mathfrak{S}(n)$ (см. (2.1)) вместо условия перемежаемости $\mu \prec \lambda$ возникает условие $\mu \nearrow \lambda$, состоящее в том, что λ получается из μ путем добавления одной клетки (тогда $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ и $\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}$ для некоторого n). Другими словами, $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_\ell)$ для некоторого i (при этом должно быть $\lambda_i > \lambda_{i+1}$).

Пользуясь нашими знаниями о характерах $\mathfrak{S}(n)$ (см. предыдущую лекцию), докажем правило Юнга ветвления неприводимых представлений $\mathfrak{S}(n)$. Пусть $n \geq 2$. В группе $\mathfrak{S}(n)$ существует подгруппа, изоморфная $\mathfrak{S}(n-1)$. Например, подгруппа, состоящая из перестановок, оставляющих на месте элемент n .

Предложение 2.6 (Правило Юнга). *Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ — диаграмма Юнга, и χ^λ — соответствующий характер неприводимого представления $\mathfrak{S}(n)$. Тогда*

$$\chi^\lambda|_{\mathfrak{S}(n-1)} = \sum_{\mu: \mu \nearrow \lambda} \chi^\mu. \quad (2.6)$$

Доказательство. Используем формулу Фробениуса (теорема 1.13) для характеров группы $\mathfrak{S}(n)$:

$$p_\rho = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \chi_\rho^\lambda s_\lambda, \quad (2.7)$$

где $\rho \vdash n$ — разбиение числа n , и тождество выше понимается как равенство симметрических функций.¹² Правую часть формулы (2.7) можно трактовать как производящую функцию для характеров, которая связывает индекс λ . Также (2.7) можно записывать в виде

$$\chi_\rho^\lambda = [p_\rho : s_\lambda], \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n, \quad \rho \vdash n.$$

Чтобы ограничить характер χ^λ группы $\mathfrak{S}(n)$ на подгруппу $\mathfrak{S}(n-1)$, следует взять разбиение $\sigma \vdash n-1$, и положить $\rho = \sigma \cup 1$ (то есть, ρ получается

¹²От бесконечного числа переменных, см., напр., [Мак84, Гл. I, §2] (краткое определение дано также в предыдущей лекции).

из σ добавлением единичной части, в терминах диаграмм Юнга это отвечает добавлению новой строки, состоящей из одной клетки). Все разбиения вида $\rho = \sigma \cup 1$ отвечают цикловым структурам перестановок, входящих в подгруппу $\mathfrak{S}(n-1) \subset \mathfrak{S}(n)$.

Имеем

$$\chi_{\sigma \cup 1}^\lambda = [p_{\rho \cup 1} : s_\lambda].$$

Ясно, что $p_{\sigma \cup 1} = p_\sigma \cdot p_1$. Таким образом,

$$\chi_{\sigma \cup 1}^\lambda = [p_\sigma p_1 : s_\lambda] = \left[p_1 \sum_{\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}} \chi_\sigma^\mu s_\mu : s_\lambda \right] = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}} \chi_\sigma^\mu [s_\mu p_1 : s_\lambda].$$

Используя определение многочленов Шура через отношение двух определителей, можно показать (упражнение 8.2), что

$$s_\mu p_1 = \sum_{\lambda: \mu \nearrow \lambda} s_\lambda.$$

Таким образом, получаем искомое утверждение:

$$\chi_{\sigma \cup 1}^\lambda = \sum_{\mu: \mu \nearrow \lambda} \chi_\sigma^\mu.$$

□

Итерируя правило ветвления (2.6), легко получить следующее комбинаторное описание размерности $\dim \lambda$ неприводимого представления группы $\mathfrak{S}(n)$:

Следствие 2.7. *Размерность $\dim \lambda = \chi_{(1, \dots, 1)}^\lambda$ (где $\lambda \in \mathbb{Y}_n$) неприводимого представления группы $\mathfrak{S}(n)$ есть число последовательностей диаграмм Юнга вида*

$$\lambda^{(1)} \nearrow \lambda^{(2)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n)} = \lambda, \quad (2.8)$$

то есть, число возможных вариантов выстраивания диаграммы Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ путем последовательного добавления одной клетки.

Замечание 2.8. Можно отметить, что комбинаторные интерпретации размерностей $\dim \lambda$ представлений $\mathfrak{S}(n)$ и $\text{Dim}_N \lambda$ представлений $GL(N)$ в чем-то похожи, отличие состоит только в том, что в определении $\dim \lambda$ разрешается приклеивать только по одной клетке, тогда как в определении $\text{Dim}_N \lambda$ можно приклеивать целые горизонтальные полосы.

Определение 2.9. Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. *Стандартной таблицей* формы λ называется заполнение диаграммы λ числами $1, 2, \dots, n$ (каждое число встречается по одному разу), при котором числа возрастают вдоль строчек и вдоль столбцов. Обозначим через $SYT(\lambda)$ множество стандартных таблиц формы λ .

Пример стандартной таблицы формы $\lambda = (4, 3, 1)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 7 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.9)$$

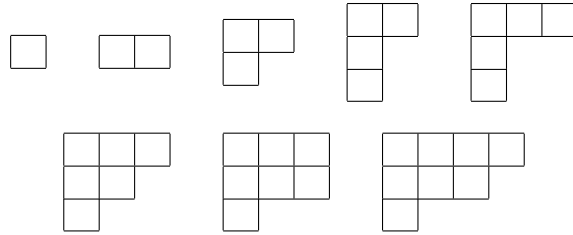
Отметим, что $SYT(\lambda) \subset SSYT(\lambda; n)$, где $n = |\lambda| := \sum \lambda_i$.
Таким образом, мы доказали:

Предложение 2.10. *Размерность неприводимого представления группы $\mathfrak{S}(n)$, отвечающего диаграмме Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, равна числу стандартных таблиц формы λ :*

$$\dim \lambda = |SYT(\lambda)|.$$

Доказательство. Действительно, диаграмма $\lambda^{(i)}$ в последовательности 2.8 определяется также, как и в случае $GL(N)$: $\lambda^{(i)}$ состоит из всех клеток в стандартной таблице формы λ , в которых стоит число $\leq i$.

Например, стандартной таблице (2.9) отвечает следующая последовательность диаграмм Юнга:



□

2.4 Алгоритм Шенстеда и двойственность Шура–Вейля

Вернемся к нашему тождеству для размерностей, которое получается из двойственности Шура–Вейля (см. предыдущую лекцию). Его можно записать следующим образом:

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} |SYT(\lambda)| \cdot |SSYT(\lambda; N)|. \quad (2.10)$$

В этом подразделе мы дадим биективное доказательство этого тождества с использованием комбинаторного алгоритма, который будем называть алгоритмом Шенстеда.¹³

Во-первых, заметим, что N^n — это число элементов в множестве $[N]^n$ (где $[N] = 1, \dots, N$). Другими словами, N^n есть число упорядоченных слов

¹³В наибольшей общности этот алгоритм называется RSK-алгоритмом (Робинсон–Шенстед–Кнут). Шенстед был первым, кто рассматривал один частный случай этого алгоритма.

длины n в алфавите $[N]$. Алгоритм Шенстеда каждому слову сопоставляет пару таблиц одинаковой формы λ :

$$[N]^n \ni w = w_1 \dots w_n \mapsto (P, Q), \quad \text{где } P \in SSYT(\lambda; N) \text{ и } Q \in SYT(\lambda). \quad (2.11)$$

Здесь λ — некоторая диаграмма Юнга с n клетками (какая получится при применении алгоритма к слову w).

Мы не будем описывать алгоритм Шенстеда полностью формально, а ограничимся одним примером. Полное формальное описание можно найти в книге Фултона [Фул06, §1.1 и §4.1].

Пусть $N = 5$, $n = 7$ и слово

$$w = 5233143. \quad (2.12)$$

Сначала покажем, как строится полустандартная таблица P . Она строится в $n = 7$ шагов. На каждом шаге «читается» очередная буква в слове w и выполняется так называемая *строчная вставка* этой буквы в уже имеющуюся таблицу.

1. Уже имеющаяся таблица пуста, поэтому мы просто строим таблицу из одной клетки, в которой записано число 5:

$$\boxed{5}$$

2. Читаем следующую букву 2, пытаемся вставить ее в первую строчку. Ее нельзя поставить в конец первой строчки без нарушения условия полустандартности, поэтому 2 выбивает 5, при этом 2 становится на место 5, а 5 мы вставляем в следующую строчку:

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

3. Читаем букву 3, ее можно вставить в конец первой строчки:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$

4. Читаем букву 3, ее опять можно вставить в конец первой строчки:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

5. Читаем букву 1, эта буква выбивает 2 из первой строчки, а 2 при вставке во вторую строчку выбивает оттуда 5:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

6. Читаем букву 4, она становится в конец первой строчки:

1	3	3	4
2			
5			

7. Наконец, читаем букву 3, она выбивает букву 4 из первой строчки, а буква 4, в свою очередь, становится в конец второй строчки:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.13)$$

В итоге получается полустандартная таблица P с n клетками, заполненная числами от 1 до N . Отметим, что таблица P заполнена именно буквами нашего исходного слова w .

Стандартная таблица Q строится как последовательность диаграмм Юнга, которые получаются на каждом шаге построения таблицы P . В данном примере стандартная таблица Q имеет вид:

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 7 & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.14)$$

Таким образом, алгоритм Шенстеда по каждому слову из $[N]^n$ строит пару таблиц одинаковой формы — стандартную и полустандартную (заполненную числами от 1 до N). Например, по слову (2.12) были построены таблицы (2.13) и (2.14).

Алгоритм можно обратить, то есть, по паре таблиц $P \in SSYT(\lambda; N)$ и $Q \in SYT(\lambda)$ можно построить слово $w \in [N]^n$, так что соответствие Шенстеда (2.11) между словами и парами таблиц взаимно однозначно. Мы не будем этого доказывать, доказательство можно найти в [Фул06].

Таким образом, алгоритм Шенстеда дает биективное доказательство формулы (2.10).

2.5 Алгоритм Робинсона–Шенстеда и теорема Бернсайда для $\mathfrak{S}(n)$

Рассмотрим один важный частный случай алгоритма Шенстеда, который будем называть алгоритмом Робинсона–Шенстеда.

Будем трактовать группу $\mathfrak{S}(n)$ как множество перестановочных слов. Другими словами, каждой перестановке

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

припишем слово $w = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$. Ясно, что $w \in [n]^n$. На множестве всех перестановочных слов из n букв запустим алгоритм Шенстеда. Каждому перестановочному слову w этот алгоритм сопоставит пару *стандартных*

таблиц (P, Q) одинаковой формы λ . Действительно, таблица $Q \in SYT(\lambda)$ стандартна по построению, а полустандартная таблица $P \in SSYT(\lambda; n)$ заполнена буквами нашего исходного перестановочного слова (в котором каждая буква повторяется только по одному разу).

Замечание 2.11. Две стандартные таблицы P и Q возникают из совершенно различных соображений — в P записываются буквы нашего перестановочного слова, а таблица Q регистрирует рост диаграммы Юнга. В следующем подразделе мы приведем геометрическую интерпретацию алгоритма Робинсона–Шенстеда, в которой роль таблиц P и Q симметрична.

Оказывается, что если перестановке $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ соответствует пара стандартных таблиц (P, Q) , то пара таблиц (Q, P) соответствует перестановке σ^{-1} .

В результате из описанной конструкции мы получаем следующее тождество:

$$|\mathfrak{S}(n)| = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} |SYT(\lambda)|^2,$$

или

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} (\dim \lambda)^2. \quad (2.15)$$

Тождество (2.15) называется теоремой Бернсайда (для группы $\mathfrak{S}(n)$), которая утверждает в общем случае, что

для любой конечной группы сумма квадратов размерностей ее неприводимых комплексных представлений равна порядку группы.

Как мы видели, в случае группы $\mathfrak{S}(n)$ существует биективное доказательство этой теоремы.

Открытая проблема состоит в том, чтобы найти биективное доказательство теоремы Бернсайда для «родственника»¹⁴ группы $\mathfrak{S}(n)$ — группы $GL(n, \mathbb{F}_q)$ обратимых матриц над полем из q элементов.

2.6 Геометрическая интерпретация алгоритма Робинсона–Шенстеда

Приведем геометрическую интерпретацию алгоритма Робинсона–Шенстеда (для симметрической группы), заимствованную из книги [Sag01]. Эта конструкция была открыта Viennot. Мы будем рассматривать данную конструкцию на примере:

$$n = 7, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(7).$$

¹⁴Есть некоторые неформальные причины для отождествления $\mathfrak{S}(n)$ с « $GL(n, \mathbb{F}_1)$ ».

При применении алгоритма Робинсона–Шенстеда к этой перестановке (то есть, к слову $w = 4236517$) получатся таблицы

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

Теперь опишем нашу геометрическую конструкцию. Начнем с того, что нарисуем график перестановки σ как отображения $[n] \rightarrow [n]$ (рис. 1). От

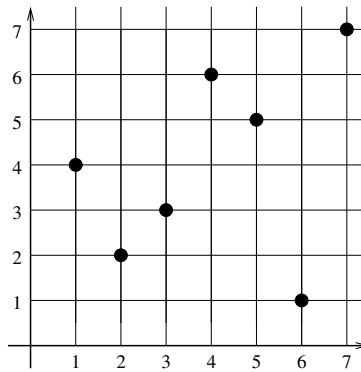


Рис. 1.

каждой точки на графике проведем вертикальный и горизонтальный лучи в положительном направлении, и «закрасим» область между лучами (рис. 2). Рассмотрим объединение всех этих областей и границу этого объеди-

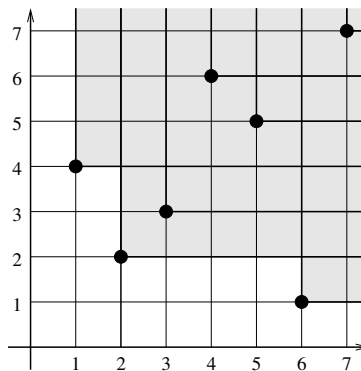


Рис. 2.

нения. Отдельно пометим «внутренние углы» границы, то есть, те углы, которые не принадлежат графику нашей перестановки (рис. 3). Повторим процедуру еще несколько раз (в нашем случае еще 3 раза) внутри области

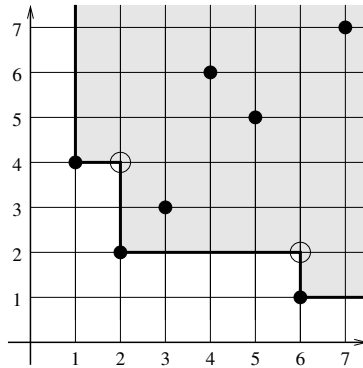


Рис. 3.

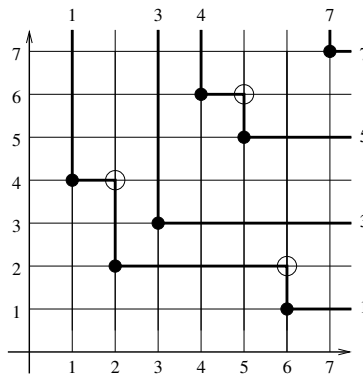


Рис. 4.

(рис. 4). На рис. 4 мы видим 4 луча, уходящие вверх, и 4 луча, уходящие вправо. Запишем их абсциссы и ординаты, соответственно. Видно, что числа справа совпадают с числами, стоящими в первой строчке таблицы P , а числа сверху совпадают с числами, стоящими в первой строчке таблицы Q . Чтобы получить вторые строчки таблиц, надо повторить всю процедуру, взяв изначально вместо графика перестановки обведенные точки на рис. 4. Получим вторые строчки таблиц P и Q (рис. 5). Продолжая ту же самую

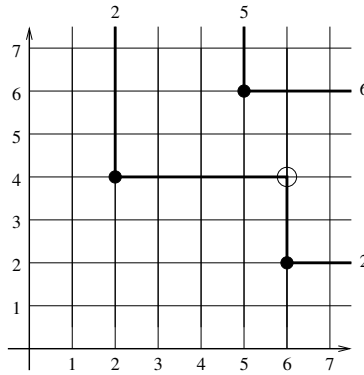


Рис. 5.

процедуру с обведенной точкой на рис. 5, получим третьи строчки таблиц P и Q .

Доказательство того, что для любого перестановочного слова мы в результате действительно получим таблицы P и Q (в которые это слово перерабатывается алгоритмом Робинсона–Шенстеда), можно найти в книге [Sag01].

Замечание 2.12. Из данной геометрической интерпретации видно, что если перестановочное слово $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ перерабатывается алгоритмом Робинсона–Шенстеда в пару стандартных таблиц (P, Q) , то слово $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}(n)$ (отвечающее обратной перестановке) перерабатывается в пару таблиц (Q, P) . Действительно, график обратной перестановки σ^{-1} получается из графика σ транспонированием.

2.7 Упражнения

Упражнение 2.1. Пользуясь определением многочленов Шура, покажите, что

$$s_{\mu} p_1 = \sum_{\lambda: \mu \nearrow \lambda} s_{\lambda}.$$

3 Формулы для размерности. Случайные диаграммы Юнга

3.1 Два ансамбля случайных диаграмм Юнга

Напомним, что у нас были два параметра — натуральные числа n и N . Из двойственности Шура–Вейля для представлений $\mathfrak{S}(n)$ и $GL(N)$ мы получили следующую формулу (см. лекцию 1):

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} |SYT(\lambda)| \cdot |SSYT(\lambda; N)|. \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbb{Y}_n(N)$ — множество диаграмм Юнга с n клетками и $\leq N$ ненулевыми строчками, $SYT(\lambda)$ — множество стандартных таблиц формы λ , а $SSYT(\lambda; N)$ — множество полустандартных таблиц формы λ , заполненных числами из алфавита $[N] := \{1, \dots, N\}$.

В лекции 2 мы дали комбинаторное доказательство формулы (3.1), а также получили еще одно важное тождество — теорему Бернсайда для $\mathfrak{S}(n)$:

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} |SYT(\lambda)|^2. \quad (3.2)$$

Мы знаем, что $|SYT(\lambda)| = \dim \lambda$ — размерность соответствующего неприводимого представления $\mathfrak{S}(n)$, а $|SSYT(\lambda; N)| = \text{Dim}_N \lambda$ — представления $GL(N)$.

С помощью тождеств (3.1) и (3.2) определим две вероятностные меры на диаграммах Юнга:

- Определение 3.1.**
- $P_N^{(n)}(\lambda) := \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda}{N^n}$, $\text{supp } P_N^{(n)} = \mathbb{Y}_n(N)$.
 - $P^{(n)}(\lambda) := \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$, $\text{supp } P^{(n)} = \mathbb{Y}_n$.

Другими словами, мы определили два ансамбля случайных диаграмм Юнга. Мера $P^{(n)}$ на \mathbb{Y}_n называется *мерой Планшереля* (название введено Вершиком и Керовым [BK77]). Эта мера связана с формулой Планшереля для симметрической группы.

Отметим, что для $N \geq n$ выполнено $\mathbb{Y}_n(N) = \mathbb{Y}_n$. Вообще, можно считать, что меры $P_N^{(n)}$ и $P^{(n)}$ живут на одном и том же (конечном) множестве \mathbb{Y}_n .

Предложение 3.2. $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N^{(n)} = P^{(n)}$.¹⁵

¹⁵Отметим, что так как множество \mathbb{Y}_n конечно, то доказывать сходимость мер надо просто на каждой фиксированной диаграмме Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}_n$.

Доказательство. Используем комбинаторные алгоритмы, рассмотренные в лекции 2. Алгоритм Шенстеда дает нам проекцию

$$[N]^n \rightarrow \mathbb{Y}_n(N) \subseteq \mathbb{Y}_n \quad (3.3)$$

(по слову $w \in [N]^n$ строятся две таблицы одинаковой формы λ , и выше слову $w \in [N]^n$ мы как раз и сопоставляем диаграмму $\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)$). Число N можно считать достаточно большим, так что $\mathbb{Y}_n(N) = \mathbb{Y}_n$. То есть, у нас есть проекция

$$[N]^n \rightarrow \mathbb{Y}_n.$$

На множестве $[N]^n$ введем равномерную меру. Легко видеть, что при проекции $[N]^n \rightarrow \mathbb{Y}_n$ эта мера переходит в $P_N^{(n)}$.

Отметим, что с вероятностью, близкой к единице (при больших N), все буквы случайного слова $w = w_1 w_2 \dots w_n \in [N]^n$ будут различны. Действительно, обозначим через $[N]_o^n \subset [N]^n$ множество слов, в которых все буквы различны. Тогда ясно, что

$$[N]^n = N^n, \quad [N]_o^n = N(N-1)\dots(N-n+1),$$

и поэтому

$$\frac{|[N]_o^n|}{|[N]^n|} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty$$

при фиксированном n .

Условная мера на множестве $[N]_o^n$ также будет равномерной. На множестве $[N]_o^n$ также можно устроить проекцию $[N]_o^n \rightarrow \mathfrak{S}(n)$. Действительно, для каждого слова $w = w_1 \dots w_n \in [N]_o^n$, в котором все буквы различны, рассмотрим слово, составленное из рангов его букв (например, для слова 714 слово из рангов — это 312). Слово, составленное из рангов, уже является перестановочным словом, то есть, элементом $\mathfrak{S}(n)$. Алгоритм Робинсона–Шенстеда дает проекцию $\mathfrak{S}(n) \rightarrow \mathbb{Y}_n$. При этой проекции равномерная мера на $\mathfrak{S}(n)$ переходит в меру Планшереля $P^{(n)}$ на \mathbb{Y}_n .

Так как алгоритмы Шенстеда и Робинсона–Шенстеда на самом деле оперируют только с рангами букв (в соответствующих алфавитах), то легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [N]_o^n & \rightarrow & \mathfrak{S}(n) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{Y}_n \end{array}$$

коммулативна. В этой диаграмме равномерная мера на $[N]_o^n$ переходит в меру Планшереля на \mathbb{Y}_n . Равномерная мера на $[N]^n$, в свою очередь, определяет меру $P_N^{(n)}$ на \mathbb{Y}_n .

Так как при $N \rightarrow \infty$ вклад разницы $[N]^n \setminus [N]_o^n$ стремится к нулю, видно, что $P_N^{(n)} \rightarrow P^{(n)}$. \square

3.2 Формулы для размерности $\text{Dim}_N \lambda$

В этом подразделе мы рассмотрим явные формулы для размерности неприводимых (полиномиальных) представлений $GL(N)$, то есть, для чисел $\text{Dim}_N \lambda = |\text{SSYT}(\lambda; N)|$.

Предложение 3.3. *Имеем*

$$\text{Dim}_N \lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}. \quad (3.4)$$

Доказательство I. Как известно, $\text{Dim}_N \lambda = s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N)$. Для вычисления этого значения функции Шура можно пользоваться определением функции $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ как отношения двух определителей:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + N - i})_{i,j=1,\dots,N}}{V(x_1, \dots, x_N)},$$

где V_N — определитель Вандермонда. При $x_1 = \dots = x_N = 1$ числитель и знаменатель обнуляются. Однако, для вычисления $s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N)$ можно использовать следующий прием (подробнее см., напр., в [Оль09, Лекция 2]): сначала положить $x_1 = 1, x_2 = q, \dots, x_N = q^{N-1}$, и посчитать $s_\lambda(1, q, \dots, q^{N-1})$, а затем перейти к пределу при $q \rightarrow 1$. \square

Доказательство II. Дадим важную интерпретацию $\text{Dim}_N \lambda$ как некоторого числа непересекающихся путей. От записи $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0)$ перейдем к записи $l = (l_1 > l_2 > \dots > l_N \geq 0)$, где

$$l_i := \lambda_i + N - i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Будем интерпретировать l как точечную конфигурацию в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Положим также

$$l^0 := (N - 1, N - 2, \dots, 1, 0).$$

Конфигурация l^0 соответствует пустой диаграмме Юнга.

Рассмотрим следующую модель непересекающихся путей. Разместим точки конфигураций l^0 и l на решетке, как показано на рис. 6. Точки конфигурации l^0 (то есть, точки $(N - 1, N - 2, \dots, 1, 0)$) разместим слева, это будут «входы», а точки конфигурации l — справа, это будут «выходы».

Рассмотрим непересекающиеся пути, которые соединяют l_i^0 с l_i , $i = 1, 2, \dots, N$ (всего N путей). Пути должны проходить вдоль ребер ориентированного графа, изображенного на рис. 7 (заметим, что слева отсутствуют ребра, идущие вверх!). Пример семейства непересекающихся путей изображен на рис. 8.

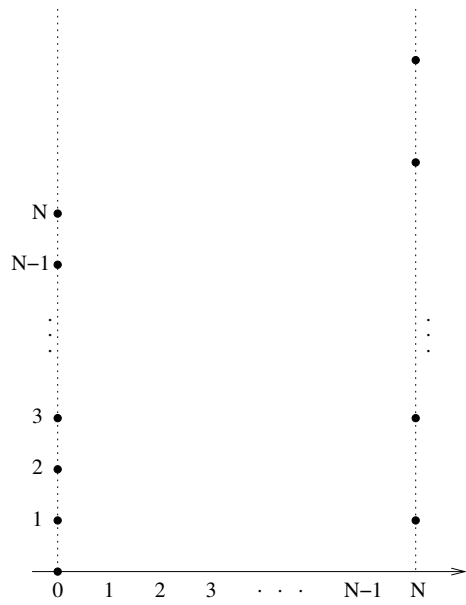


Рис. 6.

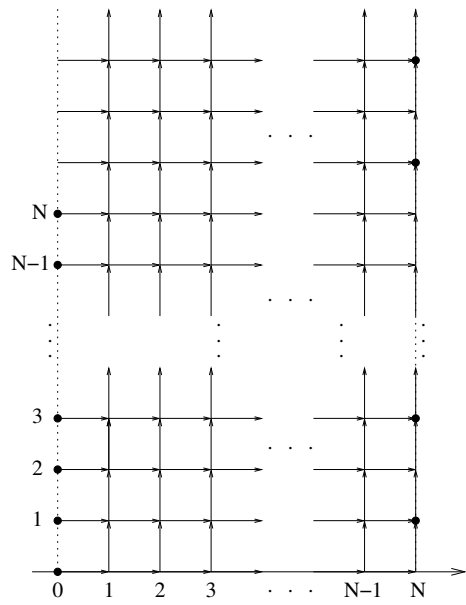


Рис. 7.

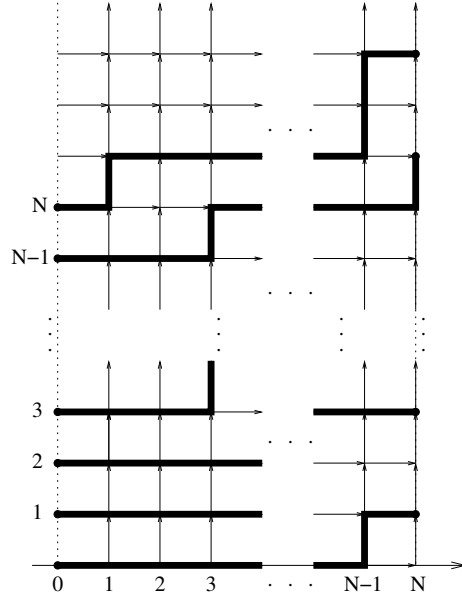


Рис. 8.

Существует биекция между множеством $SSYT(\lambda; N)$ полустандартных таблиц формы λ и описанным множеством наборов непересекающихся путей. Действительно, полустандартная таблица формы λ — это последовательность диаграмм Юнга

$$\emptyset = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \dots \subset \lambda^{(N)} = \lambda, \quad \lambda^{(i)} \in \mathbb{Y}(i),$$

с условием, что для всех i косая диаграмма $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ представляет собой горизонтальную полосу. Можно легко понять, что конфигурация $l(i)$ (где i — «время», которое измеряется вдоль оси абсцисс) как раз соответствует диаграмме $\lambda^{(i)}$.

Таким образом, задача подсчета размерности $\text{Dim}_N \lambda = |SSYT(\lambda; N)|$ сводится к подсчету числа наборов непересекающихся путей. Подобный подсчет был проделан, напр., в [Оль09, Лекция 6]. Искомое число наборов непересекающихся путей равно

$$\det [A(i, j)]_{i, j=1}^N,$$

где $A(i, j)$ — число всех путей от $l_i^0 = N - i$ до $l_j = \lambda_j + N - j$ вдоль ребер ориентированного графа (см. рис. 7). Легко видеть, что $A(i, j)$ — это биномиальный коэффициент

$$A(i, j) = \frac{(\lambda_j - j + i + N - 1)!}{(\lambda_j - j + i)!(N - 1)!}. \quad (3.5)$$

Таким образом, доказательство предложения сводится к подсчету определителя $\det [A(i, j)]$. Этот определитель можно вычислить, пользуясь обзором [Кга99].

Предложение доказано. \square

Дадим еще одну формулу для $\text{Dim}_N \lambda$.

Предложение 3.4. *Имеем*

$$\text{Dim}_N \lambda = \prod_{\square \in \lambda} \frac{N + c(\square)}{h(\square)}. \quad (3.6)$$

Здесь произведение ведется по всем клеткам \square диаграммы λ , $c(\square)$ — *содержание* клетки, а $h(\square)$ — *длина крюка* клетки. Если клетка \square находится в j -м столбце и i -й строке, то $c(\square)$ по определению равно $j - i$. Длина крюка $h(\square)$ — это число клеток диаграммы λ , которые находятся строго справа от клетки \square плюс число клеток, которые находятся строго снизу от клетки \square плюс один (мы также включаем в крюк саму клетку \square). Пример крюка — на рис. 9. В качестве еще одного примера возьмем конкретную диаграмму

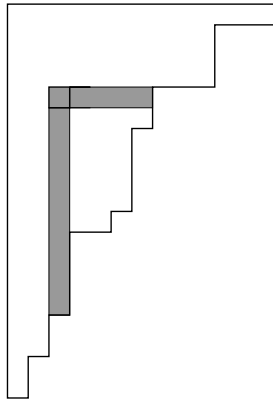


Рис. 9.

λ и запишем в каждой клетке длину ее крюка:

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Доказательство. Доказать, что формулы (3.4) и (3.6) для $\text{Dim}_N \lambda$ эквивалентны, можно напрямую, см., напр., [Мак84, Гл. I]. \square

Дадим несколько замечаний о формулах (3.4) и (3.6) для размерности $\text{Dim}_N \lambda$.

- Во-первых, из (3.6) видно, что для фиксированного λ величина $\text{Dim}_N \lambda$ представляет собой многочлен от N степени n со старшим членом $\prod_{\square \in \lambda} \frac{1}{h(\square)}$.
- Если $\ell(\lambda) > N$, то из (3.6) видно, что $\text{Dim}_N \lambda = 0$. Действительно, если $\ell(\lambda) > N$, то в λ обязательно найдется клетка (в первом столбце) с содержанием $(-N)$.

Отметим, что в лекции 2 мы интерпретировали размерность $\text{Dim}_N \lambda$ как число схем Гельфанда–Цетлина с фиксированной верхней строкой $\lambda^{(N)} = \lambda$. Поэтому размерность $\text{Dim}_N \lambda$ удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$\text{Dim}_N \lambda = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} \text{Dim}_{N-1} \mu \quad (3.7)$$

с начальными условиями

$$\text{Dim}_1 \lambda = 1 \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{Y}(1) = \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (3.8)$$

Напомним, что запись $\mu \prec \lambda$ означает, что μ перемежается с λ (см. лекцию 2).

В книге [Мак84] написано явное доказательство того, что правая часть формулы (3.4) для $\text{Dim}_N \lambda$ удовлетворяет этим рекуррентным соотношениям.

3.3 Формулы для размерности $\dim \lambda$

Перейдем к рассмотрению размерности $\dim \lambda$ соответствующего неприводимого представления $\mathfrak{S}(n)$:

$$\dim \lambda = \chi_{(1, \dots, 1)}^\lambda = \dim V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)}.$$

Напомним, что $\dim \lambda$ — это также число стандартных таблиц формы λ .

Докажем три формулы для $\dim \lambda$:

Предложение 3.5. 1.

$$\dim \lambda = \frac{n! \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{i=1}^N (\lambda_i + N - i)!}, \quad (3.9)$$

где N — любое число $\geq \ell(\lambda)$.

2.

$$\dim \lambda = n! \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]_{i,j=1}^N, \quad (3.10)$$

где N — опять же любое число $\geq \ell(\lambda)$.¹⁶

¹⁶Отметим, что матрица $\left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]$ является почти унитреугольной, то есть, представляет собой матрицу с единицами на главной диагонали и нулями под главной диагональю, «испорченную» в конечном числе мест. Поэтому можно даже считать, что $\det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]$ есть детерминант бесконечной матрицы.

3. (формула крюков)

$$\dim \lambda = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}. \quad (3.11)$$

Эквивалентность формул (3.9), (3.10) и (3.11). Можно понять (подсчитав определитель в (3.10) [Кра99]), что (3.9) — это то же самое, что (3.10),

Положим $N = \ell(\lambda)$ в (3.9) (легко понять, что при разных $N \geq \ell(\lambda)$ правая часть (3.9) дает одно и то же). Эквивалентность (3.9) и (3.11) устанавливается по индукции по числу столбцов в диаграмме λ : отрезем от λ первый (самый левый) столбец, и проследим, как изменятся правые части (3.9) и (3.11) при этом отрезании.

Таким образом, эквивалентность формул (3.9), (3.10) и (3.11) установлена. Перейдем к доказательству того, что они действительно дают $\dim \lambda$. Будем доказывать это несколькими способами.

Первый способ. Воспользуемся фундаментальной теоремой Фробениуса (теорема 1.13):

$$\chi_\rho^\lambda = [p_\rho : s_\lambda].$$

Нам надо вычислить размерность $\dim \lambda = \chi_{(1, \dots, 1)}^\lambda$. Ясно, что $p_{(1, \dots, 1)} = p_1^n$, поэтому

$$\dim \lambda = [p_1^n : s_\lambda].$$

От симметрических функций p_1^n и s_λ перейдем к симметрическим многочленам, взяв достаточно большое конечное число переменных (скажем, $N \geq n$). Таким образом, следует найти коэффициент при $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ в многочлене $(x_1 + \dots + x_N)^n$. Воспользуемся [Оль09, Замечание 1.11], из которого следует, что

$$\dim \lambda = \left[(x_1 + \dots + x_N)^N V_N(x_1, \dots, x_N) : x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_N^{l_N} \right],$$

где V_N — определитель Вандермонда и $l_i = \lambda_i + N - i$.

Второй способ. Этот способ состоит в проверке соответствующих рекуррентных соотношений для $\dim \lambda$ (они вытекают из интерпретации $\dim \lambda$ как числа стандартных таблиц):

$$\dim \lambda = \sum_{\mu: \mu \nearrow \lambda} \dim \mu \quad (3.12)$$

с начальным условием $\dim \emptyset = 1$.

Третий способ. Этот способ состоит в использовании формулы (3.6) для $\text{Dim}_N \lambda$ и сходимости вероятностных мер (на \mathbb{Y}_n) $P_N^{(n)}$ к $P^{(n)}$. В результате получится формула крюков (3.11) для $\dim \lambda$. Действительно, для фиксированной диаграммы λ имеем

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \dim \lambda \cdot \frac{\text{Dim}_N \lambda}{N^n} = \dim \lambda \cdot \frac{1}{N^n} \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{N + c(\square)}{h(\square)}.$$

С одной стороны, это выражение стремится к $P^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$, а с другой — к

$$\dim \lambda \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1}{h(\square)}.$$

3.4 Отступление: связь $\text{Dim}_N \lambda$ с резольвентами

Формула $\text{Dim}_N \lambda = \det [A(i, j)]$, где $A(i, j)$ — соответствующие биномиальные коэффициенты (3.5), является специализацией тождества Якоби–Труди (см., напр., [Мак84, Гл. I]):

$$s_\lambda = \det [h_{\lambda_i - i + j}], \quad (3.13)$$

где $h_k = s_{(k)}$ — полные симметрические функции. Специализация берется в точке $x_1 = \dots = x_N = 1$.

Известно, что $h_k(x_1, \dots, x_N)$ — это характер $S^k \mathbb{C}^N$ (как представления $GL(N)$, где \mathbb{C}^N — тавтологическое представление $GL(N)$). Ясно, что тождество (3.13) можно записать в виде

$$s_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} \text{sgn}(\sigma) \cdot h_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \dots h_{\lambda_N - N + \sigma(N)}. \quad (3.14)$$

Понятно, что $h_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \dots h_{\lambda_N - N + \sigma(N)}$ — характер тензорного произведения

$$S^{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes S^{\lambda_N - N + \sigma(N)} \mathbb{C}^N.$$

Перепишем (3.14) в виде

$$s_\lambda = \sum_{k=0}^{N(N-1)/2} (-1)^k \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N): \text{sgn}(\sigma)=k} h_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \dots h_{\lambda_N - N + \sigma(N)}$$

и определим $GL(N)$ -модуль

$$V^{(k)} := \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}(N): \text{sgn}(\sigma)=k} \left(S^{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes S^{\lambda_N - N + \sigma(N)} \mathbb{C}^N \right),$$

где $k = 0, 1, \dots, N(N-1)/2$.

Эти рассуждения могли бы означать, что существует точная резольвента

$$0 \rightarrow V^{\binom{N(N-1)}{2}} \rightarrow \dots \rightarrow V^{(1)} \rightarrow V^{(0)} \rightarrow V_\lambda^{GL(N)},$$

где $V_\lambda^{GL(N)}$ — неприводимое представление $GL(N)$ с характером s_λ .¹⁷ Задача состоит в том, чтобы явно построить эту резольвенту.

¹⁷Есть теорема, что характер последнего модуля в этой цепочке есть знакопеременная сумма характеров всех членов цепочки

3.5 Пуассонизация

Были определены вероятностные меры $P_N^{(n)}$ и $P^{(n)}$ на пространствах $\mathbb{Y}_n(N)$ и \mathbb{Y}_n , соответственно. Интересно изучать их пределы при $N, n \rightarrow \infty$. Первая задача подобного рода (задача Улама) была решена в 1977 году в работах [LS77] и [BK77] для мер $P^{(n)}$.

Один из подходов к изучению пределов данных мер состоит в их *пуассонизации*. Идея заключается в том, чтобы рандомизировать индекс n .

Напомним определение пуассоновской случайной величины.

Определение 3.6. Распределением Пуассона на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ называется

$$\text{Poisson}_\nu(n) := e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!},$$

где $\nu > 0$ — параметр.

Рассмотрим пуассонизацию на примере мер $P_N^{(n)}$. Каждая мера $P_N^{(n)}$ живет на пространстве $\mathbb{Y}_n(N)$. Рассмотрим меру

$$P_N^{(\nu)}(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} P_N^{(n)}(\lambda) \cdot \text{Poisson}_\nu(n).$$

Ясно, что это вероятностная мера на пространстве

$$\mathbb{Y}(N) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n(N).$$

Другими словами, чтобы разыграть случайную диаграмму по мере $P_N^{(\nu)}$, надо сначала разыграть n по пуассоновской мере Poisson_ν , а затем, при данном n , случайную диаграмму $\in \mathbb{Y}_n(N)$ по мере $P_N^{(n)}$.

*Принцип эквивалентности ансамблей*¹⁸ состоит в том, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_N^{(n)}$$

может быть заменен на предел

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_N^{(\nu)}.$$

Следующие эвристические рассуждения дают надежду на верность этого принципа. Пусть $\xi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона Poisson_ν , то есть,

$$\text{Prob}(\xi = n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

¹⁸Который, разумеется, нужно устанавливать отдельно!

Можно вычислить моменты ξ , то есть, величины $\mathbb{E}\xi^k$ ($k = 1, 2, \dots$). Однако, гораздо удобнее рассматривать факториальные моменты, то есть,

$$\mathbb{E}\xi^{\downarrow k}, \quad \text{где } \xi^{\downarrow k} := \xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1).$$

Легко вычислить, что $\mathbb{E}\xi^{\downarrow k} = \nu^k$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= \nu, \\ \mathbb{E}(\xi^2 - \xi) &= \nu^2, \\ \mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \nu. \end{aligned}$$

Неформально можно утверждать, что при больших ν с большой вероятностью выполнено

$$\xi \approx \nu \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) \right),$$

то есть, что при больших ν величина ξ концентрируется вокруг своего среднего ν .

Поэтому, заменяя n на случайную величину $\xi \sim \text{Poisson}_\nu$ в мерах $P_N^{(n)}$, можно ожидать, что пределы при $n \rightarrow \infty$ и при $\nu \rightarrow \infty$ окажутся одинаковыми.

3.6 Упражнения

Упражнение 3.1. Проведите все вычисления в первом доказательстве предложения 3.3.

Упражнение 3.2. Убедитесь в биекции между наборами непересекающихся путей и полустандартными таблицами Юнга (второе доказательство предложения 3.3).

Упражнение 3.3. Вычислите $\det[A(i, j)]$ из второго доказательства предложения 3.3.

Упражнение 3.4. Докажите предложение 3.4.

Упражнение 3.5. Проверьте справедливость рекуррентных соотношений (3.7)–(3.8) для правой части (3.4).

Упражнение 3.6. Убедитесь в равенстве правых частей (3.9) и (3.10).

Упражнение 3.7. Докажите (по индукции по числу столбцов в диаграмме) равенство правых частей (3.9) и (3.11).

Упражнение 3.8. Докажите, что

$$\dim \lambda = \left[(x_1 + \dots + x_N)^N V_N(x_1, \dots, x_N) : x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_N^{l_N} \right],$$

где λ — диаграмма Юнга, N достаточно велико, $l_i := \lambda_i + N - i$. Здесь $\dim \lambda$ можно считать заданной правой частью (3.9), (3.10) или (3.11).

Упражнение 3.9. Проверьте справедливость рекуррентных соотношений (3.12) для $\dim \lambda$. Здесь $\dim \lambda$ можно считать заданной правой частью (3.9), (3.10) или (3.11).

Упражнение 3.10. Вычислите $\mathbb{E}\xi^{\downarrow k}$ ($k = 1, 2, \dots$), где ξ — пуассоновская случайная величина с параметром $\nu > 0$.

4 Мера Планшереля, детерминантные процессы и ортогональные многочлены

4.1 Мера $P_{\nu, N}$ на N -точечных конфигурациях на полурешетке

Напомним, что мы рассматривали два семейства мер:

- меры Планшереля $P^{(n)}$ на \mathbb{Y}_n (множестве диаграмм Юнга с n клетками),

$$P^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n;$$

- меры $P_N^{(n)}$ (возникающие в двойственности Шура–Вейля) на $\mathbb{Y}_n(N)$ (множестве диаграмм Юнга с n клетками и $\leq N$ строчками),

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_n \lambda}{N^n}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n(N).$$

Мы знаем, что $P_N^{(n)} \rightarrow P^{(n)}$ при $N \rightarrow +\infty$.

Запишем формулы для размерностей $\dim \lambda$ и $\text{Dim}_N \lambda$, полученные в предыдущей лекции, в координатах (l_1, \dots, l_N) , где $l_i = \lambda_i - N + i$:

$$\dim \lambda = n! \frac{V_N(l_1, \dots, l_N)}{\prod_{i=1}^N l_i!}, \quad \text{Dim}_N \lambda = \frac{V_N(l_1, \dots, l_N)}{\prod_{i=1}^N (N-i)!}.$$

Здесь, как и раньше, V_N обозначает определитель Вандермонда.

В этой лекции мы в основном будем изучать меру $P_N^{(n)}$. Запишем ее в координатах l_i :

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{N^n \prod_{i=1}^N (N-i)!} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{1}{l_i!} \cdot V_N^2(l_1, \dots, l_N). \quad (4.1)$$

Здесь ясно, что $n = l_1 + \dots + l_N - \frac{N(N-1)}{2}$.

Рассмотрим пуассонизацию мер $P_N^{(n)}$ по параметру n , то есть, определим меру $P_{\nu, N}$ по формуле

$$P_{\nu, N}(\lambda) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!} P_N^{(n)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n(N)$$

(см. также конец предыдущей лекции). Здесь $\nu > 0$ — параметр, а $n = |\lambda| = \sum_{i=1}^N \lambda_i$.

Каждая мера $P_N^{(n)}$ жила на множестве $\mathbb{Y}_n(N)$ диаграмм Юнга с n клетками и числом строк $\leq N$. Пуассонизация снимает ограничение на число клеток, и таким образом, $P_{\nu, N}$ — мера, которая уже живет на множестве $\mathbb{Y}(N)$ всех диаграмм Юнга с $\leq N$ строками. Запишем меру $P_{\nu, N}$ в координатах (l_1, \dots, l_N) . Для этого положим $\theta := \frac{\nu}{N}$, и также вспомним наше обозначение для пуассоновского распределения на неотрицательных целых числах:

$$\text{Poisson}_\theta(k) := e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В итоге получаем:

$$P_{\nu, N}(\lambda) = P_{\nu, N}(l_1, \dots, l_N) = \frac{1}{Z(\nu, N)} \prod_{i=1}^N \text{Poisson}_\theta(l_i) \cdot V_N^2(l_1, \dots, l_N). \quad (4.2)$$

Здесь $Z(\nu, N)$ — нормировочный множитель (подобранный так, чтобы сумма вероятностей $P_{\nu, N}$ была равна единице). Легко видеть, что он равен

$$Z(\nu, N) = \theta^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N (N-i)!$$

Ясно, что диаграммы Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$ взаимно однозначно соответствуют наборам (l_1, \dots, l_N) , таким, что $l_1 > \dots > l_N \geq 0$. Будем мыслить такие наборы (l_1, \dots, l_N) как N -точечные конфигурации на решетке $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Таким образом, $P_{\nu, N}$ задает вероятностную меру на N -точечных конфигурациях на решетке, или N -частичный *точечный процесс* на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

4.2 Напоминание: Точечные процессы. N -точечные ортогональные полиномиальные ансамбли.

В первой части лекций [Оль09, Лекции 12 и 13] мы рассматривали точечные процессы. Напомним основные понятия.

Пусть \mathfrak{X} — дискретное пространство, которое может быть конечным или счетным (например, $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ или $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ или $\mathfrak{X} = \{1, 2, \dots, N\}$).

Определение 4.1. (Точечной) *конфигурацией* в \mathfrak{X} называется любое подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$. Мы считаем, что в одной точке множества \mathfrak{X} не может находиться более одной точки конфигурации X .

Через $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ обозначим множество всех конфигураций на множестве \mathfrak{X} .¹⁹ Пространство $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ наделяется топологией произведения «двоеточий» $\{0, 1\}$. Это вполне несвязное (totally disconnected) пространство. Разумеется, если \mathfrak{X} конечно, то и $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ тоже конечно.

¹⁹Более привычное обозначение — $\{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$, однако, мы будем писать $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Определение 4.2. Точечным процессом на множестве \mathfrak{X} называется борелевская вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Другими словами, точечный процесс — это случайная конфигурация на множестве \mathfrak{X} .

Если множество \mathfrak{X} конечно, то точечный процесс на \mathfrak{X} можно задать, просто определив вероятности всех конфигураций. Это также возможно, если \mathfrak{X} счетно, но число точек в конфигурации фиксировано (как в нашем случае меры $P_{\nu,N}$), или если мера сосредоточена на подмножестве конечных конфигураций.

Обозначим через $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$ множество всех N -точечных конфигураций в \mathfrak{X} . Мера $P_{\nu,N}$ (4.2) как раз сосредоточена на $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$. Кроме того, вероятности конфигураций по этой мере равны

$$P_{\nu,N}(l_1, \dots, l_N) = \frac{1}{Z} W(l_1) \dots W(l_N) \cdot V_N^2(l_1, \dots, l_N), \quad (4.3)$$

где в нашем конкретном случае $W(l) = \text{Poisson}_\theta(l)$. В общем случае точечный процесс с вероятностями конфигураций (4.3) называется *ортогональным полиномиальным ансамблем* с весовой функцией $W(x)$.²⁰ Название это связано с тем, что при изучении таких процессов широко используются ортогональные полиномы (с тем же весом $W(x)$).

В [Оль09, Лекции 12 и 13] рассматривались корреляционные функции ортогональных полиномиальных ансамблей. Напомним основные факты, которые нам понадобятся. Корреляционные функции $\{\rho_n\}_{n=1,2,\dots}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_n(x_1, \dots, x_n) &:= \\ &= \text{Prob}(\text{случайная конфигурация } X \text{ содержит точки } x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что $x_i \neq x_j$, если $i \neq j$. Из определения видно, что ρ_n — симметрическая функция от x_1, \dots, x_n .

Точечный процесс называется детерминантным, если существует функция $K(x, y)$ на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ (называемая корреляционным ядром), такая, что

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

(для любых различных точек $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$).

В [Оль09, Лекция 12] было показано, что N -точечный ортогональный ансамбль является детерминантным процессом, а также было дано явное описание его корреляционного ядра. Напомним это описание.

Предположим, что вес $W(\cdot)$ имеет конечные моменты всех порядков, то есть, что для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ выполнено

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} |x|^k W(x) < \infty.$$

²⁰Разумеется, от $W(x)$ требуется неотрицательность. Иногда также предполагают конечность моментов $W(x)$, см. далее. Для рассмотрения ортогонального полиномиального ансамбля необходимо предполагать, что множество \mathfrak{X} является подмножеством в \mathbb{R} .

Рассмотрим весовое пространство $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$. Через $\ell^2(\mathfrak{X})$ будем обозначать пространство ℓ^2 на \mathfrak{X} по считающей мере. Отображение

$$\ell^2(\mathfrak{X}, W) \rightarrow \ell^2(\mathfrak{X}), \quad f \mapsto f\sqrt{W}$$

является изометрией. В силу конечности всех моментов W пространство полиномов $\mathbb{R}[x]$ лежит в $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$. Поэтому $\mathbb{R}[x]\sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X})$. Пусть Q — оператор ортогонального проектирования в $\ell^2(\mathfrak{X})$ на подпространство

$$\text{span} \{1, x, \dots, x^{N-1}\} \sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X}).$$

Утверждение состоит в том, что функция

$$K(x, y) = (Q\varepsilon_x, \varepsilon_y)_{\ell^2(\mathfrak{X})}, \quad x, y \in \mathfrak{X}$$

является корреляционным ядром N -точечного ортогонального ансамбля. Здесь $\{\varepsilon_x\}_{x \in \mathfrak{X}}$ — стандартный базис в $\ell^2(\mathfrak{X})$. Другими словами, $K(x, y)$ — это матрица оператора Q в базисе $\{\varepsilon_x\}_{x \in \mathfrak{X}}$.

4.3 Дискретные ортогональные многочлены. Формула Родрига

Применим сформулированные выше утверждения к нашей ситуации — N -точечному ортогональному полиномиальному ансамблю с весом $W(l) = \text{Poisson}_\theta(l) = e^{-\theta} \frac{\theta^l}{l!}$. Ортогональные многочлены по этой мере называются многочленами Шарлье (Charlier).

Изложим небольшой кусок общей теории ортогональных многочленов (более точно, ортогональных многочленов гипергеометрического типа), который нам понадобится. Намного более подробно см. в книге [НСУ85]. С этого момента предполагается, что $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.²¹ Рассмотрим следующие операторы в пространстве функций на \mathbb{Z} (так называемые *разностные производные* «вперед» и «назад»):

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) := f(x) - f(x-1).$$

Ортогональные полиномы $p_0(x) = 1, p_1(x), p_2(x), \dots$ с весом $W(x)$ однозначно (с точностью до постоянного множителя) характеризуются условиями

$$(p_n, f)_{\ell^2(\mathfrak{X}, W)} = 0 \quad \text{для всех полиномов } f \text{ с } \deg f \leq n-1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Предложение 4.3 (формула Родрига). *Для ортогональных полиномов справедливо представление*

$$p_n = \frac{\nabla(W p_{n-1})}{W},$$

²¹Можно также считать (для удобства), что $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$, так как формула для пуассоновского веса $W(x) = \text{Poisson}_\theta(x)$ при $x < 0$ автоматически дает нуль (из-за $x!$ в знаменателе).

или

$$p_n = (W^{-1} \circ \nabla \circ W) p_{n-1},$$

где здесь под W понимается оператор умножения на функцию $W(x)$.

Последовательное применение формул выше дает

$$p_n = \frac{\nabla^n W}{W}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство. Покажем, что полиномы p_n , определенные как $\frac{\nabla^n W}{W}$, удовлетворяют условиям ортогональности (4.4). При этом будем пользоваться некоторыми дополнительными предположениями относительно веса $W(x)$ (которым заведомо удовлетворяет наш пуассоновский вес).

Во-первых, по индукции ясно, что $\deg p_n = n$. Докажем условия ортогональности (также по индукции). Возьмем полином g на \mathbb{Z} с $\deg g \leq n-1$. Запишем

$$(p_n, g)_{\ell^2(x, W)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} p_n(x) g(x) W(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \nabla (W p_{n-1})(x) g(x).$$

Воспользуемся тем, что если функция f на \mathbb{Z} зануляется слева и достаточно быстро убывает справа, то выполнено

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} (\nabla f)(x) g(x) = - \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) (\Delta g)(x).$$

В нашей ситуации (когда вес W — пуассоновский) этим фактом можно пользоваться, поэтому запишем (здесь $f = W p_{n-1}$)

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \nabla (W p_{n-1})(x) g(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} W(x) p_{n-1}(x) (\Delta g)(x) = 0$$

в силу предположения индукции, так как операция Δ понижает степень полинома. \square

4.4 Многочлены Шарлье

Итак, мы рассматриваем вес $W(x) := \text{Poisson}_\theta(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$ на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ортогональные полиномы по этому весу называются полиномами Шарлье. Формула Родрига (ее рекуррентная запись) для них выглядит следующим образом:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) - \frac{x}{\theta} p_{n-1}(x-1), \quad p_0(x) = 1.$$

Для полиномов Шарлье существует и явная формула (которую можно вывести из формулы Родрига):

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{n \downarrow m}{(-\theta)^m m!} x \downarrow m.$$

Здесь $a^{\downarrow m} := a(a-1)\dots(a-m+1)$ — убывающая факториальная степень.

Многочлены Шарлье можно выразить через гипергеометрическую функцию

$${}_2F_0 \left(\begin{matrix} a & b \\ - & \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m!} z^m.$$

Здесь $(a)_m := a(a+1)\dots(a+m-1)$ — символ Похгаммера. Легко видеть, что $x^{\downarrow m} = (-1)^m (-x)_m$, поэтому для многочленов Шарлье имеем

$$p_n(x) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n & -x \\ - & \end{matrix} \middle| -\frac{1}{\theta} \right).$$

4.5 Многочлены Шарлье и разностные операторы второго порядка

Теперь мы покажем, что полиномы Шарлье являются собственными функциями некоторого разностного оператора второго порядка.²²

Предложение 4.4. *Выполнено*

$$\theta p_n(x+1) + x p_n(x-1) - (x+\theta)p_n(x) = -n p_n(x).$$

Другими словами, многочлены Шарлье являются собственными функциями оператора

$$(Df)(x) = \theta f(x+1) + x f(x-1) - (x+\theta)f(x)$$

с собственными значениями $0, -1, -2, \dots$

Доказательство. Упражнение 4.3. □

Нам будет удобнее работать в обычном $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ (по считающей мере), а не в весовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$, в котором действует оператор D , определенный выше. Мы уже рассматривали изометрию $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, $f \mapsto f\sqrt{W}$. При этой изометрии оператор D переходит в оператор $W^{\frac{1}{2}} \circ D \circ W^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому справедливо следующее утверждение:

Предложение 4.5. *Функции $p_n\sqrt{W} \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ являются собственными функциями (с собственными значениями $0, -1, -2, \dots$) оператора второго порядка в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$:*

$$(D_\theta \varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta)\varphi(x),$$

где $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$.

Замечание 4.6. Оператор D_θ можно рассматривать и как действующий в $\ell^2\mathbb{Z}$, так как этот оператор все равно «видит», что функция $\varphi(x)$ живет на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

²²Отметим, что этот факт весьма общий для многих семейств ортогональных полиномов и вытекает из некоторых условий на весовую функцию.

Искомое корреляционное ядро $K(x, y)$ для точечного процесса $P_{\nu, N}$ (где, напомним, $\theta = \frac{\nu}{N}$) — это матрица оператора проекции на подпространство $\{p_i \sqrt{W}\}_{i=0}^{N-1} \subset \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$. Другими словами, мы хотим описать спектральный проектор на часть спектра $\{0, -1, -2, \dots, -(N-1)\}$ оператора D_θ . Однако, чтобы утверждать, что эти два проектора — один и тот же оператор, необходимо проверить, что спектр $\{0, -1, -2, \dots\}$ оператора D_θ в пространстве $\mathbb{R}[x] \sqrt{W}$ есть также и спектр в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$. Другими словами, необходимо убедиться, что пространство полиномов $\mathbb{R}[x]$ плотно в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$.

Замечание 4.7. Тот факт, что пространство полиномов $\mathbb{R}[x]$ плотно в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$, является достаточно общим. Он связан с проблемой моментов — проблемой однозначности определения вероятностной меры по последовательности ее моментов. Если моменты веса W растут не слишком быстро, то пространство полиномов $\mathbb{R}[x]$ плотно в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$. О проблеме моментов см. [Ахиб1, Sim98].

В нашем случае, когда вес W — это пуассоновская мера, не требуется достаточно тонких условий однозначной разрешимости проблемы моментов (и, соответственно, плотности $\mathbb{R}[x]$ в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$). Идея состоит в рассмотрении преобразования Фурье

$$\widehat{W}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} W(dx)$$

и требования, чтобы $\widehat{W}(z)$ была вещественно-аналитической функцией в окрестности $z = 0$. Далее можно сослаться на то, что коэффициенты Тейлора функции $\widehat{W}(z)$ и есть моменты W , а также на то, что функции e^{izx} плотны в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$ (как функции от x).

Таким образом, мы знаем, что $\mathbb{R}[x] \sqrt{W} \subset \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ — плотное подпространство. Это позволяет трактовать оператор D_θ в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ как самосопряженный, так как оператор D_θ имеет в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ диагональный базис $p_n \sqrt{W}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и $D_\theta(p_n \sqrt{W}) = -np_n \sqrt{W}$. В качестве области определения D_θ возьмем

$$\{f \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) : D_\theta f \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})\}.$$

Теперь мы можем дать другую трактовку корреляционного ядра K (и соответствующего проектора) с использованием спектральной теоремы для самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов. Спектральная теорема утверждает, что любой самосопряженный оператор эквивалентен оператору умножения на функцию x в пространстве $L^2(\bigsqcup \mathbb{R}, \mu)$, где μ — некоторая мера, называемая спектральной мерой.²³ Пространство $\bigsqcup \mathbb{R}$ — это дизъюнктивное объединение некоторого (не более чем счетного) количества прямых. В нашем случае для оператора D_θ требуется одна прямая, так как каждое его собственное значение имеет кратность 1. Спектральная мера μ сосредоточена на спектре — в нашем случае она имеет атомы в точках

²³На самом деле, важна не сама мера μ , а ее класс эквивалентности (две меры называются эквивалентными, если каждая из них абсолютно непрерывна относительно другой).

$\{0, -1, -2, \dots\}$. Спектральный проектор на $\{-0, -1, \dots, -(N-1)\}$ эквивалентен в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ оператору умножения на индикатор этого куска спектра, то есть, на функцию $I_{\{-(N-1), \dots, -1, 0\}}(x)$. Можно также рассматривать оператор умножения на любую функцию I_B , где B — любое борелевское множество.

4.6 Приложение к пуассонизированной мере Планшереля

Мы рассматривали точечный процесс $P_{\nu, N}$ — пуассонизацию мер $P_N^{(n)}$. Этот точечный процесс является детерминантным и сосредоточен на N -точечных конфигурациях. Мы знаем, что $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N^{(n)} = P^{(n)}$, где $P^{(n)}$ — мера Планшереля на \mathbb{Y}_n — множестве диаграмм Юнга с n клетками. Мы рассматривали пуассонизацию мер Планшереля:

$$P_\nu := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!} P^{(n)}.$$

Здесь $\nu > 0$ — параметр. Мера P_ν является вероятностной мерой на множестве \mathbb{Y} всех диаграмм Юнга. Легко видеть, что $P_\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\nu, N}$. Сейчас мы будем определять точечный процесс, который возникает при рассмотрении меры P_ν . В его определении уже нельзя использовать прежнее соответствие между диаграммами Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$ с $\leq N$ строками и точечными конфигурациями на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \mapsto (l_1, \dots, l_N), \quad \text{где } l_i = \lambda_i + N - i.$$

При этом $l_1 > \dots > l_N \geq 0$.

Теперь мера P_ν сосредоточена на множестве \mathbb{Y} всех диаграмм Юнга, и теперь каждой диаграмме Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}$ мы будем ставить в соответствие полубесконечную точечную конфигурацию следующим образом:

$$\mathbb{Y} \ni \lambda \mapsto \{y_1, y_2, \dots\}, \quad \text{где } y_i = \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Отметим, что это соответствие между диаграммами Юнга и точечными конфигурациями встречалось в [Оль09, Лекция 4]. Конфигурация $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ лежит на сдвинутой решетке $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Например, диаграмме $\lambda = (3, 3, 1)$ соответствует точечная конфигурация, изображенная на рис. 10. Число ча-



Рис. 10.

стиц справа от нуля в этой полубесконечной конфигурации равно числу дырок слева от нуля. Конфигурация плотно упакована влево начиная от достаточно большого по модулю отрицательного числа.

Можно дать интерпретацию конфигурации $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\lambda_i - i + \frac{1}{2}\}_{i=1}^{\infty}$ в терминах модифицированных координат Фробениуса:

$$\begin{aligned} a_i &= \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \\ b_i &= \lambda'_i - i + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где λ' — это транспонированная диаграмма Юнга, и $i = 1, 2, \dots, d$, где d — число клеток на диагонали в диаграмме Юнга.²⁴ На рис. 11 показано, что конфигурация $\{y_i\}$ возникает, если рассмотреть границу диаграммы Юнга и на каждом вертикальном отрезке этой границы расположить частицу конфигурации.

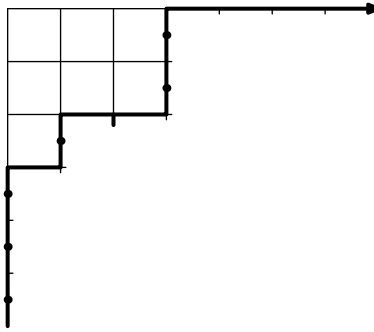


Рис. 11.

Интерпретация корреляционного ядра точечного процесса $P_{\nu, N}$ как спектрального проектора (см. предыдущий подраздел) позволяет перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$ и доказать следующее утверждение (доказательство будет дано в следующей лекции):

Предложение 4.8. Пуассонизированная мера Плانشереля P_{ν} (точечный процесс на \mathbb{Z}') ассоциирована с оператором

$$(D_{\nu}^{\text{Plancherel}}) \psi(y) = \sqrt{\nu} (\psi(y+1) + \psi(y-1)) - y\psi(y).$$

Оператор $D_{\nu}^{\text{Plancherel}}$ определен как самосопряженный оператор в $\ell^2(\mathbb{Z}')$. Его спектр есть $\mathbb{Z}' \subset \mathbb{R}$. Корреляционное ядро $K^{\text{Plancherel}}(x, y)$ точечного процесса P_{ν} есть ядро спектрального проектора на положительную часть спектра.

4.7 Упражнения

Упражнение 4.1. Покажите, что если функция f на \mathbb{Z} зануляется слева и достаточно быстро убывает справа, то выполнено

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} (\nabla f)(x) g(x) = - \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) (\Delta g)(x).$$

²⁴Модификация координат Фробениуса состоит в прибавлении чисел $\frac{1}{2}$.

Упражнение 4.2. Покажите, что в случае пуассоновского веса $W(x) = \text{Poisson}_\theta(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$ рекуррентная формула $p_n = \frac{\nabla(W p_{n-1})}{W}$ переписывается в виде

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) - \frac{x}{\theta} p_{n-1}(x-1).$$

Упражнение 4.3. Докажите предложение 4.4.

Указание. Воспользуйтесь явной формулой для многочленов Шарлье и простыми тождествами для факториальных степеней типа следующих: $(x+1)^{\downarrow m} = (x+1)x^{\downarrow(m-1)} = x^{\downarrow m} + mx^{\downarrow(m-1)}$.

Упражнение 4.4. Убедитесь в том, что $D_\theta = W^{\frac{1}{2}} \circ D \circ W^{-\frac{1}{2}}$, где D — оператор в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$, а D_θ — в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ (эти операторы связаны с точечным процессом $P_{\nu, N}$).

5 Разностные операторы второго порядка и корреляционное ядро пуассонизированной меры Планшереля

Здесь мы обсудим (на идейном уровне), как перейти от корреляционных ядер точечных процессов $P_{\nu, N}$ к корреляционному ядру точечного процесса P_ν на $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, отвечающего пуассонизированной мере Планшереля.

5.1 Некоторые факты о самосопряженных операторах

Для начала приведем полезные факты о (возможно, неограниченных) самосопряженных операторах в гильбертовом пространстве. Более подробно можно смотреть в [РС77], [АГ77].

Пусть H — гильбертово пространство, A — оператор в H . Предполагаем, что A может быть неограниченным, то есть, что A определен не всюду. Обозначим область определения A через $\text{Dom}(A)$. Будем всегда предполагать, что область определения $\text{Dom}(A)$ плотна в H . Таким образом,

$$A: \text{Dom}(A) \rightarrow H, \quad \overline{\text{Dom}(A)} = H.$$

Оператор A называется симметричным, если

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \quad \text{для всех } \varphi, \psi \in \text{Dom}(A).$$

(здесь (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в H).

Пример 5.1. Рассмотрим нужный нам пример: $H = \ell^2(\mathbb{Z}')$, и A — разностный оператор второго порядка:

$$(A\varphi)(x) = a_+(x)\varphi(x+1) + a_-(x)\varphi(x-1) - a_0(x)\varphi(x). \quad (5.1)$$

Предполагаем, что функции a_\pm и a_0 — вещественные (а само пространство H — комплексное). Ответим на вопрос, когда оператор A является симметричным. В пространстве H существует канонический базис $\{\varepsilon_x\}_{x \in \mathbb{Z}'}$.

Матрица оператора A в этом базисе имеет трехдиагональный вид. Более подробно,

$$A\varepsilon_x = a_-(x+1)\varepsilon_{x+1} + a_+(x-1)\varepsilon_{x-1} - a_0(x)\varepsilon_x.$$

Видно, что оператор A симметричен тогда и только тогда, когда

$$a_+(x) = a_-(x+1) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}'. \quad (5.2)$$

Теперь вернемся к общей ситуации: $A: \text{Dom}(A) \rightarrow H$ — симметричный оператор. Определим сопряженный оператор A^* по формуле

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi).$$

Возникает вопрос, какова область определения оператора A^* .

Для начала дадим наводящее соображение. Отметим, что если $\psi \in \text{Dom}(A^*)$, то ясно, что отображение $\varphi \mapsto (\varphi, A^*\psi)$ является непрерывным (по φ). Поэтому какой-то вектор ψ входит в область определения A^* , если отображение $\varphi \mapsto (A\varphi, \psi)$ непрерывно (по φ). Действительно, если это отображение (линейный функционал) непрерывно по φ , то по теореме Рисса, существует вектор (обозначаемый через $A^*\psi$), такой, что

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi) \quad \text{для всех } \varphi \in \text{Dom}(A).$$

Поэтому

$$\text{Dom}(A^*) = \{\psi \in H: \text{линейный функционал } \varphi \mapsto (A\varphi, \psi) \text{ непрерывен (по } \varphi)\}.$$

Видно, что $\text{Dom}(A^*) \supseteq \text{Dom}(A)$.

Дадим одно из самых важных определений.

Определение 5.2. Оператор $(A, \text{Dom}(A))$ в H называется *самосопряженным*, если

- $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A^*)$,
- $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in \text{Dom}(A)$.

Прокомментировать это определение можно с использованием преобразования Кэли, которое устанавливает связь между самосопряженными и унитарными операторами:

$$z \mapsto u = \frac{i-z}{i+z}, \quad z, u \in \mathbb{C}.$$

Это преобразование переводит верхнюю полуплоскость во внутренность единичного круга, при этом действительная прямая переводится в единичную окружность с выколотой точкой $u = -1$. Обратное преобразование имеет вид

$$u \mapsto z = i \frac{1-u}{1+u}.$$

Преобразование Кэли можно применять и к симметричным операторам $(A, \text{Dom}(A))$ в гильбертовом пространстве H :

$$A \mapsto U := (i1 - A)(i1 + A)^{-1}.$$

Если оператор A симметричный, то U — частичная изометрия в гильбертовом пространстве (то есть, оператор, определенный не всюду, который действует на своей области определения как изометрический по отношению к скалярному произведению в H). Если оператор A самосопряженный, то оператор U — унитарный. Отсюда видно, что не каждый симметричный оператор можно расширить до самосопряженного, так как не всякую частичную изометрию можно расширить до унитарного оператора.²⁵

Дадим еще одно очень важное определение.

Определение 5.3. Оператор $(A, \text{Dom}(A))$ в гильбертовом пространстве H называется *в существенном самосопряженным* (essentially self-adjoint), если у оператора A существует замыкание \bar{A} , которое само является самосопряженным оператором.

Определим понятие замыкания оператора. У каждого оператора A в гильбертовом пространстве H есть график, то есть, подпространство в $H \oplus H$, составленное из векторов $\varphi \oplus A\varphi$, где φ пробегает $\text{Dom}(A)$. Можно рассмотреть замыкание графика оператора A в пространстве $H \oplus H$. Если это замыкание по-прежнему останется графиком линейного оператора в H , то этот оператор и называется *замыканием* оператора A и обозначается через \bar{A} .

Обычно работают не с самосопряженными операторами, а с операторами, в существенном самосопряженными. Причина этого в том, что обычно не удается полностью описать $\text{Dom}(A)$ для самосопряженного оператора. Гораздо чаще рассматривают оператор $(A, \text{Dom}(A))$, где подпространство $\text{Dom}(A)$ достаточно просто описывается, и доказывают, что оператор $(A, \text{Dom}(A))$ в существенном самосопряженный.

Для нашего оператора A (5.1) в $\ell^2(\mathbb{Z}')$ в качестве области определения можно взять финитные функции на решетке, то есть

$$\text{Dom}(A) = \text{span} \{ \varepsilon_x \}_{x \in \mathbb{Z}'}.$$

Кроме того, легко видеть, что эта область определения также является инвариантным подпространством для оператора A . Будет ли так определен оператор $(A, \text{Dom}(A))$ в существенном самосопряженным, зависит от поведения функций a_{\pm} и a_0 . Более подробно об этом см. в книге [PC77].

²⁵Например, существует частичная изометрия, которая отображает гиперплоскость в H (подпространство коразмерности 1) на все пространство H . Ясно, что эту частичную изометрию нельзя расширить до унитарного оператора.

5.2 Разностные операторы, соответствующие мерам $P_{\nu,N}$ и их (в существенном) самосопряженность

Напомним, что мы рассматривали меры $P_{\nu,N}$ на $\mathbb{Y}(N)$ (множестве диаграмм Юнга с $\leq N$ строчками) — пуассонизацию мер $P_N^{(n)}$ на $\mathbb{Y}_n(N)$, которые, в свою очередь, возникли из двойственности Шура–Вейля. Мы отождествляли множество $\mathbb{Y}(N)$ с $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ — пространством N -точечных конфигураций на полурешетке $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Возникал N -частичный точечный процесс на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. С ним был связан разностный оператор второго порядка D_θ в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, где $\theta := \frac{\nu}{N} > 0$. Собственными функциями оператора D_θ являются многочлены Шарлье (мы обозначаем их через $p_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$), умноженные на корень из весовой функции.²⁶

В этом подразделе мы будем заниматься оператором D_θ . Этот оператор имеет вид

$$(D_\theta \varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta)\varphi(x), \quad \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}). \quad (5.3)$$

Видно, что условие (5.2) выполнено, то есть, оператор D_θ является симметричным. Существует две возможности выбора области определения оператора D_θ :

- $\text{Dom}_1(D_\theta)$ состоит из всех финитных функций на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- $\text{Dom}_2(D_\theta) = \mathbb{R}[x]\sqrt{W} \subset \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ состоит из всех многочленов, умноженных на корень из весовой функции $W(x)$.

Ясно, что $\text{Dom}_1(D_\theta) \neq \text{Dom}_2(D_\theta)$.

В предыдущей лекции мы рассматривали подпространство $\text{Dom}_2(D_\theta) = \mathbb{R}[x]\sqrt{W}$ — доказали, что это подпространство плотно в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, и что оператор D_θ диагонализуется на многочленах Шарлье, умноженных на корень из весовой функции. Обозначим их через $\tilde{p}_n(x) := p_n(x)\sqrt{W(x)}$. Тогда

$$D_\theta \tilde{p}_n = -n\tilde{p}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Оператор $(D_\theta, \text{Dom}_2(D_\theta))$ является в существенном самосопряженным. Кроме того, можно явно указать, каково его замыкание, то есть, явно описать область определения $\text{Dom}(\overline{D}_\theta)$. А именно, функции $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ можно раскладывать в ряд Фурье по $\tilde{p}_n(x)$. Можно показать, что

$$\text{Dom}(\overline{D}_\theta) = \left\{ \varphi = \sum_{n \geq 0} c_n \tilde{p}_n : \sum_{n \geq 0} |c_n|^2 < \infty \text{ и } \sum_{n \geq 0} n^2 |c_n|^2 < \infty \right\}.$$

Первое условие обеспечивает, что $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, а второе, что $D_\theta \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ (ясно, что второе условие влечет первое). Таким образом, $\text{Dom}(\overline{D}_\theta)$ состоит из всех функций $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, таких, что $D_\theta \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$. Отметим, что здесь под $D_\theta \varphi$ понимается формальное применение оператора (5.3) к функции

²⁶Весовая функция — это пуассоновское распределение $W(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$.

φ на решетке. Этого рассуждения на самом деле хватает, чтобы показать в существенном самосопряженность оператора $(D_\theta, \text{Dom}_2(D_\theta))$. Обозначим замыкание этого оператора через \overline{D}_θ .

Оказывается, можно показать, что оператор $(D_\theta, \text{Dom}_1(D_\theta))$ также является в существенном самосопряженным, и кроме того, что замыкание этого оператора совпадает с \overline{D}_θ . Возможный способ доказательства этого факта состоит в использовании общих теорем (напр., из [РС77]), для которых требуется установить следующее: не существует функций из $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, которые являются собственными для оператора D_θ с неverschественным собственным значением. Практически достаточно это показать для собственного значения, равного i . Следует рассмотреть семейство разностных уравнений $(D_\theta \varphi)(x) = i\varphi(x)$ и показать, что решение этих разностных уравнений не лежит в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$. Отметим, что другой способ доказательства (использующий более конкретные свойства оператора) в существенном самосопряженности оператора $(D_\theta, \text{Dom}_1(D_\theta))$ описан в работе [BO07].

5.3 Сходимость мер $P_{\nu, N}$ к пуассонизированной мере Планшереля. Сходимость разностных операторов

В предыдущих лекциях мы рассматривали меры $P_{\nu, N}$ на $\mathbb{Y}(N)$ — множестве диаграмм Юнга с $\leq N$ строчками, и меры P_ν на \mathbb{Y} — множестве всех диаграмм Юнга. Мера P_ν также имеет собственное название — пуассонизированная мера Планшереля. Мы установили сходимость

$$P_{\nu, N} \rightarrow P_\nu, \quad N \rightarrow \infty.$$

Сходимость здесь поточечная, на каждой фиксированной диаграмме Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}$ (ясно, что для достаточно большого N выполнено $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$).

Множество $\mathbb{Y}(N)$ отождествляется с $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ — множеством N -точечных конфигураций на полурешетке:

$$\mathbb{Y}(N) \ni \lambda \longleftrightarrow \underline{x} = (x_1, \dots, x_N), \quad x_i = \lambda_i + N - i.$$

Множество \mathbb{Y} — с множеством полубесконечных сбалансированных²⁷ конфигураций на $\mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{Y} \ni \lambda \longleftrightarrow \underline{y} = (y_1 > y_2 > \dots), \quad y_i = \lambda_i - i + \frac{1}{2}.$$

Так как $\mathbb{Y}(N) \subset \mathbb{Y}$, то между конфигурациями \underline{x} и \underline{y} существует связь: $x_i = y_i + N - \frac{1}{2}$ (это верно для фиксированного i и $N \geq i$).

На пространстве $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ мера $P_{\nu, N}$ задает детерминантный точечный процесс, то есть, корреляционные функции этой меры имеют вид:

$$\rho_n^{P_{\nu, N}}(x'_1, \dots, x'_n) = \det [K^{P_{\nu, N}}(x'_i, x'_j)]_{i, j=1}^n,$$

²⁷Конфигурации конечны вправо и плотно упакованы влево, число частиц справа от нуля равно числу дырок слева от нуля. См. рис. 10.

где x'_i — любые различные точки на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ядро $K^{P_{\nu,N}}$ обслуживается разностным оператором D_θ , то есть, $K^{P_{\nu,N}}$ есть матрица спектрального проектора на собственные значения $\{-(N-1), \dots, -1, 0\}$ оператора D_θ .

Так как есть сходимость мер $P_{\nu,N} \rightarrow P_\nu$, естественно ожидать и сходимости (при каких-то сдвигах) корреляционных функций $\rho_n^{P_{\nu,N}}$, и корреляционного ядра $K^{P_{\nu,N}}$ к корреляционным функциям и корреляционному ядру (соответственно) пуассонизированной меры Планшереля P_ν . Другими словами, если установить следующую сходимость корреляционных ядер:

$$K^{P_\nu}(z', z'') = \lim_{N \rightarrow \infty} K^{P_{\nu,N}} \left(z' + N - \frac{1}{2}, z'' + N - \frac{1}{2} \right), \quad (5.4)$$

и найти ядро K^{P_ν} , то достаточно просто понять, что точечный процесс на $\ell^2(\mathbb{Z}')$ является детерминантным с ядром K^{P_ν} .

Замечание 5.4. Отметим, что корреляционное ядро определено не канонически — преобразования вида

$$K(x, y) \mapsto \frac{f(x)}{f(y)} K(x, y), \quad (5.5)$$

где f — ненулевая функция, не меняют миноров матрицы K , а поэтому и корреляционных функций. Преобразования вида (5.5) называются *калибровочными*.

Из-за этой неоднозначности при доказательстве сходимости (5.4) выше могла бы потребоваться дополнительная калибровка допредельных ядер $K^{P_{\nu,N}}$. Однако в нашей ситуации этой проблемы не возникает.

Сходимость (5.4) можно устанавливать разными способами:

- Ядро $K^{P_{\nu,N}}$ выражается через многочлены Шарлье. Используя асимптотику этих многочленов, можно явно установить сходимость (5.4). Этот способ требует вычислений со специальными функциями.
- Существует более эвристический метод, который не использует специальных функций, и который, тем не менее, приводит к нужному ответу. Он заключается в том, чтобы доказывать не сходимость корреляционных ядер, которые являются спектральными проекторами на части спектра некоторых разностных операторов, а доказывать сходимость самих разностных операторов.

Мы будем использовать второй способ. Можно предложить строгое обоснование этого способа, см. [Ols08]. Здесь изложим идейное содержание этого метода.

Как уже было сказано, N -точечные конфигурации на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ связаны с полубесконечными сбалансированными конфигурациями на \mathbb{Z}' как

$$x = y + N - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad y \in \mathbb{Z}'.$$

Также напомним, что $\theta = \frac{\nu}{N}$. Будем исследовать сходимость операторов $D_\theta = D_{\nu/N}$ при $N \rightarrow \infty$ и при сдвиге решетки. Рассмотрим оператор D_θ на сдвинутой решетке. Можно считать, что он действует в подпространстве $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N} \subset \ell^2(\mathbb{Z}')$, где пространство $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N}$ состоит из функций, сосредоточенных на $\{-N + \frac{1}{2}, -N + \frac{3}{2}, \dots\}$. Этот сдвинутый оператор $D_\theta^{(N)}$ действует следующим образом:

$$(D_\theta^{(N)} \varphi)(y) = \sqrt{\theta(y + N + \frac{1}{2})} \varphi(y+1) + \sqrt{\theta(y + N - \frac{1}{2})} \varphi(y-1) - (y + \theta + N - \frac{1}{2}) \varphi(y).$$

Пусть $Q_{\{-(N-1), \dots, -1, 0\}}(D_\theta^{(N)})$ обозначает проектор на часть спектра $\{-(N-1), \dots, -1, 0\}$ оператора $D_\theta^{(N)}$. Матрица этого оператора $Q_{\{-(N-1), \dots, -1, 0\}}(D_\theta^{(N)})$ есть ядро сдвинутого N -точечного процесса на полурешетке $\{-N + \frac{1}{2}, -N + \frac{3}{2}, \dots\}$.

Заменим оператор $D_\theta^{(N)}$ на

$$D_N := D_\theta^{(N)} + (N - \frac{1}{2}) \mathbf{1}.$$

Тогда ядро сдвинутого процесса есть матрица оператора проекции на часть спектра $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}\}$ оператора D_N , обозначим этот оператор через $Q_+(D_N)$. Можно эквивалентно сказать, что $Q_+(D_N)$ — это спектральный проектор на положительную часть спектра оператора D_N .

Таким образом, мы зафиксировали часть спектра, на которую осуществляется проекция, и теперь наша задача — разобраться со сходимостью разностных операторов. Мы будем это делать с использованием общих определений и результатов из книги [PC77].

5.4 Сильная резольвентная сходимость. Сходимость операторов $D_N \rightarrow D$

Приведем нужные определения и утверждения.

Определение 5.5 (Резольвента). Пусть A — оператор. Функция $\zeta \mapsto (\zeta - A)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A . Ясно, что резольвента определена все спектра оператора A .

Например, если A — (возможно, неограниченный) самосопряженный оператор, то для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ резольвента $(\zeta - A)^{-1}$ имеет смысл, и кроме того, является ограниченным оператором.

Рассмотрение резольвент позволяет перейти от сходимости неограниченных самосопряженных (или в существенном самосопряженных) операторов²⁸ к рассмотрению сходимости ограниченных операторов — их резольвент.

Определение 5.6 (Сильная резольвентная сходимость). Самосопряженные операторы A_N сходятся к оператору A в смысле *сильной резольвентной*

²⁸Одна из основных проблем состоит в том, что у каждого оператора может быть своя область определения!

сходимости, если для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ сходятся их резольвенты $(\zeta - A_N)^{-1} \rightarrow (\zeta - A)^{-1}$ в смысле сильной сходимости операторов (то есть, резольвенты сходятся на каждом векторе).

Рассмотрение сильной резольвентной сходимости позволяет забыть, что у каждого оператора из последовательности самосопряженных операторов может быть своя область определения.

Теперь приведем нужные нам факты о сильной резольвентной сходимости.

Теорема 5.7 ([PC77, Теорема VIII.24]). *Пусть самосопряженные операторы A_N сходятся к самосопряженному оператору A в смысле сильной резольвентной сходимости. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — полубесконечный (скажем, вправо) интервал, такой, что его конец не лежит в спектре A . Тогда выполнена сильная сходимость спектральных проекторов на I :*

$$Q_I(A_N) \rightarrow Q_I(A), \quad N \rightarrow \infty.$$

Теорема 5.8 ([PC77, Теорема VIII.25]). *Пусть операторы A_N и A в существенном самосопряжены на некоторой (единой для всех) плотной области $L \subset H$, и пусть на L выполнена сходимость*

$$A_N \varphi \rightarrow A \varphi, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{для всех } \varphi \in L.$$

Тогда выполнена сходимость замыканий $\bar{A}_N \rightarrow \bar{A}$ в смысле сильной резольвентной сходимости.

Пользуясь этими двумя теоремами, мы можем установить сильную резольвентную сходимость операторов D_N к оператору D . Здесь операторы D_N определены выше:

$$(D_N \varphi)(y) = \sqrt{\theta(y + N + \frac{1}{2})} \varphi(y + 1) + \sqrt{\theta(y + N - \frac{1}{2})} \varphi(y - 1) - (y + \theta) \varphi(y), \quad (5.6)$$

а оператор D имеет вид:

$$(D \varphi)(y) = \sqrt{\nu} (\varphi(y + 1) + \varphi(y - 1)) - y \varphi(y). \quad (5.7)$$

Здесь $\theta = \frac{\nu}{N}$.

Замечание 5.9. Оператор D действует в $\ell^2(\mathbb{Z}')$. Формула (5.6) определяет оператор D_N только в подпространстве $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N}$, состоящем из функций, сосредоточенных на $\{-N + \frac{1}{2}, -N + \frac{3}{2}, \dots\}$. При этом видно, что D_N зануляет базисный вектор $\varepsilon_{-N+\frac{1}{2}}$. На ортогональном дополнении подпространства $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N}$, состоящем из функций, сосредоточенных на множестве $\{\dots, -N - \frac{3}{2}, -N - \frac{1}{2}\}$, можно положить оператор D_N равным скалярному оператору (с произвольным отрицательным собственным значением, чтобы не нарушить структуру положительной части спектра, и, тем самым, не изменить корреляционное ядро процесса $P_{\nu, N}$).

В качестве плотного подпространства $L \subset H = \ell^2(\mathbb{Z}')$ в теореме 5.8 возьмем подпространство финитных функций $\text{span} \{\varepsilon_x\}_{x \in \mathbb{Z}'}$. Сходимость операторов D_N (5.6) к оператору D (5.7) на финитных функциях очевидна (напомним, что $\theta = \frac{\nu}{N}$). Таким образом, по теореме 5.8 выполнена и сильная резольвентная сходимость, и, в силу теоремы 5.7, проекторы $Q_+(D_N)$ на положительную часть спектра сходятся к проектору $Q_+(D)$. Сходимость проекторов — это уже сильная сходимость операторов, и поэтому матрицы этих проекторов также сходятся.

Таким образом, сходимость корреляционных ядер (5.4) установлена, где корреляционное ядро предельного точечного процесса K^{P_ν} — это матрица спектрального проектора на положительную часть спектра оператора D (5.7). Это доказывает детерминантность точечного процесса на \mathbb{Z}' , полученного из пуассонизированной меры Планшереля, и дает качественное описание корреляционного ядра этого процесса. Это ядро называется *дискретным ядром Бесселя*, оно выражается через функции Бесселя, к чему мы и перейдем в следующем подразделе.

5.5 Дискретное ядро Бесселя

Выше было определено дискретное ядро Бесселя K^{P_ν} на \mathbb{Z}' — матрица спектрального проектора на положительную часть спектра разностного оператора D (5.7). Ядро K^{P_ν} является корреляционным ядром точечного процесса на \mathbb{Z}' , полученного из пуассонизированной меры Планшереля на диаграммах Юнга. Интерпретация K^{P_ν} как матрицы спектрального проектора важна, однако здесь мы дадим явное выражение для K^{P_ν} через функции Бесселя.

Определение 5.10. Пусть $m \in \mathbb{C}$ и $u > 0$. *Функция Бесселя* (первого рода) определяется следующим образом:

$$J_m(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (u/2)^{2k}}{k! \Gamma(m+k+1)}. \quad (5.8)$$

О функциях Бесселя см. [БЭ66, т. 2].

Обычно при рассмотрении функций Бесселя параметром является m , а u — аргументом. В нашем случае все наоборот. Положим

$$J_m := J_m(2\sqrt{\nu}),$$

и будем рассматривать J_m как функцию от m , причем m будет являться целым числом:

$$J_m = \frac{\nu^{m/2}}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)^k}{k!(m+1)_k} = \frac{\nu^{m/2}}{m!} {}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ m+1 \end{matrix} \middle| -\nu \right).$$

Здесь $m = 0, 1, 2, \dots$, $(m+1)_k$ — символ Похгаммера и

$${}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ c \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_k k!} z^k$$

— гипергеометрическая функция. Для $m = -1, -2, \dots$ величина J_m определяется как

$$J_m = (-1)^m J_{-m}.$$

Таким образом, J_m определено для всех $m \in \mathbb{Z}$.

Предложение 5.11. *Для величин J_m выполняется соотношение:*

$$\sqrt{\nu}(J_{m+1} + J_{m-1}) = mJ_m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, функции J_m (как функции на \mathbb{Z}) удовлетворяют разностному уравнению $DJ_m = 0$, где оператор D определяется по формуле (5.7). Следующий шаг — определить функции

$$\psi_a(y) := J_{a+y}, \quad a, y \in \mathbb{Z}'.$$

Отметим, что для $a, y \in \mathbb{Z}'$ число $a + y$ уже целое. Отметим также, что функция $\psi_a(y)$ симметрична по a и y . Функции $\psi_a(y)$ как функции от y уже являются собственными для оператора D :

$$D\psi_a = a\psi_a, \quad a \in \mathbb{Z}'.$$

Можно показать, что функции $\{\psi_a\}_{a \in \mathbb{Z}'}$ составляют ортогональный базис в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}')$ (см., напр., [Ols08]).

Зная эти факты о функциях $\psi_a(y)$ и некоторые другие тождества для функций Бесселя (см. [БЭ66]), можно показать, что корреляционное ядро K^{P_ν} имеет вид

$$K^{P_\nu}(y, y') = \sqrt{\nu} \frac{J_{y-\frac{1}{2}} J_{y'+\frac{1}{2}} - J_{y+\frac{1}{2}} J_{y'-\frac{1}{2}}}{y - y'}, \quad y, y' \in \mathbb{Z}'. \quad (5.9)$$

Замечание 5.12. При $y = y'$ следует забыть, что $y, y' \in \mathbb{Z}'$ и определить значение $K^{P_\nu}(y, y')$ по непрерывности.

Формула (5.9) была получена независимо в работах [BOO00] и [Joh01].

5.6 Упражнения

Упражнение 5.1. Проверьте, что если оператор A в $\ell^2(\mathbb{Z}')$ действует по формуле

$$(A\varphi)(x) = a_+(x)\varphi(x+1) + a_-(x)\varphi(x-1) - a_0(x)\varphi(x),$$

то его действие в стандартном базисе имеет вид

$$A\varepsilon_x = a_-(x+1)\varepsilon_{x+1} + a_+(x-1)\varepsilon_{x-1} - a_0(x)\varepsilon_x.$$

Упражнение 5.2. Проверьте тождество

$$\sqrt{\nu}(J_{m+1} + J_{m-1}) = mJ_m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

для функций Бесселя $J_m = J_m(2\sqrt{\nu})$, определенных с помощью ряда (5.8).

6 Разностные операторы и исследование меры Планшереля

6.1 Введение и напоминание

Эта лекция имеет обзорный характер, ее цель — показать, как рассмотрение разностного оператора для меры Планшереля дает представление о многих свойствах этой меры (строго доказанных другими методами).

Напомним, что мы рассматривали пуассонизированную меру Планшереля P_ν на множестве всех диаграмм Юнга \mathbb{Y} . Диаграммы Юнга отождествлялись с точечными конфигурациями (об этом отождествлении см. также рис. 10 и 11):

$$\mathbb{Y} \ni \lambda \rightarrow y = (y_i)_{i=1}^\infty, \quad y_i = \lambda_i - i + \frac{1}{2}. \quad (6.1)$$

Таким образом, y — полубесконечная конфигурация на решетке полуцелых чисел \mathbb{Z}' . Мера P_ν при таком отождествлении определяет точечный процесс на \mathbb{Z}' . Этот точечный процесс является детерминантным, а его корреляционное ядро — это матрица спектрального проектора $Q_{(0,+\infty)}(D)$ в $\ell^2(\mathbb{Z}')$ на положительную часть спектра разностного оператора второго порядка:

$$D\varphi(y) = \sqrt{\nu}(\varphi(y+1) + \varphi(y-1)) - y\varphi(y). \quad (6.2)$$

В предыдущей лекции была приведена явная формула для корреляционного ядра меры P_ν , это ядро называется дискретным ядром Бесселя. В этой лекции мы продолжим изучение меры P_ν , пользуясь не явной формулой для ее корреляционного ядра, а исследуя разностный оператор D , выписанный выше.

6.2 Эквивалентность ансамблей

В основном нас интересует вопрос о поведении меры P_ν при $\nu \rightarrow \infty$. Мера P_ν получается при пуассонизации мер Планшереля $P^{(n)}$. Каждая мера $P^{(n)}$ живет на множестве диаграмм Юнга \mathbb{Y}_n с n клетками, а мера P_ν определяется как их смесь с помощью пуассоновского распределения:

$$P_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} P^{(n)}.$$

Мы принимаем без доказательства, что предельное поведение (понимаемое каким-либо образом) мер (точечных процессов на \mathbb{Z}') P_ν при $\nu \rightarrow \infty$ и $P^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ одинаково, и при этом $\nu \sim n$.

Наводящие соображения (изложенные в одной из предыдущих лекций) состоят в следующем. Чтобы разыграть случайную диаграмму по мере P_ν , надо сначала разыграть пуассоновскую случайную величину с параметром ν . Пусть в результате розыгрыша этой пуассоновской величины получается число t . Затем надо разыграть диаграмму с t клетками по мере Планшереля $P^{(m)}$ на \mathbb{Y}_m . Математическое ожидание и дисперсия пуассоновской

случайной величины одинаковы и равны ν , поэтому при больших ν следует ожидать, что m (результат розыгрыша пуассоновской величины) лежит в интервале $(\nu - \sqrt{\nu}, \nu + \sqrt{\nu})$, то есть, (относительно) концентрируется вокруг ν . Поэтому при $\nu \rightarrow \infty$ число клеток в случайной диаграмме Юнга, распределенной по мере P_ν , можно считать примерно равным ν . Это и наводит на утверждение об эквивалентности ансамблей $\{P_\nu\}_{\nu>0}$ и $\{P^{(n)}\}_{n=0,1,2,\dots}$ (в указанном²⁹ смысле).

При рассмотрении свойств меры Планшереля ниже мы будем неявно использовать описанную эквивалентность ансамблей, которую в строгих доказательствах (о которых мы здесь не говорим) требуется устанавливать отдельно.

6.3 Локальное поведение вблизи границы. Дискретное синус-ядро

6.3.1 Постановка задачи

Отождествление (6.1) диаграммы Юнга λ с точечной конфигурацией на \mathbb{Z}^2 можно представлять графически (см. рис. 10 и 11). А именно, вдоль границы диаграммы Юнга λ “укладывается” целочисленная прямая (рис. 11),³⁰ после чего на каждом вертикальном отрезке границы размещается частица.

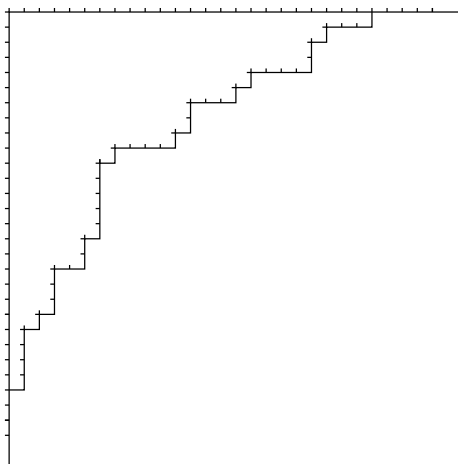


Рис. 12.

Таким образом получается полубесконечная конфигурация на решетке \mathbb{Z}^2 . Если диаграмма λ случайна, то и конфигурация получается случайной.

²⁹Нестрогом!

³⁰Происходит это следующим образом. Сначала целочисленная прямая укладывается вдоль координатных лучей, а затем ее, изгибая, можно уложить вдоль границы диаграммы Юнга. См. рис. 12.

Если ν очень велико, то из рассуждений §6.2 можно понять, что (“типичная”) случайная диаграмма λ , распределенная по мере P_ν , имеет очень большое число клеток (это число порядка ν), см. рис. 12. Сейчас нас будет интересовать локальное поведение границы этой случайной диаграммы Юнга в окрестности какой-либо точки.³¹ Граница представляет собой случайную бинарную последовательность. Зафиксируем число $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим точку $y_0 = 2c\sqrt{\nu}$, разместим ее на целочисленной прямой, которая уложена вдоль координатных лучей (рис. 13). Умножение на $2\sqrt{\nu}$ необходимо, чтобы получить невырожденное локальное поведение при $\nu \rightarrow \infty$. Проведем из точки $y_0 = 2c\sqrt{\nu}$ луч под углом 45° до пересечения с границей диаграммы (рис. 13). Будем устремлять ν к $+\infty$ и наблюдать за локальным поведением границы случайной диаграммы в окрестности точки пересечения с лучом. Будет возникать случайная точечная конфигурация. На языке точечных конфигураций имеем

$$y = \tilde{y} + \left([y_0] + \frac{1}{2} \right),$$

где \tilde{y} — новая точечная конфигурация, уже на \mathbb{Z} . Здесь мы берем целую часть $[y_0]$, это не влияет на асимптотику.

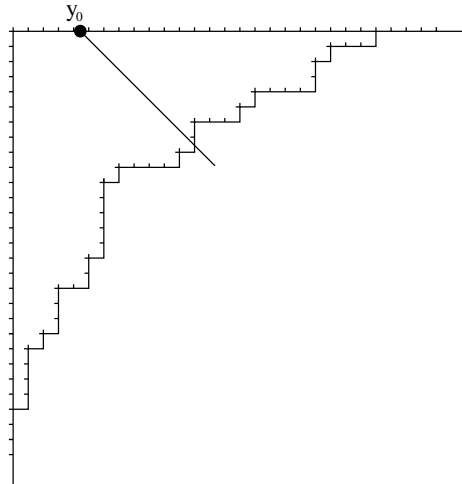


Рис. 13.

Несколько по-другому можно сказать, что мы рассматриваем случайную диаграмму Юнга, распределенную по мере Планшереля P_ν , и сжимаем ее вдоль каждой из осей в $\nu^{\frac{1}{2}}$ раз. На одном из координатных лучей берем точку $2c \in \mathbb{R}$ (если $c > 0$, то на горизонтальном луче, а иначе — на вертикальном луче), проводим из нее луч под углом 45° до пересечения

³¹Впервые этот вопрос был исследован независимо в работах [Joh01] и [BOO00].

с границей сжатой диаграммы Юнга, и смотрим на поведение границы в *конечной* окрестности точки пересечения луча с границей.

Отметим, что заранее достаточно ясно, что полученный в пределе точечный процесс на \mathbb{Z} (который описывает локальное поведение границы) должен быть трансляционно инвариантным, то есть, распределение случайной конфигурации на \mathbb{Z} не должно меняться при сдвигах решетки. Действительно, конечный сдвиг решетки пренебрежимо мал по сравнению с нашим предельным масштабом зрения.

6.3.2 Идея ответа с помощью разностных операторов

Итак, рассмотрим разностный оператор D (6.2), выписанный выше. Подставим в него $y = 2c\sqrt{\nu} + \tilde{y}$, $\tilde{y} \in \mathbb{Z}$. Отметим, что в подсчетах оператор D можно умножать/делить на любые положительные числа, так как нас интересует корреляционное ядро — матрица спектрального проектора на положительную часть спектра оператора. В результате подсчетов в координатах \tilde{y} получаем следующий разностный оператор:

$$\tilde{D}\varphi(\tilde{y}) = \varphi(\tilde{y} + 1) + \varphi(\tilde{y} - 1) - 2c\varphi(\tilde{y}). \quad (6.3)$$

Этот разностный оператор имеет постоянные коэффициенты. При работе с такими операторами часто применяют преобразования Фурье. В нашем случае все происходит на решетке, поэтому здесь мы применяем на самом деле ряды Фурье. Пусть \mathbb{T} — единичная окружность с комплексной координатой ζ , то есть, $\mathbb{T} = \{\zeta: |\zeta| = 1\}$. От пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$ переходим к двойственному пространству $L^2(\mathbb{T})$ с нормированной мерой Лебега (такой, что мера всей окружности есть 1). В пространстве $L^2(\mathbb{T})$ функции $\{\zeta^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ составляют ортонормальный базис.

Видно, что оператор \tilde{D} в $\ell^2(\mathbb{Z})$ является трансляционно инвариантным. Поэтому его преобразование Фурье — оператор в $L^2(\mathbb{T})$ — будет оператором умножения на функцию. Легко видеть, что эта функция имеет вид

$$\psi(\zeta) = \zeta + \zeta^{-1} - 2c = 2(\operatorname{Re} \zeta - c).$$

Как и должно быть, эта функция вещественная (так как оператор \tilde{D} эрмитов). Спектр оператора умножения на $\psi(\zeta)$ — это множество значений $\psi(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Положительная часть спектра представляет собой дугу $\{\operatorname{Re} \zeta \geq c\}$ окружности $\mathbb{T} = \{|\zeta| = 1\}$. Таким образом, специальный проектор на положительную часть спектра оператора \tilde{D} представляет собой оператор умножения на индикатор (характеристическую функцию) дуги $\{\operatorname{Re} \zeta \geq c\}$. Ясно, что имеет смысл рассматривать только значения $c \in [-1, 1]$.

Пересчитывая спектральный проектор из $L^2(\mathbb{T})$ в $\ell^2(\mathbb{Z})$, получим (трансляционно инвариантный) оператор свертки. Корреляционное ядро предельного процесса на \mathbb{Z} трансляционно инвариантно, то есть,

$$S(\tilde{y}, \tilde{y}') = S(\tilde{y} - \tilde{y}'),$$

и имеет вид:

$$S(k) = \begin{cases} \frac{\sin(Ak)}{\pi k}, & \text{если } k \neq 0, \\ \frac{A}{\pi}, & \text{если } k = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Здесь $k \in \mathbb{Z}$ и $A = \arccos c$. Как уже было сказано, параметр c принимает значения $-1 \leq c \leq 1$. Это корреляционное ядро S на \mathbb{Z} называется *дискретным синус-ядром*. Оно определяет локальное поведение границы случайной диаграммы Юнга, распределенной по мере Планшереля P_ν при $\nu \rightarrow \infty$ (англ. bulk limit). Строгие доказательства см. в [Joh01] и [BOO00].

6.4 Отступление: непрерывное синус-ядро

Дискретное синус-ядро, описанное в предыдущем подразделе, является дискретным аналогом непрерывного синус-ядра

$$S(x, y) = \frac{\sin(\pi(x - y))}{\pi(x - y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Непрерывное синус-ядро определяет (то есть, является корреляционным ядром) один из самых важных детерминантных точечных процессов.³² Преобразование Фурье этого непрерывного синус-ядра представляет собой умножение на индикатор (характеристическую функцию) ступеньки. Детерминантный точечный процесс, отвечающий ядру S , впервые возник в теории случайных матриц. Также существует гипотеза, что этот точечный процесс можно получить, подходящим образом рандомизируя нули дзета-функции Римана, находящиеся на прямой $\operatorname{Re} \zeta = \frac{1}{2}$. Более подробно см. [Mon73], [Dys62] (возможно, еще какие-то статьи Дайсона), а также [Odl87] (и другие статьи этого автора), [BDJ99], [Dei00].

6.5 Задача Улама о максимальной возрастающей подпоследовательности

В начале 1960-х гг. Улам сформулировал следующую комбинаторную задачу, которая носит его имя. Возьмем симметрическую группу $\mathfrak{S}(n)$. Элементы $\mathfrak{S}(n)$ будем рассматривать как перестановочные слова (см. также лекцию 2 выше). С каждым перестановочным словом $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ свяжем *длину его максимальной возрастающей подпоследовательности*. Например, для $\sigma = (4213657)$ эта длина равна 4, а максимальная возрастающая подпоследовательность в σ — это, например, (2357) (элементы подпоследовательности не обязательно идут подряд, а максимальных возрастающих

³²Точечный процесс на \mathbb{R} — это случайная локально конечная точечная конфигурация в \mathbb{R} . Более подробно об этом см. обзоры [Sos00], [Bot09].

подпоследовательностей может быть несколько). Рассмотрим на $\mathfrak{S}(n)$ равномерную меру, тогда длина максимальной возрастающей подпоследовательности становится целочисленной случайной величиной L_n . Улам поставил вопрос об исследовании асимптотики L_n при $n \rightarrow \infty$.

Задача Улама решалась в несколько этапов. Хаммерсли показал, что существует предел по вероятности величин $\frac{L_n}{\sqrt{n}}$.

В 1977 Вершик и Керов [BK77] показали, что по вероятности

$$\frac{L_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 2.$$

Независимо от них в [LS77] была получена односторонняя оценка для этого предела.

Следующий член асимптотики (задача типа центральной предельной теоремы) рассматривался значительно позднее. В работе [BDJ99] было показано, что

$$L_n = 2\sqrt{n} + n^{\frac{1}{6}} \cdot U,$$

где U — некоторая случайная величина. Эта случайная величина не является гауссовской, ее распределение выражается через решение некоторого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Пенлеве). Распределение U также может быть получено из теории случайных матриц, об этом будет сказано ниже. Еще более тонкие результаты были получены независимо в [Joh01] и [BOO00].

6.6 Гауссовский унитарный ансамбль и задача Улама

Рассмотрим эрмитовы матрицы размера $N \times N$ и введем на них гауссовскую меру. Случайная матрица имеет действительные собственные значения, упорядочим их: $x_1 \geq \dots \geq x_N$. При $N \rightarrow \infty$ и необходимом центрировании и нормировании ансамбль случайных точек $\{x_i\}$ на \mathbb{R} сходится к детерминантному точечному процессу. Этот точечный процесс называется процессом Эйри (Airy). Его конфигурации имеют наибольший элемент, а влево число точек бесконечно. Распределение самой правой точки процесса Эйри и есть распределение U , возникающее в задаче Улама.

6.7 Мера Планшереля и задача Улама

Рассмотрим алгоритм Робинсона–Шенстеда (лекция 2), который устанавливает биекцию между множеством перестановочных слов и парами стандартных таблиц Юнга одинаковой формы с n клетками:

$$\mathfrak{S}(n) \longleftrightarrow \{(P, Q)\}.$$

Возникает проекция: $\mathfrak{S}(n) \ni \sigma \mapsto \lambda \in \mathbb{Y}_n$, где λ — общая форма таблиц P и Q . Как мы обсуждали, равномерная мера на $\mathfrak{S}(n)$ при этой проекции переходит в меру Планшереля на \mathbb{Y}_n . Можно показать (см., напр., [Фул06]), что

при проекции $\sigma \mapsto \lambda$ длина максимальной возрастающей подпоследовательности в σ есть длина максимальной строчки в λ , то есть, число λ_1 . Поэтому задача Улама об асимптотике L_n равносильна задаче об асимптотике λ_1 , если λ — случайная диаграмма, распределенная по мере Планшереля $P^{(n)}$ на \mathbb{Y}_n при $n \rightarrow \infty$.

Такая интерпретация задачи Улама использовалась в работе [BDJ99] для нахождения второго члена U асимптотики L_n .³³ В этой же работе была высказана гипотеза, что длины остальных строк $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, подходящим образом нормированные, сходятся к детерминантному ансамблю Эйри, который был известен из теории случайных матриц. В работе тех же авторов [BDJ00] справедливость гипотезы была установлена для λ_2 .

В [Joh01] и [BOO00] была доказана гипотеза об асимптотике всех длин строк случайной диаграммы Юнга, имеющей распределение Планшереля. Мы покажем, как можно получить верный ответ на вопрос об асимптотике, используя разностные операторы.

6.8 Асимптотика меры Планшереля и разностные операторы

Пусть λ — случайная диаграмма, распределенная по мере Планшереля P_ν . Определим u_i из соотношений

$$\lambda_i = 2\sqrt{\nu} + \nu^m u_i, \quad (6.5)$$

где $m > 0$ — какой-то показатель степени. В процессе вычислений автоматически получится, что $m = \frac{1}{6}$. Возьмем разностный оператор (6.2) для меры Планшереля P_ν :

$$D\varphi(y) = \sqrt{\nu}(\varphi(y+1) + \varphi(y-1)) - y\varphi(y).$$

В соответствии с (6.5) определим u из соотношения

$$y = 2\sqrt{\nu} + \nu^m u.$$

Подставим это определение в дифференциальный оператор D , то есть, от функции $\varphi(y)$ перейдем к $F(u)$,

$$\varphi(y) = F(u).$$

Приращениям $y \pm 1$, подставленным в $\varphi(y)$, соответствуют приращения функции F вида $F(u \pm \nu^{-m})$. Разложим их по формуле Тейлора:

$$F(u \pm \nu^{-m}) = F(u) \pm \nu^{-m} F'(u) + \frac{1}{2} \nu^{-2m} F''(u) + \dots$$

³³Стоит отметить, что в этой работе впервые применялась техника пуассонизации меры Планшереля. Применительно к асимптотике λ_1 была доказана эквивалентность ансамблей (см. выше).

При подсчете получим следующую асимптотику оператора D , действующего на функцию $F(u)$:

$$DF(u) = \nu^{\frac{1}{2}-2m} F''(u) - \nu^m F(u) + \text{младшие члены.}$$

Нас интересует предел при $\nu \rightarrow +\infty$. Кроме того, нам важен не сам оператор, а спектральный проектор на положительную часть его спектра. Поэтому мы можем умножать оператор D на любые положительные константы (в том числе, зависящие от ν). Чтобы в результате возник невырожденный предел оператора D , необходимо, чтобы $m = \frac{1}{6}$. Тогда, умножая оператор D на $\nu^{-m} = \nu^{2m-\frac{1}{2}} = \nu^{-\frac{1}{6}}$, и переходя к пределу при $\nu \rightarrow +\infty$ (что уничтожит младшие члены), приходим к следующему дифференциальному оператору:

$$DF = F'' - uF.$$

Предельное распределение точек $\{u_i\}$, определенных в (6.5), представляет собой детерминантный точечный процесс, корреляционное ядро которого — матрица спектрального проектора на положительную часть спектра оператора D . Исследуя оператор D (находя его собственные функции, и и.д.), можно убедиться, что корреляционное ядро процесса $\{u_i\}$ совпадает с ядром Эйри, полученным в теории случайных матриц.

Видно, что использование разностных операторов позволяет выдвигать верные гипотезы. В данном случае, гипотезы по показателю $m = \frac{1}{6}$ и про то, что предельный точечный процесс управляется ядром Эйри.

6.9 Предельная форма диаграмм Юнга

6.9.1 Формулировка

Мы сформулируем теорему о предельной форме случайных диаграмм Юнга, распределенных по мере Планшереля, полученную независимо в работах [BK77] и [LS77]. После чего покажем, как можно догадаться до верного ответа (до верной формулы для предельной формы диаграммы), используя наше знание локального поведения границы случайной диаграммы Юнга (как мы знаем, это локальное поведение управляется дискретным синус-ядром, см. ранее в этой лекции).

Сначала в диаграмме Юнга перейдем от координат (i, j) (i нумерует строки, j — столбцы, как в матрицах) к координатам

$$u = \frac{j-i}{\sqrt{n}}, \quad v = \frac{j+i}{\sqrt{n}}.$$

При этом мы сразу сделаем масштабное преобразование, чтобы площадь диаграммы Юнга была равна 1 (здесь n — число клеток в диаграмме). Такая замена координат соответствует повороту осей, см. рис. 14. При этом граница диаграммы Юнга (бесконечная ломаная) может рассматриваться в координатах (u, v) как график (кусочно-линейной) функции $v = \tilde{\lambda}(u)$,

$-\infty < u < +\infty$. Отметим, что функция $\tilde{\lambda}$ построена по уже нормированной диаграмме Юнга. Если λ — случайная диаграмма, распределенная по мере Планшереля на \mathbb{Y}_n , то $\tilde{\lambda}$ — случайная ломаная. Для этой ломаной справедлива следующая предельная теорема о концентрации типа закона больших чисел:

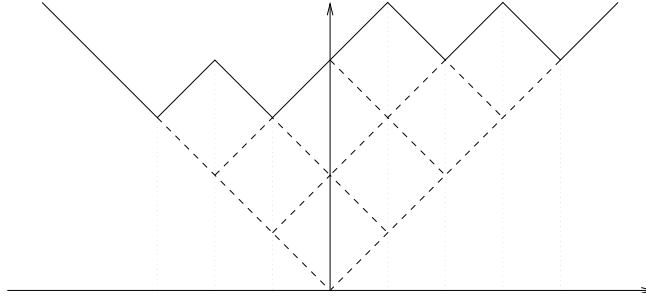


Рис. 14. Рисунок взят из статьи [Via01].

Теорема 6.1 (Вершик–Керв–Logan–Shepp, 1977). *При $n \rightarrow \infty$ случайная ломаная $\tilde{\lambda}$ сходится по вероятности к предельной форме $v = \Omega(u)$, где $\Omega(u)$ определяется по явной формуле:*

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4 - u^2} \right), & |u| \leq 2; \\ |u|, & |u| \geq 2. \end{cases}$$

Сходимость по вероятности означает, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ вероятность, что ломаная $\tilde{\lambda}$ (где $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ распределена по мере Планшереля) лежит в ε -окрестности предельной формы $\Omega(u)$ (то есть, $|\tilde{\lambda}(u) - \Omega(u)| < \varepsilon$), с ростом n стремится к единице.

Типичная (в смысле меры Планшереля) диаграмма с большим числом клеток и предельная форма изображены на рис. 15.

Отметим, что формула для производной функции Ω значительно проще:

$$\Omega'(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u}{2}, \quad |u| \leq 2.$$

При интегрировании этой функции аддитивная константа выбирается так, чтобы в точках $u = \pm 2$ функция “ложилась” на прямые $v = \pm u$ (см. рис. 15).

6.9.2 Идея доказательства с использованием дискретного синус-ядра

Как и в рассуждениях с синус-ядром, возьмем точку $c \in [-1, 1]$, отметим ее на оси u , и проведем вертикальный луч из точки c до пересечения с границей диаграммы Юнга (представьте это на рис. 15). В окрестности

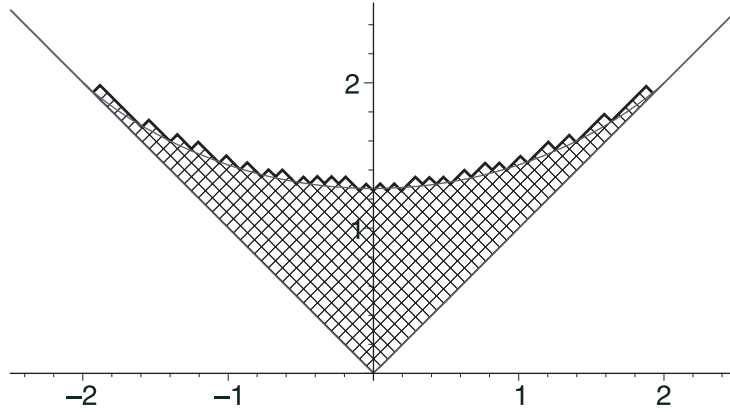


Рис. 15. Рисунок взят из статьи [ВОО00].

точки пересечения локальное поведение границы диаграммы регулируется синус-ядром (6.4) с параметром $A = \arccos c$. Таким образом, локально возникает детерминантный точечный процесс. Его первая корреляционная функция есть константа³⁴ $\rho = S(0) = \frac{A}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos c$. Физический смысл числа ρ — плотность частиц в детерминантном процессе на \mathbb{Z} .

Теперь пусть $c \in [-1, 1]$ — переменная, и кроме того, пусть $c = \frac{u}{2}$, где $u \in [-2, 2]$ — естественная переменная в координатах на рис. 15. Тогда $\rho(u) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{u}{2}$ — это локальная плотность частиц в точке границы с абсциссой u .³⁵ В то же время локальная плотность дырок (отсутствия части) равна $1 - \rho$.

Теперь вспомним, как мы определяли точечную конфигурацию по диаграмме. В данной повернутой системе координат это делается так: берем границу диаграммы, и на каждом ее отрезке с наклоном (-1) размещаем частицу, а все отрезки с наклоном $(+1)$ оставляем пустыми (размещаем на них дырки). В итоге приходим к ключевому соображению, которое позволит догадаться до предельной формы:

В точке $u \in [-2, 2]$ соотношение участков границы очень большой (нормированной) случайной диаграммы Юнга равно $\frac{\rho(u)}{1 - \rho(u)}$. Доля участков с наклоном (-1) составляет $\rho(u)$, а доля участков с наклоном $(+1)$ — $(1 - \rho(u))$ (см. рис. 15).

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\frac{\rho(u)}{1 - \rho(u)} = -\frac{\Delta i}{\Delta j} = \frac{du - dv}{du + dv},$$

так как $j - i = u\sqrt{n}$, $j + i = v\sqrt{n}$.

³⁴Это константа в силу трансляционной инвариантности.

³⁵Вспомните определение корреляционных функций!

Значит, получаем

$$\frac{dv}{du} = 1 - 2\rho(u) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{u}{2} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u}{2},$$

что и дает производную $\Omega'(u)$ искомой предельной формы.

Отметим, что в работах [BK77] и [LS77] применялся совершенно другой способ, основанный на том, что предельная форма $\Omega(u)$ является решением некоторой вариационной задачи.

6.10 Меры $P_{\nu, N}$ и предельные формы

Филипп Биан (Biane) [Bia01] рассматривал задачу о предельной форме для мер $P_{\nu, N}$, которые связаны с двойственностью Шура–Вейля. Они сосредоточены на множестве диаграмм Юнга с $\leq N$ строчками. В работе [Bia01] изучалось предельное поведение этих мер, когда ν и N стремятся к бесконечности. При этом можно управлять относительной скоростью стремления ν и N к бесконечности: $\text{const} = \frac{\sqrt{\nu}}{N}$ (или $\frac{\sqrt{n}}{N}$). На рис. 16 представлены различные формы для разных значений этой константы. В следующей лекции будет показано, как получить уравнения для этих предельных форм с использованием разностных операторов.

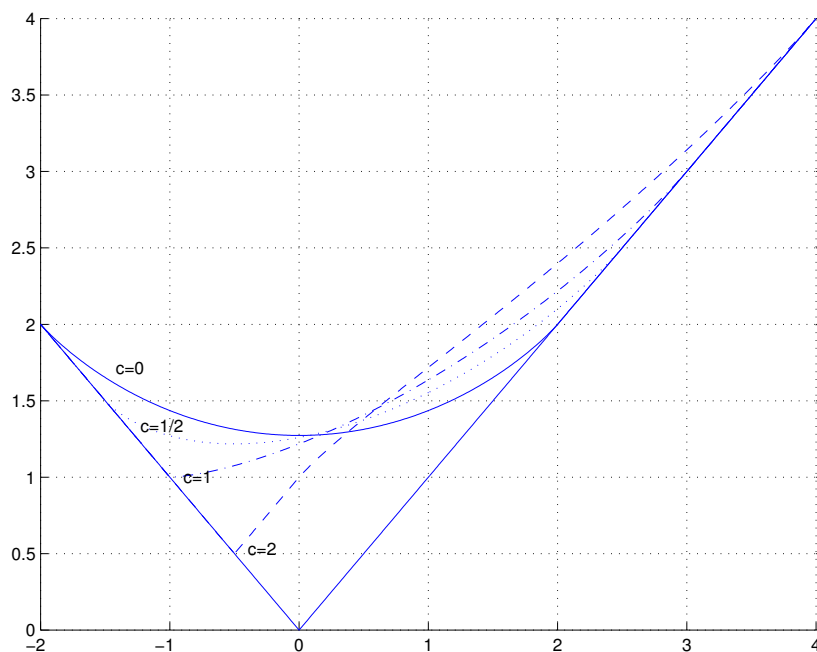


Рис. 16. Рисунок взят из статьи [Bia01].

7 Пределные формы случайных диаграмм по мерам $P_N^{(n)}$

В этой лекции мы обсудим предельное поведение мер $P_N^{(n)}$, связанных с двойственностью Шура–Вейля (см. лекцию 1). Мера $P_N^{(n)}$ — это вероятностная мера на множестве $\mathbb{Y}_n(N)$ диаграмм Юнга с n клетками и $\leq N$ строчками, которая определяется следующим образом:

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda}{N^n}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n(N).$$

В этой лекции рассматривается асимптотическое поведение мер $P_N^{(n)}$, когда оба параметра n и N стремятся к бесконечности.

Первым данный вопрос рассматривал С. В. Керов в работе [Кер86]. Он исследовал два предельных режима:

- $n, N \rightarrow \infty$, $\frac{n}{N} \rightarrow \gamma > 0$. В этом случае предельное поведение случайной диаграммы по мере $P_N^{(n)}$ не отличается от предельного поведения случайной диаграммы по мере Планшереля, и возникает та же самая предельная форма $\Omega(u)$, рассмотренная в предыдущей лекции.

Это можно объяснить тем, что, во-первых, при $N \rightarrow \infty$ меры $P_N^{(n)}$ сходятся к мере Планшереля $P^{(n)}$, а во-вторых, линейные размеры случайной диаграммы по мере Планшереля — это примерно $2\sqrt{n}$ (другими словами, число строк в случайной диаграмме, а также длина максимальной строки при больших n мало отличаются от $2\sqrt{n}$, см. предыдущую лекцию). Поэтому в данном предельном режиме ограничение N на число строк в диаграмме много больше, чем $2\sqrt{n}$, и асимптотически его можно не учитывать.

- N фиксировано, а $n \rightarrow \infty$. Мы не будем говорить об этом предельном режиме.

7.1 Формулировка теоремы Биана

Биан в работе [Bia01] рассматривал предельное поведение случайных диаграмм по мере $P_N^{(n)}$ при $n, N \rightarrow \infty$, в другом предельном режиме:

$$\sqrt{n} \sim cN, \quad c \geq 0 \text{ фиксировано.}$$

Напомним еще раз, что линейные размеры случайной диаграммы по мере Планшереля равны примерно $2\sqrt{n}$, так что этот предельный режим рассматривать очень естественно. В результате в работе [Bia01] возникает деформация (зависящая от c) предельной формы Вершика–Керова–Логана–Шешпа $\Omega(u)$, рассмотренной в предыдущей лекции.

Как и в предыдущей лекции, в диаграмме Юнга перейдем от координат (i, j) (i нумерует строки, j — столбцы, как в матрицах) к координатам $j - i$

и $j + i$ (см. рис. 14).³⁶ После чего сделаем скейлинг — сожмем картинку в \sqrt{n} раз по обеим осям, то есть, в итоге, введем координаты

$$u = \frac{j - i}{\sqrt{n}}, \quad v = \frac{j + i}{\sqrt{n}}.$$

При этом граница диаграммы Юнга (бесконечная ломаная) может рассматриваться в координатах (u, v) как график (кусочно-линейной) функции $v = \tilde{\lambda}(u)$, $-\infty < u < +\infty$. Отметим, что функция $\tilde{\lambda}$ построена по уже нормированной диаграмме Юнга. Если λ — случайная диаграмма, распределенная по мере $P_N^{(n)}$, то $\tilde{\lambda}$ — случайная ломаная. Теорема Биана состоит в следующем. Если $n, N \rightarrow \infty$, так, что $\sqrt{n} \sim cN$ ($c \geq 0$), то случайные ломаные $\tilde{\lambda}$ сходятся по вероятности в равномерной метрике³⁷ к предельной форме, которую можно задать непрерывной функцией $v = \Omega(c; u)$.

Вид предельной формы $\Omega(c; u)$ дан (для различных c) на рис. 16. Опишем формы $\Omega(c; u)$. При всех c кривая $\Omega(c; u)$ состоит из линейных частей и главной нелинейной части. Основная нелинейная часть проще всего определяется через свою производную с одним граничным условием:

- $\frac{\partial \Omega(c; u)}{\partial u} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u + c}{2\sqrt{1 + uc}}$.
- $\Omega(c; u)|_{u=c+2} = c + 2$, то есть, кривая в точке $u = c + 2$ касается правого луча j (который задается уравнением $v = u$).

Опишем более подробно различные случаи, все они изображены на рис. 16, взятом из статьи [Via01].

0. ($c = 0$) Предельная форма совпадает с кривой Вершика–Керова–Логана–Шеппа $\Omega(u)$, описанной в предыдущей лекции. Нелинейная часть кривой — при $-2 \leq u \leq 2$, в точках $u = -2$ и $u = 2$ кривая касается лучей $v = \mp u$, соответственно.
1. ($0 < c < 1$) Этот случай — достаточно «малая» деформация картины при $c = 0$. А именно, нелинейный участок существует при $c - 2 \leq u \leq c + 2$, и

$$\frac{\partial}{\partial u} \Omega(c; u)|_{u=c \pm 2} = \pm 1,$$

то есть, в точках $u = c \pm 2$ кривая касается лучей $v = \pm u$.

2. ($c > 1$) В этом случае возникает еще один линейный участок. Он идет от точки $u = -\frac{1}{c}$, $v = \frac{1}{c}$ до точки $u = c - 2$, $v = c - 2 + \frac{2}{c}$, с

³⁶Рисование диаграмм Юнга в этих координатах также называется «Russian picture», по аналогии со стандартными «English picture» и «French picture». Различие между последними двумя замечательно описано в книге Макдональда [Мак84], в начале §1 главы I.

³⁷Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших N (и n , таких, что $\sqrt{n} \sim cN$), случайные ломаные с вероятностью не меньше $1 - \varepsilon$ находятся в ε -окрестности предельной формы $\Omega(c; u)$. При этом ε -окрестность понимается как ε -окрестность функции в равномерной метрике.

наклоном $+1$. В точке $u = c - 2$ этот линейный участок переходит в нелинейный (описанный выше), причем нелинейный участок касается в точке $u = c - 2$ этого линейного, так как $\frac{\partial}{\partial u}\Omega(c; u)|_{u=c-2} = 1$ (здесь меняется знак, с которым раскрывается корень в знаменателе).

Ограничение на число строк в случайной диаграмме Юнга имеет порядок $N \sim \frac{\sqrt{n}}{c}$, и при $c > 1$ оно становится очень существенным, изменяя всю картину. Величина $\frac{\sqrt{n}}{c}$ также объясняет, как появляется точка $u = -\frac{1}{c}$. Длина самой короткой строчки в диаграмме асимптотически равна $\frac{(c-1)^2}{c}\sqrt{n}$.

3. ($c = 1$) Этот случай — промежуточный между предыдущими двумя. Здесь линейные участки расположены так же, как в случае 1, нелинейный участок — при $2 - c \leq u \leq c + 2$, то есть, $-1 \leq u \leq 3$. Отличие состоит в том, что при $u = -1$ нелинейный участок не касается прямой $v = -u$, а «втыкается» в нее. Производная $\Omega(c; u)$ при $c = 1$ и $u = -1$ равна нулю.

Биан [Bia01] получил свои результаты с использованием так называемой «Free Probability» — некоммутативным вариантом теории вероятностей, придуманным Войкулеску. В следующем подразделе мы покажем, как можно угадать эти же результаты с помощью разностных операторов (примерно в том же духе, как и в предыдущей лекции).

7.2 Вывод формул для $\Omega(c; u)$

Во-первых, рассмотрим пуассонизацию мер $P_N^{(n)}$ с параметром $\nu > 0$. Это снимает ограничения на число клеток в случайной диаграмме Юнга, и вероятностная мера $P_{\nu, N}$ сосредоточена на $\mathbb{Y}(N)$ — множестве диаграмм Юнга с $\leq N$ строками. Эквивалентность ансамблей (см. предыдущую лекцию) здесь заключается в том, что предел при $n \rightarrow \infty$ заменяется на предел при $\nu \rightarrow \infty$. При этом соотношение между n и N переходит в соотношение $\sqrt{\nu} \sim cN$, $N \rightarrow \infty$.

Диаграмме Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$ ставится в соответствие N -точечная конфигурация $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$, где $x_i = \lambda_i - i + N$, $i = 1, 2, \dots, N$. Эта конфигурация живет на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Мера $P_{\nu, N}$ определяет детерминантный точечный процесс на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а его ядро — это матрица оператора спектрального проектирования на часть спектра $\{-(N-1), \dots, -1, 0\}$ разностного оператора второго порядка

$$(D\varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta)\varphi(x), \quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Здесь D — оператор в $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, а $\theta := \frac{\nu}{N}$.

Для удобства будем рассматривать оператор $D + (N-1)\mathbf{1}$, тогда корреляционное ядро процесса $P_{\nu, N}$ будет матрицей спектрального проектора на часть спектра $\{0, 1, \dots, N-1\}$ оператора $D + (N-1)\mathbf{1}$. Имеем

$$((D + (N-1)\mathbf{1})\varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta-N+1)\varphi(x).$$

Изучаем структуру границы случайной диаграммы по мере $P_{\nu, N}$, как в предыдущей лекции. Выберем и зафиксируем $u \in \mathbb{R}$, поставим точку u как на рис. 13, проведем из нее луч, параллельный главной диагонали, до пересечения с границей диаграммы. Другими словами, для изучения локальной структуры границы надо перейти к координате $y \in \mathbb{Z}$, которая связана с x следующим образом:

$$x = \lceil \sqrt{\nu} \rceil + N + y, \quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad y \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы понять локальное поведение границы, остается переписать оператор $D + (N - 1)\mathbf{1}$ в координатах y , и перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$ и $\sqrt{\nu} \sim cN$. При этом пользуемся тем, что

$$\begin{aligned} x &\sim \sqrt{\nu} + N + y; \\ N &\sim c^{-1}\sqrt{\nu}, \\ \theta &= \frac{\nu}{N} = c\sqrt{\nu}, \\ \sqrt{\theta x} &\sim \sqrt{\theta(x+1)} \sim \sqrt{\nu}\sqrt{1+uc}; \\ -(x + \theta - N + 1) &\sim -\sqrt{\nu}(u+c). \end{aligned}$$

При переходе к пределу делим оператор на $\sqrt{\nu}\sqrt{1+uc} > 0$, так как нас интересует проектор на неотрицательную часть спектра. На функции $F(y)$, $y \in \mathbb{Z}$, предельный оператор действует следующим образом:

$$F(y) \mapsto F(y+1) + F(y-1) - 2\frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}F(y).$$

Здесь $\frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}$ — константа, а весь оператор уже возникал (с другой константой) в предыдущей лекции при рассмотрении того же вопроса о локальном поведении границы по мере Планшереля. Таким образом, получаем ответ:

Предложение 7.1. *При $\nu \rightarrow \infty$ и $N \sim c^{-1}\sqrt{\nu}$, локальное предельное поведение границы случайной диаграммы по мере $P_{\nu, N}$ описывается трансляционно инвариантным дискретным синус-ядром*

$$S(y, y') = S(y - y'), \quad S(k) = \begin{cases} \frac{\sin(Ak)}{\pi k}, & k \neq 0; \\ \frac{A}{\pi}, & k = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$A = \arccos \frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}.$$

Напомним, что исследование дифференциального оператора на решетке \mathbb{Z} с постоянными коэффициентами (действующего на функцию $F(y)$) можно легко провести с помощью преобразования Фурье.

Функция плотности частиц в точке u имеет вид

$$\rho(u) = S(0) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}.$$

Она определяет соотношение между вертикальными и горизонтальными участками границы диаграммы, и поэтому для предельной формы (точнее, для ее нелинейной части) выполнено

$$\frac{\partial \Omega(c; u)}{\partial u} = 1 - 2\rho(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u + c}{2\sqrt{1 + uc}}.$$

Таким образом, рассуждения с разностными операторами позволяют получить вид предельной формы для меры $P_{\nu, N}$ (а стало быть, и для $P_N^{(n)}$) при $N, n \rightarrow \infty$ и $\sqrt{n}/N \sim c \geq 0$. Отметим еще раз, что данные рассуждения еще ничего не доказывают.

7.3 Предельное поведение самых больших и самых маленьких строк случайной диаграммы

Рассмотрим предельное поведение случайных диаграмм по мере $P_{\nu, N}$, и рассмотрим вопрос о поведении самых длинных или самых коротких строк в диаграмме. Пусть сначала $c \neq 1$. Тогда (см. рис. 16) в правом и в левом конце нелинейная часть границы касается линейной части (возникает так называемый «soft edge»). Можно показать, что флуктуации длин строк в таких точках имеют порядок $\sim n^{\frac{1}{6}}$, и при определенном центрировании и нормировании их предельное поведение описывается детерминантным процессом, связанным с ядром Эйри. При $c = 1$ в правом конце нелинейной части границы возникает та же ситуация. Посмотрим подробнее, что происходит в левом конце нелинейной части границы.

При $c = 1$ и $u = -1$ имеем

$$\frac{\partial \Omega(u; c)}{\partial u} = 1 - 2\rho(u) = 0,$$

то есть, $\rho(u) = \frac{1}{2}$. Таким образом, в этой точке доля вертикальных и горизонтальных частей одинакова. На самом деле, в пределе $N \rightarrow \infty$, $\sqrt{n} \sim N$ без скейлинга в области самых коротких строк диаграммы возникает нетривиальная локальная структура.

Нас интересуют строки $0 \leq \lambda_N \leq \lambda_{N-1} \leq \dots$, или, в терминах x_i ,

$$x_N = \lambda_N, \quad x_{N-1} = \lambda_{N-1} + 1, \quad \dots$$

Смотрим на их предельное поведение без скейлинга по x . Оказывается, следует рассматривать не просто $N \sim n^{\frac{1}{2}}$, а более тонкую асимптотику вида

$$N = n^{\frac{1}{2}} - sn^{\frac{1}{4}} + o(n^{\frac{1}{4}}),$$

где s — еще один параметр. В терминах пуассонизированных мер, это означает $\nu \sim N^2 + sN^{\frac{3}{2}}$. Подставляя это в разностный оператор D , соответствующий мерам $P_{\nu, N}$, и переходя к пределу, получим разностный оператор на полурешетке $\mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\psi(x) \mapsto \sqrt{x+1}\psi(x+1) + \sqrt{x}\psi(x) - s\psi(x)$$

Другими словами, предельное поведение самых коротких строк описывается детерминантным процессом, корреляционное ядро которого есть матрица спектрального проектора на часть спектра оператора

$$\psi(x) \mapsto \sqrt{x+1}\psi(x+1) + \sqrt{x}\psi(x),$$

лежащую в луче $[s, +\infty]$. Этот разностный оператор можно исследовать, у него чисто непрерывный простой лебеговский спектр. Его корреляционное ядро выражается через полиномы Эрмита и называется дискретным ядром Эрмита (индексы полиномов работают в качестве аргументов). Более подробно см. в работе [BO07].

7.4 Замечание о характерах $U(\infty)$

Меры $P_N^{(n)}$ связаны с задачей классификации характеров бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$, которая рассматривалась в первой части лекций [Оль09]. А именно, пусть $\Phi(u)$, $|u| = 1$ — функция Войкулеску,

$$\Phi(u) = e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)}.$$

С ней связаны вероятностные меры на сигнатурах длины N (для любого N) следующим образом. Рассмотрим произведение $\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N)$, это симметрическая функция (Лорана) от переменных u_1, \dots, u_N , ее можно разложить по функциям Шура:

$$\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N) = \sum_{\lambda} P(\lambda) \frac{s_{\lambda}(u_1, \dots, u_N)}{\text{Dim}_N \lambda}.$$

Здесь сумма ведется по всем сигнатурам длины N , а $P(\cdot)$ — вероятностная мера на таких сигнатурах. Если из параметров $\alpha_i^{\pm}, \beta_i^{\pm}, \gamma^{\pm}$ оставить только γ^+ (а все остальные обнулить), то получится мера $P_{\nu, N}$ на неотрицательных сигнатурах длины N (то есть, на множестве $\mathbb{Y}(N)$). При этом параметры ν и γ^+ как-то связаны.

8 Орбитальный интеграл, связанный с действием $U(N)$ на $H(N)$

Перейдем к новому сюжету, который по существу заключается в описании эргодических мер некоторого группового действия. Начнем с некоторых определений.

8.1 Определения и некоторые свойства

Пусть X — борелевское пространство.³⁸ Через $\mathfrak{M}(X)$ обозначается множество борелевских вероятностных мер на X . Пусть G — группа, действующая на X :

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto gx.$$

Определение 8.1. Мера $M \in \mathfrak{M}(X)$ называется *инвариантной* по отношению к действию группы G , если для любого измеримого (то есть, борелевского) множества A выполнено $M(gA) = M(A)$.

Через $\mathfrak{M}(X)^G$ обозначим множество всех инвариантных вероятностных мер.

Определение 8.2. Пусть $M \in \mathfrak{M}(X)^G$, $g \in G$ и $Y \subseteq X$ — борелевское множество. Множество Y называется *инвариантным mod 0* относительно элемента g (и меры M), если $M(Y \Delta gY) = 0$.

Определение 8.3. Мера $M \in \mathfrak{M}(X)^G$ называется *эргодической* (относительно действия группы G), если для любого борелевского множества $Y \subseteq X$, которое инвариантно mod 0 относительно всех $g \in G$, выполнено $M(Y) = 0$ или 1.

Предложение 8.4. Пусть $M \in \mathfrak{M}(X)^G$. Следующие условия эквивалентны:

1. M — эргодическая мера;
2. M является крайней точкой выпуклого множества $\mathfrak{M}(X)^G$;³⁹
3. Подпространство в $L^2(X, M)$, состоящее из инвариантных функций (оно обозначается через $L^2(X, M)^G$) содержит лишь функции, постоянные на X .

Доказательство. Напомним, что действие группы G на функции определяется следующим образом. Каждому элементу $g \in G$ сопоставляется унитарный оператор T_g в $L^2(X, M)$, действующий по формуле

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x).$$

³⁸Обычно под этим понимается полное сепарабельное метрическое пространство X с борелевской σ -алгеброй, которая порождена всеми открытыми множествами.

³⁹То, что это множество выпукло, очевидно.

(1 \Leftrightarrow 3) Если $Y \subseteq X$ — G -инвариантное mod 0 множество, то его характеристическая функция (индикатор) χ_Y является почти инвариантной относительно действия G на функции, то есть, χ_Y и $T_g \chi_Y$ отличаются на множестве M -меры нуль.

С другой стороны, если $f \in L^2(X, M)^G$, то для любого борелевского множества I (в области значений f , то есть, в \mathbb{R} или в \mathbb{C}) множество $f^{-1}(I) \subset X$ является G -инвариантным mod 0.

(3 \Rightarrow 2) Пусть M — эргодическая мера, которая не является крайней точкой. Пусть например $M = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$, где $M_{1,2}$ — инвариантные меры. Ясно, что $M_{1,2} \ll M$ (меры $M_{1,2}$ абсолютно непрерывны относительно M), поэтому существуют производные Радона–Никодима $\frac{M_{1,2}}{M}$. Так как меры $M_{1,2}$ и M инвариантны, то функции $\frac{M_{1,2}}{M}$ — почти инвариантны. Из (3) следует, что эти функции постоянны, то есть, меры M , M_1 и M_2 одинаковы.

(2 \Rightarrow 1) Пусть Y — G -инвариантное mod 0 множество. Ясно, что $X \setminus Y$ — также G -инвариантное mod 0 множество. Если Y имеет промежуточную меру, отличную от 0 или 1, то меру M можно сузить на Y и на $X \setminus Y$. Перенормируем эти сужения так, чтобы вновь получились вероятностные меры. Ясно, что эти две новые меры также будут инвариантными. Таким образом, получаем представление M в виде нетривиальной выпуклой комбинации инвариантных мер. \square

Пример 8.5. Рассмотрим один из простейших и в то же время один из самых важных примеров — поворот окружности на иррациональный угол.

Пусть $X = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, будем трактовать X как множество комплексных чисел с модулем 1, $X = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$. M — (нормированная) мера Лебега на X , а группа $G = \mathbb{Z}$, то есть, $G = \{g^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, где g — поворот окружности на иррациональный угол $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

$$gz = e^{2\pi i \theta} z, \quad z \in X.$$

Покажем, что это преобразование эргодично. Рассмотрим $L^2(S^1, M)$. Базис в этом пространстве составляют функции $\{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Группа G действует на них как

$$T_g(z^n) = e^{-2\pi i \theta n} z^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Так как здесь n может меняться, из иррациональности θ следует, что инвариантных функций, кроме кратных $z^0 = 1$ быть не может. \square

Таким образом, мера Лебега является эргодической относительно поворота окружности на иррациональный угол. Можно также показать, что мера Лебега является единственной инвариантной мерой для такого действия.

Если X — топологическое пространство, G — компактная группа, непрерывно действующая на X , то X распадается на компактные замкнутые орбиты под действием G . Модельный пример: $X = \mathbb{R}^2$, $G = S^1$, группа G действует на X поворотами вокруг начала координат. Тогда орбиты — это всевозможные окружности с центром в начале координат, а также сама

точка $(0, 0)$. Эргодические меры в ситуации непрерывного действия компактной группы — это в точности орбитальные меры, которые строятся следующим образом. На G есть нормированная инвариантная мера, образ которой на орбите G/H и называется орбитальной мерой. Можно показать, что других эргодических мер нет.

Замечание 8.6. Отметим, что две предыдущие ситуации сильно отличаются друг от друга. А именно, во второй ситуации эргодические меры это в точности орбитальные. В первой ситуации (поворот окружности на иррациональный угол) орбиты действия также есть, но их рассматривать неправильно, так как группа G не компактна. В этом случае правильной заменой орбитальных мер как раз являются эргодические меры.

8.2 Теорема Бохнера

Пусть теперь $X = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ — множество борелевских вероятностных мер на \mathbb{R}^n . Преобразование Фурье сопоставляет каждой мере $M \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ее характеристическую функцию

$$f_M(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} M(dy),$$

где $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. Характеристическая функция однозначно определяет меру.

Замечание 8.7. Можно рассматривать также преобразование Лапласа:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(x,y)} M(dy),$$

где теперь уже $x \in \mathbb{C}^n$. Однако, это преобразование может быть определено не для всех $x \in \mathbb{C}^n$.

Теорема Бохнера характеризует образ $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ под действием преобразования Фурье.

Теорема 8.8 (Бохнер). *Существует взаимно-однозначное соответствие (в одну сторону осуществляющееся преобразованием Фурье) между $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ и пространством функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

- непрерывность;
- положительная определенность;
- нормированность в нуле: $f_M(0) = 1$.

Определение 8.9. Функция на \mathbb{R}^n называется *положительно определенной*, если

- $f(-x) = \overline{f(x)}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

- Для любого конечного набора векторов $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ матрица

$$[f(x_j - x_k)]_{j,k=1}^m$$

является положительно определенной.

Эквивалентно можно сказать, что для любого конечного набора векторов $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ и любого набора $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ выполнено

$$\sum_{j,k=1}^m c_j \bar{c}_k f(x_j - x_k) \geq 0.$$

Отметим, что в теореме Бохнера легко показать необходимость условий, которым должно удовлетворять преобразование Фурье меры. Основное утверждение состоит в том, что этих условий достаточно.

Замечание 8.10. На самом деле, в теореме Бохнера то пространство \mathbb{R}^n , которое стоит в определении $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ — это двойственное пространство к \mathbb{R}^n . В данном случае мы естественным образом отождествляем эти два пространства.

Пусть на \mathbb{R}^n задано действие какой-нибудь группы G , причем группа G действует линейными преобразованиями на \mathbb{R}^n . Из теоремы Бохнера видно, что образ инвариантных мер $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)^G$ — это в точности инвариантные функции, лежащие в $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим это пространство функций через $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)^G$.

8.3 Действие $U(N)$ на $H(N)$

Пусть $X = H(N)$ — множество эрмитовых $N \times N$ матриц (здесь $N = 1, 2, \dots$).

Замечание 8.11. Отметим, что $X = H(N)$ — это вещественное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(A, B) = \text{Tr}(AB), \quad A, B \in H(N).$$

Поэтому выбор $H(N)$ вместо \mathbb{R}^n (как было в предыдущем подразделе) не вызывает дополнительных трудностей.

На пространстве X действует сопряжениями унитарная группа $G = U(N)$:

$$(g, A) \mapsto gAg^{-1}, \quad g \in U(N), \quad A \in H(N).$$

Группа G компактна и действует на $H(N)$ непрерывно.

Рассмотрим множество инвариантных вероятностных мер $\mathfrak{M}(H(N))^{U(N)}$. Это выпуклое множество, и его крайние точки (то есть, эргодические меры) — это нормированные орбитальные меры, сосредоточенные на орбитах действия группы $U(N)$ на $H(N)$.

Рассмотрим подробнее эти орбиты. Каждая орбита определяется (неупорядоченным) набором собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$. Можно для определенности считать, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$. Пусть D_λ — диагональная матрица

$$D_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Тогда каждая орбита имеет вид

$$\mathcal{O}(D_\lambda) := \{UD_\lambda U^{-1} : U \in U(N)\}.$$

Например, если все λ_i одинаковы, то $\mathcal{O}(D_\lambda)$ — это одна точка (то есть, орбита состоит из одной скалярной матрицы). Если же все λ_i различны, то орбита $\mathcal{O}(D_\lambda)$ изоморфна фактору $U(N)$ по N -мерному тору.

Замечание 8.12. Можно понимать действие $U(N)$ на $H(N)$ как многомерный аналог действия $S^1 = U(1)$ на \mathbb{R}^2 поворотами.

8.4 Орбитальный интеграл

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ — фиксированный вектор (этот вектор рассматривается как вектор собственных значений эрмитовой матрицы). Отметим, что скалярное произведение в $H(N)$,

$$(A, B) = \text{Tr}(AB), \quad A, B \in H(N)$$

инвариантно относительно действия группы $U(N)$. Определим *орбитальный интеграл*

$$f_\lambda(A) = \int_{U \in U(N)} e^{i \text{Tr}(AUD_\lambda U^{-1})} dU,$$

где интегрирование ведется по (нормированной) мере Хаара на $U(N)$.

Замечание 8.13. Как уже было сказано, орбитальная мера получается из меры Хаара при факторизации. Таким образом, для функции G на $H(N)$ выражение $\int_{U \in U(N)} G(UD_\lambda U^{-1}) dU$ означает интегрирование G по орбитальной мере орбиты $\mathcal{O}(D_\lambda)$.

Легко заметить, что $f_\lambda(A)$ — инвариантная функция, поэтому матрицу A можно считать диагональной, $A = D_a$, где $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$. Будем писать $f_\lambda(D_a) = f_\lambda(a_1, \dots, a_N)$.

Утверждение, которое мы докажем, звучит следующим образом.

Предложение 8.14.

$$f_\lambda(a_1, \dots, a_N) = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{i^{N(N-1)/2}} \cdot \frac{\det [e^{ia_j \lambda_k}]_{j,k=1}^N}{V(\lambda)V(a)}, \quad (8.1)$$

где $V(\lambda)$ и $V(a)$ — определители Вандермонда.

Замечание 8.15. Если какие-то из λ_k или a_j совпадают, то значение (8.1) доопределяется по непрерывности.

Орбитальный интеграл можно определить как интеграл Лапласа

$$\int_{U \in U(N)} e^{\text{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU,$$

относя множитель i перед следом, например, к матрице D_a . Вообще говоря, мы будем доказывать, что для всех комплексных $\lambda \in \mathbb{C}^N$ и $a \in \mathbb{C}^N$ выполнено

$$\int_{U \in U(N)} e^{\text{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU = 0!1! \dots (N-1)! \frac{\det [e^{a_j \lambda_k}]_{j,k=1}^N}{V(\lambda)V(a)}. \quad (8.2)$$

Тождество (8.2) следует рассматривать как аналитическое продолжение тождества (8.1).

8.5 Доказательство тождества (8.2)

Пусть φ — симметрическая функция и A — матрица размера $N \times N$. Пусть собственные значения A есть a_1, \dots, a_N . Положим

$$\varphi(A) := \varphi(a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots).$$

Ясно, что $e^{\text{Tr} B} = e^{p_1(B)}$. Пользуясь задачей 8.2, можно записать

$$e^{p_1(B)} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} p_1^m(B) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{\mu: |\mu|=m} \dim \mu \cdot s_\mu(B).$$

В качестве B возьмем матрицу $B = D_a U D_\lambda U^{-1}$ и проинтегрируем вышесказанное выше соотношение по мере Хаара на $U(N)$. Положим

$$I := \int_{U \in U(N)} e^{\text{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU.$$

Имеем

$$I = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}, \ell(\mu) \leq N} \frac{\dim \mu}{|\mu|!} \int_{U \in U(N)} s_\mu(D_a U D_\lambda U^{-1}) dU. \quad (8.3)$$

Здесь накладывается условие $\ell(\mu) \leq N$, так как иначе функция Шура обнуляется.

Воспользуемся функциональным уравнением для неприводимых нормированных характеров компактной группы. В терминах ненормированных характеров оно может быть записано следующим образом:

$$\int_G \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \frac{\chi(g_1) \chi(g_2)}{\chi(e)}.$$

Здесь $\chi(e)$ — размерность представления.

Применим это для подсчета интеграла из (8.3), так как функции Шура — это и есть характеры унитарной группы. При применении функционального уравнения для характеров придется потребовать, чтобы $|a_i| = |\lambda_i| = 1$, $i = 1, \dots, N$ (чтобы $D_a, D_\lambda \in U(N)$). На самом деле, от этого условия можно отказаться, используя аналитическое продолжение.

Таким образом,

$$I = \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \frac{\dim \mu}{\text{Dim}_N \mu} \frac{s_\mu(a) s_\mu(\lambda)}{|\mu|!}.$$

Теперь используем явные формулы для $\dim \mu$ и $\text{Dim}_N \mu$ (формулу крюков для $\dim \mu$ и ее аналог для $\text{Dim}_N \mu$, см. лекцию 3):

$$\frac{\dim \mu}{|\mu|!} = \prod_{\square \in \mu} \frac{1}{h(\square)}, \quad \text{Dim}_N \mu = \frac{(N)_\mu}{\prod_{\square \in \mu} h(\square)},$$

где

$$\begin{aligned} (N)_\mu &= \prod_{\square \in \mu} (N + c(\mu)) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} (N - i + 1) \dots (N - i + \mu_i) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{m_i!}{(N - i)!} \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{m_i!}{(N - i)!}. \end{aligned}$$

— аналог символа Похгаммера. Здесь $m_i = \mu_i + N - i$, а в последнем переходе мы написали произведение до N , так как лишние множители равны единице.

Значит, наш орбитальный интеграл можно записать как

$$I = 0!1! \dots (N-1)! \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} \frac{s_\mu(a) s_\mu(\lambda)}{m_1! \dots m_N!}.$$

Теперь применим явную формулу для функций Шура:

$$I = 0!1! \dots (N-1)! \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} \frac{\det [a_j^{m_i}] \det [\lambda_k^{m_i}]}{V(\lambda) V(a) m_1! \dots m_N!}.$$

В этой формуле:

- Выражение $\det [a_j^{m_i}] \det [\lambda_k^{m_i}]$ симметрично по m_1, \dots, m_N , так как каждый из определителей кососимметричен.

- Если какие-то два из m_i совпадают, то соответствующий определитель обнуляется.

Поэтому суммирование по $m_1 > \dots > m_N \geq 0$ можно заменить на суммирование по всем $m_1, \dots, m_N \geq 0$, при этом следует поставить дополнительный множитель $\frac{1}{N!}$. Таким образом,

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 0} \frac{1}{N!} \frac{\det [a_j^{m_i}] \det [\lambda_k^{m_i}]}{m_1! \dots m_N!}.$$

Здесь уже можно раскрыть определители:

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 0} \frac{1}{N!} \times \\ \times \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(N)} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \frac{(a_{\sigma(1)}\lambda_{\tau(1)})^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(a_{\sigma(N)}\lambda_{\tau(N)})^{m_N}}{m_N!}.$$

Каждое слагаемое в сумме по $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(N)$ зависит только от $\sigma\tau^{-1}$. Поэтому можно переписать это следующим образом ($\frac{1}{N!}$ пропадет):

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 0} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{(a_1\lambda_{\tau(1)})^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(a_N\lambda_{\tau(N)})^{m_N}}{m_N!}.$$

Меняя порядок суммирования, убеждаемся, что тождество (8.2) выполнено:

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \det [e^{\lambda_j a_k}]_{j,k=1}^N.$$

Следствие 8.16. *Дополнительно получено разложение орбитального интеграла по функциям Шура:*

$$\int_{U \in U(N)} e^{\operatorname{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU = 0!1! \dots (N-1)! \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \frac{s_\mu(a)s_\mu(\lambda)}{m_1! \dots m_N!}.$$

8.6 Постановка задачи при $N = \infty$

Пространство $H(N)$ — это конечномерное вещественное евклидово пространство, оно двойственно само себе. При $N = \infty$ возникает два пространства, двойственных друг другу.

- Обозначим через $H(\infty)$ индуктивный предел $H(N)$, то есть, множество матриц размера $\infty \times \infty$, которые являются эрмитовыми и финитными (то есть, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля).
- Через H обозначим проективный предел $H(N)$. Это множество вообще всех эрмитовых матриц размера $\infty \times \infty$.

Пространства $H(\infty)$ и H двойственны друг другу,

$$H(\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$$

— это скалярное произведение (легко видеть, что у произведения матрицы из $H(\infty)$ и матрицы из H всегда есть конечный след).

Обозначим $K := U(\infty)$ — индуктивный предел унитарных групп $U(N)$. Эта группа состоит из финитных унитарных матриц размера $\infty \times \infty$, которые лишь в конечном числе элементов отличаются от единичной матрицы. Группа K действует на $H(\infty)$ и на H сопряжениями (легко видеть, что это имеет смысл).

Наша цель — получить описание множества инвариантных мер — $\mathfrak{M}(H)^K$. В этом случае, так как группа не компактна, они уже не будут орбитальными (ср. с поворотом окружности на иррациональный угол). Для меры $M \in \mathfrak{M}(H)^K$ можно определить орбитальный интеграл

$$f_M(A) = \int_H e^{i \text{Tr}(AB)} M(dB), \quad A \in H(\infty).$$

Существует взаимно-однозначное соответствие между \mathfrak{S}^K и $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$ — множеством непрерывных инвариантных функций, которые положительно определены и нормированы в нуле. Непрерывность здесь означает непрерывность ограничения на любую конечномерную подгруппу $U(N)$.

8.7 Упражнения

Упражнение 8.1. Пусть группа G счетна. Покажите, что мера $M \in \mathfrak{M}(X)^G$ является эргодической (см. определение 8.3), тогда и только тогда, когда нет борелевских подмножеств $Y \subseteq X$, которые инвариантны (то есть, $gX = X$ для всех $g \in G$) и имеют промежуточную меру, отличную от 0 или 1.

Другими словами, в определении эргодических мер относительно действия счетной группы условие mod 0 можно опустить.

Упражнение 8.2. Докажите (например, пользуясь явным определением функций Шура через отношение двух детерминантов) тождество

$$p_1^m = \sum_{\mu: |\mu|=n} \dim \mu \cdot s_\mu, \quad m = 1, 2, \dots$$

9 Сжатие групп и алгебр Ли

9.1 Напоминание

Напомним, что в предыдущей лекции рассматривалась задача описания эргодических мер на $H(N)$ относительно действия $U(N)$ (унитарная группа действует сопряжениями). Все эргодические меры являются орбитальными,

и было вычислено их преобразование Фурье, которое дается орбитальным интегралом.

В бесконечномерной ситуации пространство $H(N)$ следует заменить на пару двойственных пространств — H и $H(\infty)$, где H — это пространство всех эрмитовых матриц, а $H(\infty)$ — пространство финитных эрмитовых матриц. При этом существует спаривание между H и $H(\infty)$: $(A, B) = \text{Tr}(AB)$, $A \in H$, $B \in H(\infty)$. Отметим, что H и $H(\infty)$ наделяются евклидовой топологией.⁴⁰

Нас интересует множество мер $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$ на H , инвариантных относительно действия $U(\infty)$ (напомним, что $U(\infty)$ — это группа финитных унитарных матриц, которые лишь в конечном числе мест отличаются от единичной). Крайние точки $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$ — это и есть эргодические меры. В бесконечномерном случае эргодические меры уже не будут орбитальными.

Преобразование Фурье дает взаимно-однозначное соответствие (по теореме Бохнера) между множеством мер $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$ и множеством некоторых функций на двойственном пространстве. Другими словами, пусть $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$ — множество функций на $H(\infty)$, которые являются

- непрерывными,
- положительно определенными (определение 8.9),
- нормированными: $f(0) = 1$.

Тогда теорема Бохнера (теорема 8.8) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$ и $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$. Это соответствие осуществляется с помощью преобразования Фурье. Крайние точки выпуклого множества $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$ будем иногда называть неразложимыми функциями. Они отвечают эргодическим мерам.

Для конечных N было получено явное описание крайних точек множества инвариантных мер $\mathfrak{M}(H(N))^{U(N)}$ в терминах неразложимых функций $f \in \mathcal{F}(H(N))^{U(N)}$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, и рассмотрим преобразование Фурье орбитальной меры на $H(N)$ (то есть, эргодической меры):

$$f_\lambda(a_1, \dots, a_N) = \int_{U(N)} \exp(i \text{Tr}(AUBU^{-1})) dU.$$

Здесь $A \in H(N)$, a_i — собственные значения A , а $B \in H(N)$ имеет собственные значения λ_i . Данный интеграл был вычислен в предыдущей лекции, и он равен

$$f_\lambda(a) = \frac{0! \dots (N-1)!}{i^{N(N-1)/2}} \cdot \frac{\det [e^{i\lambda_k a_j}]_{k,j=1}^N}{V(\lambda)V(a)}, \quad (9.1)$$

где $V(\cdot)$ — определитель Вандермонда.

⁴⁰По сути, H можно отождествить с \mathbb{R}^∞ .

9.2 Пределный переход от функций Шура

Отметим сходство функций f_λ (9.1) с функциями Шура, которые являются характерами группы $U(N)$. Пусть $\tilde{\lambda} \in \text{Sign}(N)$ — сигнатура длины N , и рассмотрим нормированный характер $\chi_{\tilde{\lambda}}$ группы $U(N)$. Будем рассматривать $\chi_{\tilde{\lambda}}$ как функцию на торе, тогда⁴¹

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{\lambda}}(u_1, \dots, u_N) &= \frac{s_{\tilde{\lambda}}(u_1, \dots, u_N)}{s_{\tilde{\lambda}}(1, \dots, 1)} = \frac{s_{\tilde{\lambda}}(u_1, \dots, u_N)}{\text{Dim}_N \tilde{\lambda}} = \\ &= \frac{0!1! \dots (N-1)!}{\prod_{1 \leq k < l \leq N} (\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_l + l - k)} \cdot \frac{\det[u_j^{\tilde{\lambda}_k + N - k}]_{j,k=1}^N}{V(u)}. \end{aligned}$$

Здесь $\text{Dim}_N \tilde{\lambda}$, как обычно, размерность неприводимого представления, отвечающего сигнатуре $\tilde{\lambda}$. Покажем, как функция f_λ (9.1) получается путем предельного перехода из функций Шура.

Предложение 9.1. *Фиксируем $a, \lambda \in \mathbb{R}^N$, положим*

$$\tilde{\lambda} = \lambda(\varepsilon) := [\varepsilon^{-1}\lambda], \quad u_j = u_j(\varepsilon) := e^{i\varepsilon a_j}.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{\lambda(\varepsilon)}(u(\varepsilon)) = f_\lambda(a).$$

Доказательство. Для простоты предположим, что все a_j , а также все λ_k различны. Ясно, что

$$u_j^{\tilde{\lambda}_k + N - k} = \exp(\varepsilon i a_j \cdot \varepsilon^{-1} \lambda_k + \dots) \rightarrow e^{i \lambda_k a_j},$$

и

$$\prod_{1 \leq k < l \leq N} (\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_l + l - k) \sim \varepsilon^{-N(N-1)/2} V(\lambda).$$

Так как

$$u_j(\varepsilon) - u_k(\varepsilon) \sim i\varepsilon(a_j - a_k),$$

то

$$V(u(\varepsilon)) \varepsilon^{-N(N-1)/2} \rightarrow i^{N(N-1)/2} V(a),$$

что и доказывает предложение. \square

9.3 Симметрические пары и \mathbb{Z}_2 -градуированные алгебры Ли

Предложение 9.1 связано с идеей сжатия групп и алгебр Ли. Опишем эту идею. Сначала дадим необходимые определения, касающиеся групп и алгебр Ли.

⁴¹Здесь $s_{\tilde{\lambda}}$ — лорановский многочлен Шура, см., например, [Оль09, Лекция 1].

Пусть G — группа Ли, и $\theta \in \text{Aut}(G)$, $\theta^2 = \text{Id}$ — инволютивный автоморфизм G . Пусть $K \subset G$ — множество неподвижных точек относительно θ . Будем также обозначать K через G^θ . Ясно, что это подгруппа.

Пример 9.2. Если $G = U(N)$ и $\theta: g \mapsto \bar{g}$ — обычное комплексное сопряжение, то $K = O(N)$.

Пример 9.3. С нашей ситуацией связан следующий пример. Пусть $G = U(N) \times U(N)$, и

$$\theta: (g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1).$$

Тогда $K \subset G$ — диагональная подгруппа, обозначаемая $K = \text{diag } U(N)$.

Будем давать некоторые замечания для тех, кто знаком с понятием симметрического пространства.⁴²

Замечание 9.4. Если группа G компактна, то $G/K = G/G^\theta$ — компактное симметрическое пространство.

Пусть $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ — алгебра Ли группы G . Дифференциал отображения θ в единице группы G будем также обозначать через θ . Это инволютивный автоморфизм алгебры \mathfrak{g} . Возникает разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

где (в силу инволютивности θ)

$$\mathfrak{g}_0 := \{X \in \mathfrak{g}: \theta(X) = X\},$$

$$\mathfrak{g}_1 := \{X \in \mathfrak{g}: \theta(X) = -X\}.$$

Элементы \mathfrak{g}_0 можно называть четными, а элементы \mathfrak{g}_1 — нечетными. В примере 9.3 имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(N) \oplus \mathfrak{u}(N)$, и \mathfrak{g}_0 состоит из матриц вида $A \oplus A$, а \mathfrak{g}_1 — из матриц вида $B \oplus (-B)$.

Замечание 9.5. На самом деле, можно сказать, что $\mathfrak{g}_1 = T_*(G/K)$ — касательное пространство к однородному пространству G/K в любой точке. G/K — симметрическое пространство, в любой точке возникает инволютивное отображение, которое локально является симметрией.

Пару (\mathfrak{g}, θ) также называют симметрической парой, и симметрические пары — это то же самое, что \mathbb{Z}_2 -градуированные алгебры Ли, то есть, алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, где \mathfrak{g}_0 — подалгебра, то есть,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0, \tag{9.2}$$

а \mathfrak{g}_1 — это \mathfrak{g}_0 -модуль, то есть,

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_1, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_0. \tag{9.3}$$

В \mathbb{Z}_2 -градуированной алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ автоморфизм θ определяется как умножение на (-1) в \mathfrak{g}_1 .

⁴²Один из простейших примеров симметрических пространств — сфера.

9.4 Сжатие групп и алгебр Ли

С \mathbb{Z}_2 -градуированными алгебрами Ли можно проводить процедуру сжатия, которая приводит (в пределе) к новым объектам. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ — \mathbb{Z}_2 -градуированная алгебра Ли. Обозначим через $\mathring{\mathfrak{g}}$ полупрямую сумму:

$$\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] := \{0\}.$$

Другими словами, мы насильно обнулили коммутаторы элементов \mathfrak{g}_1 друг с другом, а все остальные коммутаторы оставили теми же. При этом \mathfrak{g}_1 является \mathfrak{g}_0 -модулем. Будем обозначать данную ситуацию через

$$\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1.$$

Введем группу Ли $\mathring{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$, где K — подгруппа в G (ситуация здесь та же, что в предыдущем подразделе, то есть, $K = G^\theta$), и $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1$ — алгебра Ли, которая рассматривается как аддитивная группа. Разложение $\mathring{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$ называется разложением Картана и описывает локально структуру группы G , о чем будет сказано ниже.

Будем обозначать элементы $\mathring{g} \in \mathring{G}$ через $\mathring{g} = (v, U)$, где $v \in \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1$ и $U \in K$. Произведение двух таких элементов вычисляется следующим образом:

$$(v_1, U_1) \cdot (v_2, U_2) = (v_1 + \text{Ad } U_1 \cdot v_2, U_1 U_2).$$

Это можно объяснить следующим образом: $U \cdot v = UvU^{-1} \cdot U = \text{Ad } U \cdot v \cdot U$.

Возникновение группы \mathring{G} можно объяснить с помощью сжатия группы G . Более подробно это будет объяснено ниже, а сейчас рассмотрим, что происходит в ситуации примера 9.3.

Пример 9.6. В нашей ситуации (пример 9.3) действия группы $U(N)$ на $H(N)$ сопряжениями удобно считать, что \mathfrak{g}_0 состоит из антиэрмитовых матриц, а \mathfrak{g}_1 — из эрмитовых матриц. Локально $G = U(N) \times U(N)$ можно представить как

$$U(N) \times U(N) = \left\{ (e^{iA/2}, e^{-iA/2}) \right\} \cdot \text{diag } U(N),$$

где $\text{diag } U(N) = K = G^\theta$ и можно считать, что группа матриц $\{(e^{iA/2}, e^{-iA/2})\}$ есть $\exp \mathfrak{g}_1$.

Таким образом, локально $G = \exp \mathfrak{p} \cdot K$. В пределе, когда «кривой» случай вырождается в «плоский», группа G вырождается в $\mathring{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$, а соответствующая алгебра Ли \mathfrak{g} — в $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$.

Опишем процедуру сжатия алгебры Ли \mathfrak{g} более детально. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Пусть $\{X_i\}$ — базис \mathfrak{g}_0 , а $\{Y_\alpha\}$ — базис \mathfrak{g}_1 . Рассмотрим структурные

константы

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \sum_k A_{ij}^k X_k, \\ [X_i, Y_\alpha] &= \sum_\beta B_{i\alpha}^\beta Y_\beta, \\ [Y_\alpha, Y_\beta] &= \sum_i C_{\alpha\beta}^i X_i \end{aligned}$$

(ср. с (9.2)–(9.3)). Теперь рассмотрим деформацию с параметром ε , при которой \mathfrak{g}_1 «сжимается»:

$$\tilde{Y}_\alpha = \varepsilon Y_\alpha.$$

Для всех $\varepsilon > 0$ деформированная алгебра изоморфна исходной. Структурные константы A_{ij}^k и $B_{i\alpha}^\beta$ в деформированной алгебре не изменятся, а $C_{\alpha\beta}^i$ умножатся на ε :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}^i = \varepsilon C_{\alpha\beta}^i.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ константы $\tilde{C}_{\alpha\beta}^i$ стремятся к нулю, и деформация в пределе приводит к новому объекту, а именно, к полупрямой сумме $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}_1$.

Пример 9.7. Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий идею сжатия. Рассмотрим группу $SO(3)$, которая действует на сфере S^2 . Локально каждый поворот — элемент $SO(3)$ — можно представить как композицию поворота вокруг некоторой оси (это элемент $SO(2)$) и малого параллельного переноса в касательной плоскости к S^2 в точке, которая лежит на оси поворота. Таким образом, локально $SO(3) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$. При этом $SO(2)$ действует на \mathbb{R}^2 поворотами.

9.5 Сжатие и орбитальные меры

На самом деле, при сжатии неприводимые нормированные характеры (или, иначе, сферические представления [Оль09, Лекция 11]) в пределе дают другой объект, который близок к эргодическим мерам. Опишем представленный смысл орбитальных мер в конечномерном случае.

Напомним, что у нас группа $K = U(N)$ действует на $H(N)$ сопряжениями. Пространство $H(N) = \mathfrak{p}$ будем мыслить как вещественное евклидово пространство с ортогональным действием группы K (то есть, таким действием, которое сохраняет скалярное произведение в \mathfrak{p}). С другой стороны, можно брать сопряженное пространство \mathfrak{p}^* и спаривание \mathfrak{p} с \mathfrak{p}^* вместо скалярного произведения в \mathfrak{p} . В конечномерном случае эти два подхода эквивалентны. Мы будем рассматривать \mathfrak{p} и \mathfrak{p}^* , так как это будет удобнее интерпретировать в бесконечномерном случае.

Рассмотрим группу $\mathring{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$. Нас интересуют инвариантные вероятностные меры $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$, и, главным образом, эргодические вероятностные меры, то есть, крайние точки $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$. С точки зрения теории представлений нас интересуют циклические сферические унитарные представления группы \mathring{G} . Дадим четкое определение, данного понятия.

Определение 9.8. Пусть \mathcal{H} — комплексное гильбертово пространство. Пусть $T: \mathring{G} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ — унитарное представление (здесь $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ обозначает унитарную группу пространства \mathcal{H}). Пусть ξ — сферический вектор с $\|\xi\| = 1$, то есть, такой вектор, который инвариантен относительно действия подгруппы $K \subset \mathring{G}$.⁴³ Пусть вектор ξ является циклическим, то есть, замыкание линейной оболочки векторов вида $T(\mathring{g})\xi$, где $\mathring{g} \in \mathring{G}$, совпадает с \mathcal{H} . Говорим, что (T, ξ) — циклическое сферическое унитарное представление группы \mathring{G} .

Предложение 9.9. Существует взаимно-однозначное соответствие между циклическими сферическими унитарными представлениями (T, ξ) группы \mathring{G} и инвариантными мерами $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$. При этом неприводимым представлениям соответствуют эргодические меры.⁴⁴

Доказательство. Второе утверждение об эргодических мерах очевидно, займемся доказательством первого утверждения.

1. Покажем, как по инвариантной мере строится соответствующее представление. Пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$ и пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{p}^*, M)$. Для $U \in K$, $\varphi \in \mathcal{H}$ и $B \in \mathfrak{p}^*$ представление определим как

$$(T(U)\varphi)(B) = \varphi(U^{-1}B).$$

Для $A \in \mathfrak{p}$ определим

$$(T(A)\varphi)(B) = e^{i(A,B)}\varphi(B),$$

где (\cdot, \cdot) — спаривание между \mathfrak{p} и \mathfrak{p}^* . То, что это представление, следует из того, что

$$T(U)T(A)T(U)^{-1} = T(U \cdot A).$$

В качестве сферического вектора ξ возьмем единичную функцию из $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{p}^*, M)$. Так как функции вида $\{e^{i(A,\cdot)}\}$ плотны в $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{p}^*, M)$, то вектор ξ является циклическим. Таким образом, (T, ξ) — искомое представление.

Рассмотрим сферическую функцию представления (T, ξ) :

$$\psi(\mathring{g}) = (T(\mathring{g})\xi, \xi), \quad \mathring{g} \in \mathring{G}.$$

Легко видеть, что функция ψ является бинвариантной относительно K . Поэтому можно считать, что на самом деле $\mathring{g} \in \mathfrak{p}^*$. Рассмотрим также преобразование Фурье меры M :

$$f_M(A) = \int_{\mathfrak{p}^*} e^{i(A,B)} M(dB).$$

Легко понять, что $f_M(A) = \psi(A)$, $A \in \mathfrak{p}^*$.

⁴³Это обозначается $\xi \in \mathcal{H}^K$.

⁴⁴В нашем конечномерном случае эргодические меры — то же самое, что орбитальные.

2. Теперь по представлению (T, ξ) построим меру $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$.

У представления (T, ξ) рассмотрим сферическую функцию $\psi(\mathring{g})$, как выше. Это бинвариантная положительно определенная функция на \mathring{G} . Легко видеть, что существует взаимно-однозначное соответствие

$${}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K \leftrightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{p})^K, \quad (9.4)$$

где

- ${}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K$ — положительно определенные нормированные непрерывные функции на \mathring{G} , которые являются бинвариантными относительно K ,
- $\mathcal{F}(\mathfrak{p})^K$ — положительно определенные нормированные непрерывные функции на \mathfrak{p} , инвариантные относительно K .

Чтобы убедиться в биекции (9.4), необходимо лишь проверить положительную определенность. Пусть $f \in {}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K$, и для любых $\mathring{g}_i \in \mathring{G}$ в конечном числе матрица $[f(\mathring{g}_i^{-1} \mathring{g}_j)]$ положительно определена. Пусть $\mathring{g} = (A, U)$. Будем обозначать такие элементы через $A \circ U$, где \circ — произведение в \mathring{G} . Пусть $\mathring{g}_i = A_i \circ U_i$, и ясно, что $\mathring{g}_i^{-1} = U_i^{-1} \circ (-A_i)$. Тогда матрица $[f(\mathring{g}_i^{-1} \mathring{g}_j)]$ имеет вид

$$[f(u_i^{-1} \circ (-A_i) \circ A_j \circ U_j)],$$

но так как $f \in {}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K$, то U_i^{-1} и U_j можно выбросить. Поэтому положительная определенность матрицы $[f(\mathring{g}_i^{-1} \mathring{g}_j)]$ эквивалентна положительной определенности матрицы $[f(A_j - A_i)]$, то есть, биекция (9.4) установлена.

По теореме Бохнера, каждая $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{p})^K$ однозначно определяет вероятностную меру на \mathfrak{p}^* , которая является инвариантной относительно K . Это и будет мера M , построенная по представлению (T, ξ) . \square

9.6 Сжатие и эргодические меры

В нашем примере 9.3 $G = U(N) \times U(N)$, $K = \text{diag } U(N) \subset G$. В результате сжатия приходим к группе $\mathring{G} = K \ltimes H(N)$, где группа $K = U(N)$ действует на $H(N)$ сопряжениями. Неприводимые нормированные характеры $U(N)$ — это то же самое, что сферические экстремальные функции пары (G, K) [Оль09, Лекция 11]. При сжатии они переходят в характеристические функции мер $M \in \mathfrak{M}^K$, или, как показывает предложение 9.9, в экстремальные сферические функции пары (\mathring{G}, K) . Это можно изобразить следующим образом:

$$\text{Ex}(\mathcal{F}(G)^K) \xrightarrow{\text{сжатие}} \text{Ex}({}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K) = \text{Ex}(\mathcal{F}(H(N))^{U(N)}).$$

Последний объект $\text{Ex}(\mathcal{F}(H(N))^{U(N)})$ — это множество всех орбитальных (=эргодических) мер на $H(N)$. Наша конечная цель — описание эргодических мер в случае $N = \infty$, в котором эргодические меры уже не являются

орбитальными. В этом случае как раз помогает интерпретация на языке теории представлений.

Идея сжатия помогает понять, какого ответа следует ожидать в задаче описания $\text{Ex}(\mathcal{F}(H)^{U(\infty)})$, то есть, всех эргодических мер на множестве всех эрмитовых матриц H . Напомним, что в «кривой» ситуации, до сжатия, ответ нам уже известен (см. [Оль09]).

Итак, пусть $\mathfrak{p}^* = H$, тогда $\mathfrak{p} = H(\infty)$ — множество финитных эрмитовых матриц. Предложение 9.9 остается в силе, так как теорема Бохнера в этом случае также работает. Таким образом, существует биекция

$$\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)} \leftrightarrow \{(T, \xi)\},$$

где справа стоят циклические сферические унитарные представления $\overset{\circ}{G} = U(\infty) \times H(\infty)$. Отметим, что преобразование Фурье осуществляет биекцию

$$\mathcal{F}(H(\infty)) \leftrightarrow \mathfrak{M}(H).$$

Эргодические меры на H уже не будут орбитальными, но до их описания можно догадаться, если отождествить их с неприводимыми сферическими представлениями $\overset{\circ}{G}$ и использовать идею сжатия сферических представлений пары (G, K) . Последние представления были рассмотрены в первой части лекций [Оль09], они отвечают неразложимым нормированным характеристам группы $U(\infty)$ и задаются функциями Войкулеску. Пусть $w = (\alpha^+, \beta^+, \delta^+, \alpha^-, \beta^-, \delta^-)$ — параметры Войкулеску, тогда соответствующий экстремальный характер $U(\infty)$ записывается как

$$\chi_w(\text{diag}(u_1, u_2, \dots)) = \prod_{j=1}^{\infty} \Phi_w(u_j),$$

где Φ_w — функция Войкулеску

$$\Psi_w(u) = e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)}, \quad |u| = 1. \quad (9.5)$$

Здесь $\Phi_w(1) = 1$ и $\gamma^\pm = \delta^\pm - \sum_j (\alpha_j^\pm + \beta_j^\pm) \geq 0$.

Сжатие в терминах этих параметров выглядит как замена (см. также предложение 9.1⁴⁵):

$$\alpha_j^\pm \rightarrow \varepsilon^{-1} \alpha_j^\pm, \quad u_k \rightarrow e^{i\varepsilon a_k}.$$

Оказывается, что параметры β_j^\pm при сжатии не выживают. Таким образом, следует ожидать, что при сжатии из (9.5) получатся выражения вида

$$\prod \frac{1}{1 - ix_j^+ a} \prod \frac{1}{1 + ix_j^- a}, \quad (9.6)$$

где $u \sim e^{i\varepsilon a}$ и $\alpha_j^\pm \sim \varepsilon^{-1} x_j^\pm$. О том, как преобразуются параметры γ^\pm , будет сказано позже, когда мы получим строгий результат.

⁴⁵Напомним, что параметры α_j^\pm возникают как пределы нормированных длин строк сигнатур, которые в предложении 9.1 обозначаются через $\tilde{\lambda}$, см. [Оль09].

9.7 Связь с тотальной положительностью

Используя идею сжатия, мы сформулировали гипотезу, которая состоит в следующем. Если $M \in \text{Ex}(\mathfrak{M}(H)^\infty)$ — эргодическая мера, то ее характеристическая функция (а это функция на $H(\infty)$) имеет мультипликативный вид

$$f(a_1, a_2, \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} F(a_j),$$

где $F(\cdot)$ — функция на \mathbb{R} .⁴⁶ Идея о том, как может выглядеть функция F , дается формулой (9.6). Произведение здесь фактически конечно, так как a_1, a_2, \dots — собственные значения матрицы из $H(\infty)$, и лишь конечное их число отлично от нуля, и при этом $F(0) = 1$.

На самом деле, все функции вида (9.6) являются характеристическими функциями эргодических мер, но существуют и другие, вид которых более общий, чем (9.6). Таким образом, получаем семейство эргодических мер, которые зависят от бесконечного числа параметров.

Шёнберг в 1953 году классифицировал тотально положительные меры на прямой \mathbb{R} в терминах их характеристических функций. Его ответ совпадает с ответом в нашей задаче классификации мер $M \in \mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$. О тотальной положительности см. в первой части лекций, [Оль09, Лекции 6 и 7].

9.8 Мультипликативность характеристической функции эргодической меры

С помощью функционального уравнения для характеров покажем, что характеристическая функция $f_M(a_1, a_2, \dots)$ эргодической меры $M \in \mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$ является мультипликативной, то есть, представляется в виде $\prod_{j=1}^{\infty} F(a_j)$. В доказательстве мы не будем использовать (еще не полученный) явный вид функции F .

Пусть χ — неприводимый характер, $\tilde{\chi}(\cdot) = \frac{\chi(\cdot)}{\chi(e)}$ — нормированный характер. Тогда

$$\int_{h \in K} \tilde{\chi}(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \tilde{\chi}(g_1) \tilde{\chi}(g_2). \quad (9.7)$$

Это общий факт о характерах полупрямых произведений вида $\overset{\circ}{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$, где K — компактная группа (и интегрирование ведется по мере Хаара на K), а \mathfrak{p} — векторное пространство.

Для $f \in \text{Ex}(\mathcal{F}(\mathfrak{p})^K)$ (то есть, для характеристической функции эргодической меры) также выполняется функциональное уравнение, которое следует из (9.7):

$$\int_{U \in K} f(A_1 + U \circ A_2) dU = f(A_1) f(A_2). \quad (9.8)$$

⁴⁶ Удобно мыслить, что \mathbb{R} здесь — это касательное пространство к окружности, на которой задана функция Φ_w (9.5).

Здесь $U \circ A = UAU^{-1}$ — произведение в группе \mathring{G} . Из этого уравнения для f получается требуемая мультипликативность точно так же, как в [Оль09, Лекция 7].

Если K — компактная группа, а пространство \mathfrak{p} конечномерно, то f — преобразование Фурье орбитальной меры, и уравнение (9.8) можно получить очень просто. А именно, пусть $B \in \mathfrak{p}^*$ — метка орбиты, которая проходит через B , тогда для $A \in \mathfrak{p}$ имеем

$$f(A) = f_B(A) = \int_{U \in K} e^{i(A, U \circ B)} dU.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{U} \in K} f(A_1 + \tilde{U} \circ A_2) d\tilde{U} &= \int_{\tilde{U}} \int_U e^{i(A_1 + \tilde{U} \circ A_2, U \circ B)} d\tilde{U} dU \\ &= \int_{\tilde{U}} \int_U e^{i(A_1, U \circ B)} e^{i(A_2, \tilde{U}^{-1} U \circ B)} d\tilde{U} dU. \end{aligned}$$

Этот интеграл распадается на два интеграла — по U и по $\tilde{U}^{-1}U$. Ясно, что второй интеграл также ведется по мере Хаара на K . В результате интегрирования получаем $f(A_1)f(A_2)$, что и требовалось.

10 Тотальная положительность функций на прямой и эргодические меры

10.1 Напоминание: тотальная положительность и характеры $U(\infty)$

Напомним задачу о характерах бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$ и ее связь с тотальной положительностью. Более подробно см. [Оль09, Лекции 6 и 7]. Характеры χ группы $U(\infty)$ задаются на торе $\mathbb{T}(\infty)$, который состоит из элементов вида (u_1, u_2, \dots) , где $u_i \in \mathbb{C}, |u_i| = 1$ и лишь конечное число u_i отлично от единицы. Экстремальные нормированные характеры имеют мультипликативный вид $\chi(u_1, u_2, \dots) = \Phi(u_1)\Phi(u_2)\dots$, где функция Φ на \mathbb{T}^1 имеет вид (9.5). Функции Φ нормированы, $\Phi(1) = 1$.

Перейдем к двойственной картине. Пусть $\Phi = \widehat{M}$, где $M = \{M(n)\}$ — вероятностная мера на \mathbb{Z} . Возникает вопрос, что можно сказать про меру M ? Воспользуемся ограничением характера χ группы $U(\infty)$ на конечномерную подгруппу $U(N) \subset U(\infty)$ (здесь N — любое натуральное число). Тогда функция на $U(N)$,

$$U(N) \ni U \mapsto \Phi(u_1) \dots \Phi(u_N),$$

где u_1, \dots, u_N — собственные значения матрицы U , является непрерывной, нормированной (так как $\Phi(1) = 1$) и положительно определенной, так как ограничение χ на $U(N)$ является положительно определенной функцией.

В терминах меры M это означает,⁴⁷ что мера M тотально положительна, то есть, по определению, все миноры всех порядков матрицы

$$[K(x, y)]_{x, y \in \mathbb{Z}} = [M(x - y)]_{x, y \in \mathbb{Z}}$$

неотрицательны. Будем обозначать этот факт через $M \in TP$.

10.2 Тотальная положительность и сжатие. Формулировка основного утверждения

При сжатии, описанном в предыдущей лекции, группа $U(\infty)$ заменяется на пространство финитных эрмитовых матриц $H(\infty)$. Параметры Войкулеску α_j^\pm (см. (9.5)) стремятся к бесконечности, а собственные значения u_j , наоборот, приближаются к единице. В результате этого предельного перехода из $\Phi(\cdot)$ (9.5) получаются функции, связанные с мерами на множестве всех эрмитовых матриц H , которые эргодичны относительно действия группы $U(\infty)$ на H сопряжениями.

Более подробно, получается непрерывная функция $F(a)$ на \mathbb{R} (это касательное пространство к тору \mathbb{T}^1), такая, что для всех $N = 1, 2, \dots$ функция на $H(N)$

$$H(N) \ni A \mapsto F(a_1) \dots F(a_N), \quad (10.1)$$

где a_1, \dots, a_N — собственные значения матрицы A , является непрерывной, нормированной ($F(0) = 1$) и положительно определенной.

Определение 10.1. Будем говорить, что функция F на \mathbb{R} удовлетворяет условию (*), если для всех N функция (10.1) на $H(N)$ является унитарно инвариантной, непрерывной, нормированной и положительно определенной.

Замечание 10.2. На самом деле, условие (*) для F означает, что функция на $H(\infty)$,

$$H(\infty) \ni A \mapsto F(a_1)F(a_2) \dots,$$

где a_i — собственные значения матрицы A , является характеристической функцией эргодической меры на H . В следующей лекции мы займемся полным описанием таких функций. Сейчас рассмотрим связь этих функций с тотальной положительностью.

Пусть F — преобразование Фурье на \mathbb{R} от некоторой вероятностной меры M на \mathbb{R} . Основное утверждение, которое будет доказано в этой лекции, состоит в следующем:

F удовлетворяет условию (*) тогда и только тогда, когда мера M является тотально положительной мерой на \mathbb{R} .

⁴⁷На самом деле, для меры M достаточно ограничивать χ на $U(1) \subset U(\infty)$.

Условие тотальной положительности меры M на \mathbb{R} можно сформулировать следующим образом. Пусть у M для простоты есть плотность φ (относительно меры Лебега), то есть,

$$\varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = F(0) = 1$$

и $dM(b) = \varphi(b)db$.

По определению, мера M с плотностью φ тотально положительна тогда и только тогда, когда для любого набора $x_1 > \dots > x_N$ и $y_1 > \dots > y_N$ ($x_i, y_j \in \mathbb{R}$) выполнено

$$\det [K(x_i, y_j)]_{i,j=1}^N \geq 0,$$

где $K(x, y) = \varphi(x - y)$. Стационарное ядро $K(x, y)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ представляет собой непрерывный аналог теплицевой матрицы.

Напомним, что положительно определенные функции на $U(N)$ — это те, которые раскладываются по неприводимым характерам с неотрицательными коэффициентами. Для функции $\Phi(\cdot)$ на \mathbb{T} (преобразовании Фурье тотально положительной меры M на \mathbb{Z}) это означает, что для всех $N = 1, 2, \dots$ разложение $\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N)$ по функциям Шура $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$ (это и есть неприводимые характеры) происходит с неотрицательными коэффициентами. Для этих коэффициентов существует явная формула:

$$\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N) = \sum \det [M(\lambda_i - i + j)] s_\lambda(u_1, \dots, u_N). \quad (10.2)$$

Положительная определенность функции $\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N)$ гарантирует неотрицательность миноров $\det [M(\lambda_i - i + j)]$. Это не все миноры, но с помощью дополнительных соображений можно добиться неотрицательности всех миноров. Таким образом, функция Φ становится преобразованием Фурье тотально положительной вероятностной меры на \mathbb{Z} .

Теперь применим к (10.2) идею сжатия. Следует раскладывать не по функциям Шура, а по нормированным функциям Шура, то есть, по функциям вида $\frac{s_\lambda(u_1, \dots, u_N)}{\text{Dim}_N \lambda}$. Данные величины при сжатии имеют предел, а функция F (на \mathbb{R}) получается предельным переходом из Φ . Поэтому для произведения вида $F(a_1) \dots F(a_N)$ возможно написать разложение типа (10.2) и получить какие-то условия на меру M на \mathbb{R} . Здесь считаем, что F — преобразование Фурье меры M на \mathbb{R} . Разложение для $F(a_1) \dots F(a_N)$ — это на самом деле разложение по орбитам, так как неприводимые характеры при сжатии переходят в эргодические меры, а в конечномерном случае эргодические меры являются орбитальными.

10.3 Условие (*) и тотальная положительность

Как и в случае с мерами на \mathbb{Z} , из условия положительной определенности $F(a_1) \dots F(a_N)$ для всех N сначала извлекается не условие тотальной

положительности меры M на \mathbb{R} ,⁴⁸ а некоторое эквивалентное ему условие. Это было сделано в работе [Pic91]. В данном подразделе приведем формулировку и доказательство этого результата.

Теорема 10.3. Пусть F — преобразование Фурье вероятностной меры M на \mathbb{R} , пусть мера M имеет плотность φ относительно меры Лебега и пусть φ — бесконечно гладкая функция.⁴⁹

Функция F удовлетворяет условию (*) тогда и только тогда, когда для всех $x_1 > \dots > x_N$ ($x_i \in \mathbb{R}$) выполнено

$$\det[\varphi^{(j-1)}(x_k)]_{j,k=1}^N \geq 0. \quad (10.3)$$

Условие (10.3) уже влечет тотальную положительность меры M на \mathbb{R} , как описано в теореме 2.3 в книге [Kar68]. Мы не будем приводить доказательство этого факта. Перейдем к доказательству теоремы 10.3.

Доказательство. Будем доказывать эквивалентность в теореме путем переформулировки одного условия в другое.

Фиксируем $N = 1, 2, \dots$. Обозначим функцию на $H(N)$,

$$H(N) \ni A \mapsto F(a_1) \dots F(a_N),$$

где a_i — собственные значения матрицы A , через $F^{\circ N}(A)$. Если выполнено условие (*), то обратное преобразование Фурье функции $F^{\circ N}$ неотрицательно, что означает, что спаривание этого обратного преобразования Фурье с любой неотрицательной функцией из пространства Шварца также неотрицательно.

Пусть $\psi(B)$ — произвольная неотрицательная функция на $H(N)$, которая быстро убывает на бесконечности. Условие (*) равносильно тому, что

$$\int_{H(N)} F^{\circ N}(A) \overline{\hat{\psi}(A)} dA \geq 0,$$

где dA — мера Лебега на $H(N)$. Перепишем данный многомерный интеграл в одномерный. Функция $F^{\circ N}(A)$ зависит только от собственных значений A , поэтому является унитарно инвариантной. Функцию $\overline{\hat{\psi}(A)}$ можно усреднить по действию группы $U(N)$, так что ее также можно считать унитарно инвариантной. Интеграл от унитарно инвариантной функции по $H(N)$ можно свести к N -кратному интегралу по мере Лебега с помощью следующей леммы.

Лемма 10.4. Пусть G — унитарно инвариантная функция на $H(N)$, то есть, для всех $U \in U(N)$ выполнено $G(UAU^{-1}) = G(A)$. Тогда

$$\int_{H(N)} G(A) dA = \text{Const} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} V(a_1, \dots, a_N)^2 G(a_1, \dots, a_N) da_1 \dots da_N.$$

Здесь $G(a_1, \dots, a_N)$ — функция от диагональной матрицы $\text{diag}(a_1, \dots, a_N)$.

⁴⁸Здесь и далее F — преобразование Фурье меры M .

⁴⁹На самом деле, условие наличия плотности и ее бесконечная гладкость — это не очень обременительные условия.

Данная лемма будет доказана позже. Эта лемма обобщает известный способ перехода к полярным координатам: $dx dy = r dr \cdot d\tau$, где r — радиус, а τ — угловая координата. Условие унитарной инвариантности здесь надо заменить на условие инвариантности относительно поворотов плоскости.

Таким образом, с помощью леммы 10.4 можно записать

$$\begin{aligned} \int_{H(N)} F^{\circ N}(A) \overline{\hat{\psi}(A)} dA &= \\ &= \text{Const} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1) \dots F(a_N) V(a_1, \dots, a_N) \times \\ &\quad \times \overline{V(a_1, \dots, a_N) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N)} da_1 \dots da_N. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Сначала посчитаем обратное преобразование Фурье от функции

$$F(a_1) \dots F(a_N) V(a_1, \dots, a_N).$$

Каково обратное преобразование Фурье функции F — известно, это функция $\varphi(b)$. Отметим, что умножение на переменную a при обратном преобразовании Фурье переходит в применение оператора дифференцирования $i \frac{\partial}{\partial a}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Фурье}^{-1}(F(\cdot) \dots F(\cdot) V(\cdot, \dots, \cdot)) &= \\ &= i^{N(N-1)/2} V\left(\frac{\partial}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial b_N}\right) \varphi(b_1) \dots \varphi(b_N) = \\ &= i^{N(N-1)/2} \det[\varphi^{(N-j)}(b_k)]_{j,k=1}^N = \\ &= (-i)^{N(N-1)/2} \det[\varphi^{(j-1)}(b_k)]_{j,k=1}^N. \end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_N) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N) &= \\ &= V(a_1, \dots, a_N) \int_{H(N)} e^{i \text{Tr}(AB)} \psi(B) dB = \\ &= V(a_1, \dots, a_N) \cdot \frac{0! \dots (N-1)!}{i^{N(N-1)/2}} \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\det[e^{i a_j b_k}]_{k,j=1}^N}{V(a) V(b)} V(b_1, \dots, b_N)^2 db_1 \dots db_N. \end{aligned}$$

В последнем переходе использовалась унитарная инвариантность функции $\psi(B)$. Интеграл по $H(N)$ распадается на интеграл по \mathbb{R}^N и интеграл по $U(N)$. При этом возникает множитель $V(b_1, \dots, b_N)^2$. Полученный интеграл

по $U(N)$ является орбитальным интегралом, и его мы уже считали в лекции 8. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_N) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N) &= \\ &= \text{Const} (-i)^{N(N-1)/2} \text{Фурье}_{\mathbb{R}^N} (V(b) \psi(b_1, \dots, b_N)). \end{aligned}$$

В итоге (10.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1) \dots F(a_N) V(a) \overline{V(a) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N)} da_1 \dots da_N &= \\ &= \text{Const} \int_{\mathbb{R}^N} \det[\varphi^{(j-1)}(b_k)]_{j,k=1}^N \cdot V(b) \psi(b_1, \dots, b_N) db. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Здесь Const — положительная константа. Так как функция ψ унитарно инвариантна, она симметрична по b_1, \dots, b_N . Видно, что и весь интеграл симметричен по b_1, \dots, b_N . Таким образом, его можно свести к интегрированию по области $b_1 > \dots > b_N$. В этой области $V(b) > 0$. Условие (*) равносильно тому, что интеграл по этой области неотрицателен для всех ψ . Поэтому условие (*) равносильно условию (10.3), что и доказывает теорему. \square

О том, как из теоремы 10.3 получить тотальную положительность, описано в [Kar68, теорема 2.3].

10.4 Лемма о радиальной части

Здесь мы приведем доказательство леммы 10.4. Вариант данной леммы для унитарной группы лежит в основе доказательства ортогональности характеров

$$\chi_\lambda(U) = \frac{\det[u_k^{\lambda_j + N - j}]}{V(u_1, \dots, u_N)}, \quad U \in U(N).$$

при разных λ по мере Хаара на $U(N)$. Здесь u_j — собственные значения $U \in U(N)$. Отметим, что утверждение о том, что радиальная часть меры Хаара на унитарной группе имеет плотность $|V(u_1, \dots, u_N)|^2$, принадлежит Г. Вейлю. Если знать, что плотность имеет такой вид, то скалярное произведение двух характеров χ_λ и χ_μ записывается в виде

$$(\chi_\lambda, \chi_\mu) = \int \chi_\lambda \bar{\chi}_\mu dU = \int_{\mathbb{T}^N} \det[u_k^{\lambda_j + N - j}] \cdot \overline{\det[u_k^{\mu_j + N - j}]} \cdot du_1 \dots du_N.$$

Если $\lambda \neq \mu$, то данный интеграл равен нулю в силу ортогональности мономов на \mathbb{T} .

Лемма 10.4 является евклидовым аналогом утверждения Г. Вейля и доказывается несколько проще. Отметим также, что оба утверждения — и лемма 10.4, и ее аналог для $U(N)$ — лежат в основе теории случайных матриц.

Перейдем к доказательству леммы 10.4.

Есть пространство $H(N)$, на нем действует группа преобразований $U(N)$,

$$A \mapsto UAU^{-1}, \quad U \in U(N).$$

Типичная матрица $A \in H(N)$ может быть записана в виде

$$A = UD_aU^{-1}, \quad D_a = \text{diag}(a_1, \dots, a_N).$$

Таким образом, для типичной матрицы можно ввести координаты

$$A \leftrightarrow (a, U), \quad a \in \mathbb{R}^N, \quad U \in U(N).$$

Это не биекция, и на самом деле для всех матриц A следует писать

$$A \leftrightarrow (a, U/T),$$

где T — тор, стабилизатор a . Обозначим $\dot{U} = U \bmod T$. Задача состоит в нахождении плотности, или якобиана, в следующем выражении

$$dA = (?) \cdot da d\dot{U}.$$

Так как евклидова мера Лебега на $H(N)$ инвариантна под действием $U(N)$, то искомая плотность не может зависеть от U .

Пусть $U = 1 + X$ с точностью до малых более высокого порядка, где X — антиэрмитова матрица. Можно считать, что в X на диагонали стоят нули. Тогда $U^{-1} = 1 - X$, и теперь необходимо вычислить $(1 + X)D_a(1 - X)$. Пусть A — диагональная матрица, а dA — ее малое приращение. Тогда в малых параметрах запишем

$$(1 + dX)(A + dA)(1 - dX) = dA + dX \cdot A - A \cdot dX + \dots,$$

где точками обозначены малые более высокого порядка.

Пусть $X = (X_{jk})$, и dX_{jk} — малый внедиагональный элемент матрицы. Так как X — антиэрмитова матрица, то имеет смысл рассматривать dX_{jk} лишь над диагональю. На jk -м месте в матрице $dX \cdot A - A \cdot dX$ стоит

$$dX_{jk}a_k - a_jdX_{jk} = (a_k - a_j)dX_{jk}.$$

Так как X_{jk} — комплексные переменные, то в смысле меры Лебега данное рассуждение показывает, что искомая плотность (якобиан) равна

$$V(a_1, \dots, a_N)^2 = \prod_{k < j} (a_k - a_j)^2.$$

Таким образом, лемма 10.4 установлена.

Доказательство аналогичного утверждения о радиальной части меры Хаара на унитарной группе можно провести почти так же (однако, возникнут некоторые осложнения, связанные с тем, что пространство будет «кривым»).

10.5 Тотальная положительность и теория вероятностей

Опишем, как связана тотальная положительность с теорией вероятностей. Открытие этой связи принадлежит Карлину и МакГрегору.

Пусть задан диффузионный процесс на \mathbb{R} , то есть, марковский процесс с непрерывным временем, траектории которого непрерывны.⁵⁰ Пусть переходная функция этого процесса $p(t, x, y)$. Говоря неформально, $p(t, x, y)dy$ — это вероятность события, состоящего в том, что процесс, выйдя из точки x , через время t окажется в малой окрестности $[y, y + dy]$ точки y .

Пусть заданы N одинаковых диффузионных процессов с переходной функцией $p(t, x, y)$. Пусть заданы точки $x_1 > \dots > x_N$ и $y_1 > \dots > y_N$. Мы рассматриваем N одинаковых независимых процессов, которые выходят из точек x_1, \dots, x_N . Ясно, что плотность вероятности события, состоящего в том, что для каждого $i = 1, \dots, N$ процесс, вышедший из x_i , через время t попадет в y_i , равна

$$\prod_{i=1}^N p(t, x_i, y_i).$$

Наложим дополнительное условие, состоящее в том, что траектории процессов, идущих из x_i в y_i ($i = 1, \dots, N$) не пересекаются. Вероятность указанного события с условием непересечения равна

$$\det[p(t, x_i, y_j)]_{i,j=1}^N.$$

Это может быть доказано с использованием идеи инволюции, см. [Оль09, Лемма 6.8].

Вероятность любого события неотрицательна, поэтому для всех x_i и y_i имеем $\det[p(t, x_i, y_j)]_{i,j=1}^N \geq 0$. Это значит, что для каждого фиксированного t ядро $p(t, x, y)$ является тотально положительным. Тотально положительных ядер двух переменных слишком много, но если $p(t, x, y) = p(t, x - y)$, то уже можно пытаться классифицировать возможные марковские процессы.

У данной идеи есть дискретные аналоги, она может использоваться для исследования марковских процессов на некоторых «одномерных» графах, и т.д.

11 Классификация эргодических мер на H

Более подробно о классификации вероятностных мер на H , эргодических относительно действия $U(\infty)$, см. в работе [OV96].

11.1 Формулировка результата

В этой лекции приводится классификация вероятностных мер на множестве всех эрмитовых матриц H , которые эргодичны относительно действия финитной унитарной группы $U(\infty)$ на H (сопряжениями). Класси-

⁵⁰Для диффузии необходимы еще некоторые условия, мы их опустим.

фикация проводится в терминах характеристических функций мер. Если $M \in \mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$, то определяется характеристическая функция

$$f_M(A) := \int_H e^{i\text{Tr}(AB)} M(dB),$$

где $A \in H(\infty)$, а $H(\infty)$ — пространство финитных эрмитовых матриц. Пространство $H(\infty)$ является двойственным к пространству H .

В предыдущих лекциях мы обсуждали, как можно догадаться до иско- мой классификации. А именно, был сделан вывод, что характеристическая функция $f_M(A)$ эргодической меры имеет вид $f_M(A) = \prod_{j=1}^{\infty} F(a_j)$, где a_1, a_2, \dots — собственные значения матрицы A . При этом функция F на \mathbb{R} — это преобразование Фурье totally положительной вероятностной меры на \mathbb{R} . Сформулируем полный ответ, как выглядит функция F . Она зависит от бесконечного числа параметров. Эти параметры таковы. Пусть $\{x_j\}$ — набор точек на \mathbb{R} , $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, причем $\gamma_2 \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$. Функция F имеет вид

$$F(a) = e^{i\gamma_1 a - \gamma_2 a^2 / 2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-ix_j a}}{1 - ix_j a}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (11.1)$$

Сделаем несколько замечаний о формуле (11.1).

- Во-первых, сдвиг пространства H на константу, $B \mapsto B + \text{Const} \cdot \mathbf{1}$, переводит эргодические меры в эргодические. Данный сдвиг приводит к возникновению параметра $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.
- Условие $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$ слабее, чем $\sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty$. Если выполнено второе, более сильное условие, то от экспонент под знаком произведения в (11.1) можно избавиться. Однако, эти множители при более слабом условии $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$ обеспечивают сходимость произведения (11.1). Действительно,

$$\frac{1}{1 - ixa} = 1 + O(x), \quad \frac{e^{-ixa}}{1 - ixa} = 1 + O(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

- Вместо параметра γ_2 лучше рассматривать параметр

$$\delta := \gamma_2 + \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2.$$

Тогда пространство параметров $\{(x_j), \delta, \gamma_1\}$ вкладывается в бесконечномерное пространство с продакт-топологией

$$\{(x_j), \delta, \gamma_1\} \subset \mathbb{R}^{\infty+1} \times \mathbb{R}.$$

Причем пространство $\{(x_j), \delta\}$ выделяется в $\mathbb{R}^{\infty+1}$ условием $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \delta$, что на самом деле обеспечивает локальную компактность пространства параметров. Отметим, что функция $\gamma_2 = \delta - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$ не является непрерывной на этом локально компактном пространстве.

11.2 Аппроксимация характеристических функций

Идея доказательства теоремы о классификации (разд. 11.1) по существу та же, что для случая унитарной группы (см. первую часть лекций [Оль09]).

Примем на веру следующий принцип аппроксимации: если M — эргодическая мера на H , то существует последовательность эргодических (=орбитальных) мер M_N на $H(N)$, которые сходятся к M . Понятие сходимости определяется следующим образом. Для каждого $N_0 = 1, 2, \dots$ существует проекция $H \rightarrow H(N_0)$, состоящая в рассмотрении верхней левой подматрицы размера $N_0 \times N_0$. Аналогичная проекция $H(N) \rightarrow H(N_0)$ определена и для всех $N \geq N_0$. Говорим, что последовательность мер M_N на $H(N)$ сходится к мере M на H при $N \rightarrow \infty$, если для любого фиксированного N_0 выполнена слабая сходимость мер $M_N|_{H(N_0)}$ (эти меры определены для всех достаточно больших N) к $M|_{H(N_0)}$. Слабая сходимость этих мер на $H(N_0)$ равносильна равномерной сходимости их характеристических функций на компактах.

Таким образом, для исследования эргодических мер надо рассматривать последовательности $\{f_N\}$ неразложимых инвариантных положительно определенных нормированных функций на $H(N)$ и исследовать их пределы в указанном выше смысле. В качестве пределов f_N выступают функции f на $H(\infty)$. Задача состоит в описании всех пределов f , которые могут так возникнуть. При этом также будут получены условия, при которых последовательность функций $\{f_N\}$ сходится.

Неразложимые инвариантные положительно определенные нормированные функции f_N на $H(N)$ суть характеристические функции орбитальных мер. Они индексируются наборами N чисел $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$. Будем записывать $\lambda(N)$ как два набора

$$\lambda'_1(N) \geq \lambda'_2(N) \geq \dots \geq 0, \quad \lambda''_1(N) \leq \lambda''_2(N) \leq \dots \leq 0.$$

Отметим, что это аналогично разбиению сигнатуры на положительную и отрицательную части. Конечные последовательности $\lambda'(N)$ и $\lambda''(N)$ дополним нулями, чтобы не заботиться о числе элементов в них.

Сформулируем некоторые условия на рост $\lambda(N)$. Затем мы покажем, что эти условия необходимы и достаточны, чтобы последовательность характеристических функций f_N (соответствующих орбитальных мер), индексированных $\lambda(N)$, сходилась к функции f на $H(\infty)$.

Определение 11.1. Будем говорить, что последовательность $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$

регулярна, если существуют пределы

$$\begin{aligned}
x'_j &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda'_j(N)}{N} \geq 0; \\
x''_j &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda''_j(N)}{N} \leq 0; \\
\gamma_1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda'_j(N) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda''_j(N) \right) \in \mathbb{R}; \\
\delta &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda'_j(N))^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda''_j(N))^2 \right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{11.2}$$

Дефект γ_2 определяется как $\gamma_2 = \delta - \sum_{j=1}^{\infty} (x'_j)^2 - \sum_{j=1}^{\infty} (x''_j)^2$.

Замечание 11.2. Отметим, что последовательности x'_j и x''_j являются соответственно положительной и отрицательной частью последовательности x_j , рассмотренной в разд. 11.1.

Замечание 11.3. Отметим случай, когда возникает дефект $\gamma_2 > 0$. Пусть $\lambda(N)$ имеет N ненулевых компонент, примерно половина из них положительные, а половина — отрицательные. При этом положительные компоненты имеют порядок \sqrt{N} , а отрицательные — порядок $(-\sqrt{N})$. Таким образом, $x'_j = x''_j = 0$ для всех j , $\gamma_1 = 0$, и $\delta = \gamma_2 = 1$.

11.3 Инфинитезимальная сходимость

Перейдем к доказательству достаточности условий регулярности (определение 11.1) для сходимости функций f_N к f .

Вместо сходимости орбитальных интегралов на компактах рассмотрим более простую сходимость — сходимость коэффициентов Тейлора при разложении характеристических функций по функциям Шура. Далее будет объяснено, как из этой инфинитезимальной сходимости получить глобальную сходимость, а именно, равномерную сходимость на компактах.

Так как характеристические функции эргодических (=орбитальных в конечномерном случае) мер являются симметрическими (в силу унитарной инвариантности), то раскладывать их следует именно по симметрическим функциям. В нашем случае их удобно раскладывать по функциям Шура. Данное разложение орбитальных интегралов было получено в лекции 8.

Пусть $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$ и пусть $\Lambda(N)$ — диагональная матрица с собственными значениями $\{\lambda_j(N)\}$. Рассмотрим орбитальную меру, соответствующую $\Lambda(N)$, и ее преобразование Фурье:

$$f_{\Lambda(N)}(A) = \int_{U(N)} e^{i \text{Tr}(AU\Lambda(N)U^{-1})} dU.$$

Существует детерминантная формула для $f_{\Lambda(N)}(A)$, а мы будем использовать разложение по функциям Шура. Более подробно см. лекцию 8. Разложение по функциям Шура имеет вид

$$f_{\Lambda(N)}(A) = \sum_{\mu} \frac{i^{|\mu|}}{(N)_{\mu}} s_{\mu}(a_1, \dots, a_N) s_{\mu}(\lambda_1(N), \dots, \lambda_N(N)), \quad (11.3)$$

где a_j — собственные значения A , сумма ведется по всем разбиениям (=диаграммам Юнга) μ , таким, что $\ell(\mu) \leq N$. Величина $(N)_{\mu}$ определяется как $(N)_{\mu} = \prod_{\square \in \mu} (N + c(\square))$, см. также предложение 3.4.

Разложение (11.3) будем рассматривать как разложение Тейлора по функциям по $s_{\mu}(a_1, \dots, a_N)$. Будем исследовать асимптотику коэффициентов этого разложения. Покажем, что из условий регулярности (11.2) следует существование предела коэффициента при $s_{\mu}(a)$ в (11.3) для каждого разбиения μ . В силу стабильности функций Шура $s_{\mu}(a)$ и определения сходимости функций f_N на $H(N)$, данного выше, разложения Тейлора (11.3) при разных N согласованы.

Пусть $c_{\mu}^{(N)}$ — коэффициент разложения, равный

$$c_{\mu}^{(N)} = i^{|\mu|} \frac{s_{\mu}(\lambda_1(N), \dots, \lambda_N(N))}{(N)_{\mu}}.$$

Сначала рассмотрим случай $\mu = (m, 0, 0, \dots)$. Другими словами, мы будем рассматривать сходимость $f_{\Lambda(N)}$ в проекции на $H(1)$. В виду однородности функций Шура и того, что $(N)_{\mu} \sim N^{|\mu|}$, имеем

$$c_{\mu}^{(N)} \sim i^m h_m \left(\frac{\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{\lambda_N(N)}{N} \right).$$

Здесь $h_m = s_{(m,0,0,\dots)}$ — полная однородная симметрическая функция.

Рассмотрим производящую функцию $c_{(m,0,0,\dots)}^N$:

$$\sum_{m \geq 0} a^m h_m \left(\frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right).$$

Сходимость коэффициентов $h_m \left(\frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right)$ этой производящей функции эквивалентна сходимости коэффициентов логарифма этой производящей функции. Есть известное тождество для формальных степенных рядов:

$$\log \sum_{m \geq 0} h_m a^m = \sum_{m \geq 1} \frac{p_m}{m} a^m.$$

где p_m — степенные суммы, см. [Мак84, Гл. I, §2].

Пусть выполнены условия регулярности (11.2) для $\lambda(N)$. Рассмотрим отдельно сходимость p_1, p_2 , а также всех $p_m, m \geq 3$. Ясно, что из условий регулярности следует, что

$$p_1 \left(\frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right) \rightarrow i\gamma_1, \quad N \rightarrow \infty$$

и

$$p_2 \left(\frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right) \rightarrow (-\delta), \quad N \rightarrow \infty.$$

Сходимость p_m , $m \geq 3$, уже можно проверять почленно, переставляя предел по N и суммирование в степенной сумме. Возможность перестановки суммы и предела связана с тем, что $\sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty$ (проверьте!).

Таким образом, мы видим, что производящая функция коэффициентов $c_{(m,0,\dots)}^{(N)}$, которые отвечают проекции $f_{\Lambda(N)}$ на $H(1)$, при выполнении условий регулярности (11.2) сходится к $F(a)$ (11.1). Сходимость коэффициентов $c_{\mu}^{(N)}$ следует из формулы Якоби-Труди.

Формула Якоби-Труди выражает функции Шура s_{μ} через полные симметрические функции h_m следующим образом:

$$s_{\mu} = \det [h_{\mu_i - i + j}].$$

Считается, что $h_k = 0$ для $k < 0$, а порядок детерминанта может быть любой $\geq \ell(\mu)$.

Применение формулы Якоби-Труди для доказательства сходимости коэффициентов $c_{\mu}^{(N)} \rightarrow c_{\mu}$, $N \rightarrow \infty$, основано на следующем общем факте. Пусть $F(a) = \sum_{m \geq 0} c_m a^m$, тогда для любого $N_0 = 1, 2, \dots$ имеем

$$F(a_1) \dots F(a_{N_0}) = \sum_{\mu} c_{\mu} s_{\mu}(a_1, \dots, a_{N_0}),$$

где сумма ведется по всем разбиениям μ с $\ell(\mu) \leq N_0$, и

$$c_{\mu} = \det [c_{\mu_i - i + j}].$$

11.4 Глобальная сходимость

Теперь покажем, как из установленной инфинитезимальной сходимости можно получить глобальную сходимость функций $f_{\Lambda(N)}$, то есть, равномерную сходимость на компактах. Существует два способа.

11.4.1 Первый способ

Функции f_N являются положительно определенными и аналитическими, причем $f_N(0) = 1$. Равномерная сходимость на компактах функций f_N к аналитической функции f следует из покоэффициентной сходимости, если коэффициенты Тейлора функции f растут не слишком быстро. Более конкретно, требуется, чтобы проблема моментов, связанная с функцией f , имела единственное решение, то есть, чтобы можно было однозначно определить меру, преобразованием Фурье которой является f . Ясно, что если такую меру определить однозначно нельзя, то неясно, к какой мере будут сходиться орбитальные меры, отвечающие f_N .

11.4.2 Второй способ

Второй способ состоит в том, чтобы получить оценку вида

$$|c_{(m,0,0,\dots)}^{(N)}| \leq c_1 c_2^m$$

равномерно по m . Данная оценка может быть легко установлена, она гарантирует равномерную сходимость рядов Тейлора для f_N в некоторой окрестности нуля, радиус которой не зависит от N . Это влечет равномерную сходимость f_N к f на компактах.

11.5 Необходимость условий регулярности

Теперь предположим, что последовательность $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$ такова, что характеристические функции $f_{\Lambda(N)}$ сходятся равномерно к некоторой функции f на компактах. Здесь $\Lambda(N)$ — диагональная матрица с собственными значениями $\{\lambda_j(N)\}$, а $f_{\Lambda(N)}$ — преобразование Фурье орбитальной меры, сосредоточенной на орбите, проходящей через $\Lambda(N)$. Покажем, что если $f_{\Lambda(N)}$ сходятся к f , то выполнены условия регулярности (11.2). Отметим, что здесь рассуждения значительно проще, чем в случае с характеристиками группы $U(\infty)$ (см. первую часть лекций [Оль09], в частности, лекцию 5).

Рассмотрим поведение величины

$$p_1 \left(\frac{\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{\lambda_N(N)}{N} \right)^2 + p_2 \left(\frac{\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{\lambda_N(N)}{N} \right) \geq 0, \quad (11.4)$$

и рассмотрим ее супремум. Если он конечен, то по подпоследовательности можно получить предельные параметры $\{(x_j), \gamma_1, \delta\}$, и по любой другой подпоследовательности будет сходимость (11.2) к тем же предельным параметрам.

Предположим теперь, что супремум по N величин (11.4) бесконечен. Выбирая подпоследовательность, можно считать, что величины (11.4) стремятся к бесконечности. Тогда существует последовательность $\varepsilon_N \rightarrow 0$, $\varepsilon_N > 0$, такая, что если заменить $\lambda(N)$ на $\varepsilon_N \lambda(N)$, то супремум величин (11.4) будет уже конечен. То есть, перенормированные функции

$$\tilde{f}_N(A) := f_N(\varepsilon_N A)$$

будут сходить к какой-то функции \tilde{f} . Можно выбрать ε_N такими, что хотя бы одно из чисел γ_1 или δ будет отлично от нуля. Таким образом, набор параметров функции \tilde{f} нетривиален, что означает, что эта функция не равна тождественно единице.

Возникает противоречие, так как f_N сходятся к f равномерно на компактах, а перенормированные функции \tilde{f}_N сходятся к какой-то функции $\tilde{f} \neq 1$. Это противоречит непрерывности предельной функции f .

Таким образом, теорема о классификации эргодических мер на H , сформулированная в разд. 11.1, установлена. Более подробно см. в работе [OV96].

12 Строение эргодических мер

Здесь мы подробно обсудим, как устроены вероятностные меры на H , эргодические относительно действия $U(\infty)$, а также построим важное семейство мер на H , которые не являются эргодическими, но являются инвариантными относительно действия $U(\infty)$.

12.1 Напоминание

Напомним, что вероятностные меры на H , эргодические относительно действия $U(\infty)$, находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями на \mathbb{R} вида

$$F(a) = \exp\left(i\gamma_1 a - \gamma_2 \frac{a^2}{2}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-ix_k a}}{1 - ix_k a},$$

где $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \geq 0$, $x_j \in \mathbb{R}$, и $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$. Функция $F(a)$ кодирует характеристическую функцию эргодической меры M на H в том смысле, что

$$\int_H e^{i\text{Tr}(AB)} M(dB) = \prod_{k=1}^n F(a_k),$$

где $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_k)$ — произвольная матрица из $H(\infty)$, которую можно считать диагональной, так как характеристическая функция унитарно инвариантна.

Эргодические меры на H — это бесконечномерный аналог орбитальных мер. Возникает вопрос, можно ли описать эти меры более явно, чем в терминах их характеристических функций.

Отметим, что смысл параметра γ_1 в $F(a)$ ясен — он отвечает за сдвиг меры, то есть, если рассмотреть сдвиг пространства H , $B \mapsto B + c\mathbf{1}$, то эргодическая мера перейдет в эргодическую, а параметр γ_1 у новой меры станет равен $\gamma_1 + c$.

12.2 Гауссовский случай

Опишем, какая мера получится, если положить $\gamma_1 = 0$ и $x_1 = x_2 = \dots = 0$. Пусть $\gamma_2 > 0$.⁵¹ Тогда мера M на H — гауссовская. Опишем, как строится случайная матрица $B \in H$, распределенная по этой мере. Матрица B эрмитова, и поэтому ее диагональные элементы B_{kk} вещественны, а элементы B_{kl} , $k > l$, однозначно восстанавливаются по B_{kl} , $k < l$. Чтобы получить матрицу, распределенную по M с указанными параметрами, следует взять $B_{kk} \sim N(0, \gamma_2)$, и $B_{kl} \sim N(0, \gamma_2) + iN(0, \gamma_2)$, где $k < l$. Другими словами, B_{kk} имеют нормальное распределение со средним 0 и дисперсией γ_2 , а у комплексных случайных величин B_{kl} ($k < l$) действительная и мнимая

⁵¹Если все параметры меры равны нулю, то это — дельта-мера на H , сосредоточенная в нулевой матрице.

части независимы и также имеют нормальное распределение со средним 0 и дисперсией γ_2 . При этом все величины B_{kk} и B_{kl} ($k < l$) независимы в совокупности.

Заметим еще, что параметр γ_2 может меняться при гомотетиях пространства H . Гомотетия — еще одно преобразование, которое переводит эргодические меры в эргодические.

12.3 Описание эргодических мер, связанных с x_j

Пусть теперь $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (значение этих параметров мы выяснили), и сначала рассмотрим случай, когда $x_1 = x \neq 0$, а все остальные x_j равны нулю. Пусть μ — гауссовская мера на \mathbb{C} (отождествим \mathbb{C} с \mathbb{R}^2) следующего вида:

$$\mu(dz) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dz,$$

где dz обозначает меру Лебега на \mathbb{C} . Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots$ с мерой $\mu^{\otimes \infty} = \mu \otimes \mu \otimes \dots$. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$ — случайная вектор-строка, распределенная по мере $\mu^{\otimes \infty}$. Построим по ξ матрицу $B \in H$:

$$B := x(\xi^* \xi - \mathbf{1}). \quad (12.1)$$

Матрица $\xi^* \xi$ имеет ранг единица. Ясно, что матрица B унитарно инвариантна, так как распределение ξ не меняется при преобразованиях вида $\xi \mapsto \xi U$, $U \in U(\infty)$.

Оказывается, матрица $B \in H$ имеет распределение M с указанными выше параметрами. Можно вычислить (с помощью гауссовских интегралов), что соответствующая функция F имеет вид

$$F(a) = \frac{e^{-ixa}}{1 - ixa}.$$

Теперь рассмотрим случай нескольких конечных x_j . Пусть x_1, \dots, x_k отличны от нуля, а γ_1, γ_2 и все остальные x_j равны нулю. Вместо \mathbb{C}^∞ рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{k \times \infty}$, будем рассматривать его как пространство квадратных матриц с k строками и бесконечным числом столбцов. Пусть мера μ на \mathbb{C} такая же, как выше, а на $\mathbb{C}^{k \times \infty}$ рассмотрим меру $\mu^{\otimes (k \times \infty)}$. Пусть Ξ — случайная матрица (элемент $\mathbb{C}^{k \times \infty}$), распределенная по этой мере. Пусть далее $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_k)$. Построим случайную матрицу $B \in H$:

$$B := \Xi^* X \Xi + y \mathbf{1},$$

где $y \in \mathbb{R}$. Можно показать, что случайная матрица $B \in H$ распределена по эргодической мере M с параметрами x_1, \dots, x_k (все остальные x_j равны нулю), $\gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 = y + x_1 + \dots + x_k$. Таким образом, полагая $y = -x_1 - \dots - x_k$, можно получить искомую эргодическую меру.

12.4 Меры на \mathbb{R} и их свертки

Пусть $B \in H$ — случайная матрица, которая распределена по эргодической мере M с некоторыми параметрами $\{x_j\}$, γ_1 и γ_2 . Рассмотрим какой-нибудь диагональный элемент матрицы, например, B_{11} . Оказывается, его распределение на \mathbb{R} имеет характеристическую функцию $F(a)$, которая соответствует всей мере M .⁵² Таким образом,

$$F(a) = \mathbf{E}e^{iaB_{11}}.$$

Видно, что в эргодическом случае мера на H полностью определяется распределением величины B_{11} . Ясно, что для неэргодической меры это неверно.

Произведению характеристических функций на \mathbb{R} отвечает свертка мер.⁵³ Таким образом, характеристическая функция

$$F(a) = \exp\left(i\gamma_1 a - \gamma_2 \frac{a^2}{2}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-ix_j a}}{1 - ix_j a}$$

получается путем свертки некоторых распределений. Рассмотрим их по отдельности.

Множитель $e^{i\gamma_1 a - \gamma_2 \frac{a^2}{2}}$ — это характеристическая функция нормального распределения $N(\gamma_1, \gamma_2)$ со средним γ_1 и дисперсией γ_2 .

Пусть $x > 0$ (если $x < 0$, то в итоге получится распределение, симметричное относительно нуля). Тогда

$$\frac{e^{-iax}}{1 - ia x}$$

— характеристическая функция сдвинутого экспоненциального распределения с плотностью

$$\nu(db) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}(b+x)}.$$

Среднее значения этой экспоненциальной случайной величины равно нулю.

Отметим, что если число ненулевых x_j бесконечно, то для определения случайной величины с характеристической функцией $F(a)$ требуется предельный переход.

Отметим также, что можно рассматривать свертку мер и на пространстве H , так как H является абелевой группой, и определено сложение $H \times H \rightarrow H$. Если M_1 и M_2 — две вероятностные меры на H , то их свертка $M_1 * M_2$ определяется как распределение случайной матрицы $B^{(1)} + B^{(2)}$, где $B^{(i)}$ имеет распределение M_i и $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ независимы.

⁵²В предыдущих лекциях мы рассматривали проекции H на $H(N)$. Распределение B_{11} получается в проекции на $H(1)$.

⁵³Свертка $\nu_1 * \nu_2$ двух вероятностных распределений ν_1 и ν_2 — это распределение суммы независимых случайных величин $X_1 + X_2$, где X_i имеет распределение ν_i .

12.5 Построение семейства неэргодических мер. Определения

Перейдем к построению важного семейства неэргодических мер на H . Эти меры являются унитарно инвариантными. Построение описано в работе [BO01] и опирается на вычисления в книге Хуа Ло-Кена [Хуа59]. Подобные меры рассматривались в работе Пикрелла [Pic87].

Пространство H представляет собой проективный предел пространств конечномерных матриц $H(N)$. Проекции определяются как

$$H(N) \rightarrow H(N-1), \quad H(N) \ni B = \begin{bmatrix} \hat{B} & \xi \\ \xi^* & t \end{bmatrix} \mapsto \hat{B} \in H(N-1).$$

Здесь ξ — вектор-столбец длины $N-1$, а $t \in \mathbb{R}$.

Каждая мера M на H путем проекций на $H(N)$ порождает семейство мер $\{M_N\}$, которые удовлетворяют определенным условиям согласованности. Кроме того, каждому согласованному семейству $\{M_N\}$ отвечает мера M на H . Это можно доказать с помощью теоремы Колмогорова о построении мер. Унитарная инвариантность меры M на H эквивалентна унитарной инвариантности каждой меры M_N .

Выпишем более подробно условия согласованности. Пусть каждая мера M_N на H_N имеет функцию плотности f_N относительно меры Лебега на H_N . Тогда последовательность мер $\{M_N\}$ на H_N определяет унитарно инвариантную вероятностную меру M на H тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- Каждая функция f_N на H_N унитарно инвариантна, то есть, зависит лишь от собственных значений матрицы, причем симметричным образом.
- Для всех $N = 2, 3, \dots$ выполнены следующие условия когерентности:

$$\int_{\xi, t} f_N \left(\begin{bmatrix} \hat{B} & \xi \\ \xi^* & t \end{bmatrix} \right) \xi dt = f_{N-1}(\hat{B}) \quad (12.2)$$

для каждой фиксированной матрицы $\hat{B} \in H(N-1)$.

- Выполнено условие нормировки, которое достаточно потребовать для $N = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(b) db = 1.$$

12.6 Построение семейства неэргодических мер. Формулировка результата

Оказывается, что можно выбрать когерентное семейство мер M_N на $H(N)$ с плотностями f_N следующим образом. Пусть $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$ — параметр. Рассмотрим функции вида

$$f_N(B) = c_N \cdot g_N(B), \quad B \in H(N), \quad (12.3)$$

где c_N — нормировочные константы, и

$$g_N(B) := \prod_{j=1}^N (1 + ib_j)^{-s-N} \prod_{j=1}^N (1 - ib_j)^{-\bar{s}-N}, \quad (12.4)$$

где b_1, \dots, b_N — собственные значения матрицы B . Здесь для определения степеней $(1 + ib_j)^{-s-N}$ и $(1 - ib_j)^{-\bar{s}-N}$ делается разрез в \mathbb{C} вдоль отрицательной полуоси, и в оставшейся области можно выбрать однозначную ветвь степени. Отметим, что для всех b_j числа $1 \pm ib_j$ лежат на вертикальной прямой, проходящей через единицу, то есть, далеко от разреза.

Функцию g_N можно записать и следующим образом:

$$g_N(B) = \prod_{j=1}^N |(1 + ib_j)^{-s-N}|^2 = \det((\mathbf{1} + iB)^{-s-N}) \det((\mathbf{1} - iB)^{-\bar{s}-N})$$

Здесь матрицы $(\mathbf{1} + iB)^{-s-N}$ и $(\mathbf{1} - iB)^{-\bar{s}-N}$ определяются в функциональном исчислении для самосопряженных операторов. Ветви функций выбираются, как описано выше, спектр операторов $\mathbf{1} \pm iB$ лежит на вертикальной прямой, проходящей через единицу, поэтому все корректно определено. Отметим, что нельзя было бы записать $(\det(\mathbf{1} + iB))^{-s-N}$, так как положение числа $\det(\mathbf{1} + iB)$ на комплексной плоскости неизвестно.

В книге [Хуа59] рассматривался лишь случай $s \in \mathbb{R}$, введение комплексных s принадлежит Ю. Неретину.

12.7 Леммы

Были введены плотности f_N на H_N , для которых мы будем доказывать условие когерентности (12.2).

Приведем леммы, которые будут использованы в доказательстве.

Лемма 12.1. *Пусть квадратная матрица A разделена на прямоугольные блоки:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

и пусть матрица A_{11} невырождена. Тогда

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

Доказательство. Упражнение 12.3. □

Пусть Π_+ — правая матричная полуплоскость:

$$\Pi_+ := \{A: A + A^* > 0\}.$$

Если $A \in \Pi_+$, то все собственные значения A также лежат в правой полуплоскости в \mathbb{C} . Поэтому можно для любого z определить степень A^z с

помощью голоморфного функционального исчисления, а именно, по формуле Коши. Кроме того, если φ — голоморфная функция, то

$$\varphi(A) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - A},$$

где контур окружает собственные значения матрицы A . Таким образом, если $A \in \Pi_+$, то можно рассмотреть ветвь A^z в \mathbb{C} с разрезом вдоль отрицательной полуоси, и так как все собственные значения A лежат в правой полуплоскости в \mathbb{C} , то можно выбрать контур, обходящий собственные значения, и целиком лежащий в правой полуплоскости.

Таким образом, матрица A^z определена.

Лемма 12.2. Пусть $A \in \Pi_+$ и матрица A разделена на блоки,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где матрица A_{11} невырождена. Тогда для $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\det(A^z) = \det(A_{11}^z) \cdot \det((A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^z). \quad (12.5)$$

Доказательство. Можно показать, что $A_{11} \in \Pi_+$ и также $A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{12} \in \Pi_+$. Таким образом, все матрицы в правой части (12.5) определены.

Правая и левая часть (12.5) голоморфны как функции от матрицы, лежащей в правой матричной полуплоскости. Поэтому можно считать, что спектр A лежит близко к единице. В этом случае ясно, что $\det(A^z) = (\det A)^z$ (и то же самое верно для матриц в правой части (12.5)), поэтому данная лемма следует из леммы 12.1. \square

12.8 Подсчет

Теперь с использованием леммы 12.2 мы докажем условие когерентности (12.2), где f_N задано в (12.3)–(12.4). В лемме 12.2 рассмотрим $A = 1 + iB$ (где $B \in H(N)$) и $z = -s - N$, где $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$.⁵⁴ Разбивая $B \in H(N)$ на блоки,

$$B = \begin{bmatrix} \hat{B} & \xi \\ \xi^* & t \end{bmatrix}, \quad \hat{B} \in H(N-1),$$

будем вычислять интеграл

$$I := \int_{\xi, t} \det(A^{-s-N}) \det(\bar{A}^{-\bar{s}-N}) d\xi dt.$$

Используя лемму 12.2 с $A_{11} = \hat{B}$, и т.д., можно записать

$$I = \det \left((1 + i\hat{B})^{-s-N} \right) \det \left((1 - i\hat{B})^{-\bar{s}-N} \right) \times \\ \times \int_{\xi, t} \left[(1 + it) + \xi^*(1 + i\hat{B})^{-1}\xi \right]^{-s-N} \left[(1 - it) + \xi^*(1 - i\hat{B})^{-1}\xi \right]^{-\bar{s}-N} d\xi dt.$$

⁵⁴Использование условия $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$ реально видно не будет. Оно необходимо для сходимости некоторых интегралов.

Множитель, который вынесен из-под интеграла, не зависит от ξ и t . Под интегралом остается определитель матрицы 1×1 .

Будем считать, что $\hat{B} = \text{diag}(b_1, \dots, b_{N-1})$, так как выражение I унитарно инвариантно по \hat{B} , если действовать унитарной группой $U(N-1)$.⁵⁵ Таким образом, в I перед интегралом возникнет множитель

$$\prod_{j=1}^{N-1} (1 + ib_j)^{-s-N} \prod_{j=1}^{N-1} (1 - ib_j)^{-\bar{s}-N}.$$

Теперь запишем

$$1 \pm it + \xi^* \left(1 \pm i\hat{B}\right)^{-1} \xi = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|\xi_j|^2}{1 + b_j^2} \pm i \left(t - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{b_j |\xi_j|^2}{1 + b_j^2} \right)$$

и заменим переменные (ξ, t) в интеграле. Обозначим $t - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{b_j |\xi_j|^2}{1 + b_j^2}$ через (новое) t при постоянном ξ , от этого ничего не изменится. После этого обозначим $\frac{\xi}{\sqrt{1 + b_j^2}}$ через новое ξ_j , это даст множитель вида $\prod_{j=1}^{N-1} (1 + b_j^2)$ перед интегралом (так как $d\xi$ — это $(2N-2)$ вещественных переменных). Таким образом, когерентность (12.2) установлена.

Обсудим, как найти нормировочный множитель. Интеграл

$$\int_{\xi, t} \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} |\xi_j|^2 + it\right)^{-s-N} \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} |\xi_j|^2 - it\right)^{-\bar{s}-N} d\xi dt$$

следует переписать в полярных координатах, полагая $r = \sum_{j=1}^{N-1} |\xi_j|^2$. Интегрирование по угловым координатам даст некоторый множитель, а затем весь интеграл сведется к двумерному интегралу вида

$$\int_{r \geq 0, t \in \mathbb{R}} (1 + r + it)^{-s-N} (1 + r - it)^{-\bar{s}-N} dr dt.$$

Это интеграл типа бета-функции и его можно вычислить. Это позволяет найти нормировочные константы. Более подробно см. в статье [BO01].

12.9 Преобразование Кэли и меры на $U(N)$

Аналогично построенным мерам на $H(N)$ можно рассматривать другие меры на различных пространствах бесконечномерных матриц, которые имеют схожую структуру (см., например, [Pic87]).

Например, рассмотрим унитарные матрицы. Проекция $U(N) \rightarrow U(N-1)$,

$$U(N) \ni U = \begin{bmatrix} \hat{U} & \eta_1 \\ \eta_2 & u \end{bmatrix} \mapsto \hat{U} \in U(N-1)$$

⁵⁵Матрицы из $U(N-1)$ действуют также и на ξ , но от этого интеграл не меняется.

не согласованы с групповой операцией в $U(N)$, поэтому проективный предел $U := \varprojlim U(N)$ не будет группой. Однако на U также можно рассматривать семейство мер, которое связано с построенными мерами на $H(N)$.

Преобразование Кэли переводит $H(N)$ в $U(N)$. Наши меры на $H(N)$, построенные выше, при этом преобразовании переходят в меры на $U(N)$, которые имеют плотность, пропорциональную

$$\det((1+U)^s) \det((1+U^{-1}))^s,$$

где $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$ — тот же параметр. Эти меры на $U(N)$ (и соответствующие меры на U) очень важны. Например, при $s = 0$ на $U(N)$ получается равномерная мера.

Отметим, что при $s = 0$ на $H(N)$ возникает мера с плотностью, пропорциональной $\det(1+B^2)^{-N}$. Это можно рассматривать как обобщение вероятностного распределения Коши на \mathbb{R} с плотностью, пропорциональной $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что плотность Коши на \mathbb{R} возникает как образ при преобразовании Кэли равномерной меры на окружности.

12.10 Упражнения

Упражнение 12.1. Покажите, что если вектор(-строка) ξ имеет многомерное нормальное распределение со средним ноль и независимыми компонентами с одинаковой дисперсией, то преобразование $\xi \mapsto \xi U$, где U — унитарная матрица, не меняет распределение вектора ξ .

Упражнение 12.2. Вычислите явно функцию $F(a)$, отвечающую распределению матрицы B (12.1).

Упражнение 12.3. Докажите лемму 12.1.

Упражнение 12.4. Покажите, что если матрица A лежит в правой матричной полуплоскости

$$\Pi_+ = \{A: A + A^* > 0\},$$

то все ее собственные значения лежат в правой полуплоскости в \mathbb{C} .

Упражнение 12.5. Пусть матрица $A \in \Pi_+$ разбита на блоки

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где матрица A_{11} невырождена. Тогда $A_{11} \in \Pi_+$.

Упражнение 12.6. Пусть матрица $A \in \Pi_+$ разбита на блоки, как выше, и блок A_{11} невырожден. Тогда, чтобы вычислить $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, надо взять матрицу A^{-1} , вырезать блок (22), и затем еще раз обратить полученную матрицу, то есть,

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = ((A^{-1})_{22})^{-1}.$$

Упражнение 12.7. Если $A \in \Pi_+$, то $A^{-1} \in \Pi_+$.

13 Заключение

13.1 Введение

В данной лекции подводится некий итог годового курса асимптотической теории представлений (первая часть курса — [Оль09]).

Исторически теория представлений исследовала последовательно конечные группы, затем компактные группы (главным образом, компактные группы Ли), затем некомпактные группы Ли. В случае компактных групп Ли удалось построить красивую и относительно простую теорию. Об этой теории см. фундаментальную книгу Г. Вейля [Вей07]. Были попытки развивать теорию бесконечномерных групп Ли (например, банаховых групп Ли), однако, на этом направлении есть лишь единичные успехи, связанные с некоторыми конкретными группами. Для некомпактных групп Ли Гельфандом, Хариш-Чандрой и др. была создана теория представлений, которая значительно сложнее, чем теория представлений компактных групп Ли.

Теория представлений бесконечномерной унитарной группы, рассмотренная в первой части лекций [Оль09], представляет собой бесконечномерное обобщение теории, связанной именно с компактными группами Ли. Пусть $G(N)$ — некоторая цепочка вложенных классических групп и пусть

$$G = \varinjlim G(N)$$

— ее индуктивный предел. Модельный пример компактных групп $G(N)$ — унитарные группы $U(N)$, а пример в некомпактном случае — $GL(N, \mathbb{C})$. Оказывается, что в некомпактном случае представления индуктивного предела G оказываются значительно более бедными, чем в компактном случае.

О представлениях бесконечномерных групп также можно посмотреть диссертацию [Оль89].

13.2 Фундаментальные факты о компактных группах

Попробуем понять, каковы фундаментальные факты о компактных группах, которые можно обобщать на их индуктивные пределы.

- На компактных группах существует нормированная (вероятностная) мера Хаара.
- Для компактных групп есть простая классификация неприводимых представлений.
- Если K — компактная группа и \widehat{K} — ее дуальный объект (то есть, множество всех неприводимых представлений K), то справедлива теорема Петера–Вейля. А именно, рассмотрим $L^2(K)$ — пространство L^2 -функций по мере Хаара на K , и пусть R — (левое) регулярное представление K в $L^2(K)$. Тогда справедливо разложение

$$R = \bigoplus_{\pi \in \widehat{K}} \dim \pi \cdot \pi. \quad (13.1)$$

Можно сказать, что теорема Петера–Вейля решает задачу гармонического анализа для группы K . Общая (абстрактная) постановка этой задачи состоит в том, чтобы взять некоторое выделенное представление группы (или некоторый класс представлений), которое можно описать в «геометрических» терминах, и раскладывать это представление по неприводимым.

Для некомпактных групп все три факта (мера Хаара, классификация неприводимых представлений, теорема Петера–Вейля) нарушаются и усложняются. Мера Хаара на некомпактной группе уже не будет вероятностной. Классификация неприводимых представлений некомпактных групп в общем случае неизвестна, а для группы $GL(N, \mathbb{C})$ была получена не так давно с большим трудом. Задача гармонического анализа (теорема Петера–Вейля) также значительно усложняется. В разложении (13.1) возникает непрерывный спектр, а сумма перестает быть прямой. Кроме того, левое регулярное представление уже не дает всех неприводимых представлений.

Оказывается, для индуктивных пределов компактных групп $G = \varinjlim G(N)$ можно «изобрести» и меру Хаара, и классификацию неприводимых представлений, а также поставить и решить задачу гармонического анализа. В первой части лекций [Оль09] мы занимались классификацией представлений $U(\infty)$. В данной лекции будет сказано об аналоге меры Хаара и о задаче гармонического анализа.

Отметим, что для бесконечномерного обобщения теореме Петера–Вейля следует модифицировать следующим образом. Следует рассматривать двустороннее действие группы $K \times K$ в пространстве $L^2(K)$ по мере Хаара (здесь K — компактная группа). Обозначим это бигулярное представление через $R^{\text{two-side}}$. Тогда теорема Петера–Вейля эквивалентна тому, что

$$R^{\text{two-side}} = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} \pi \otimes \bar{\pi}. \quad (13.2)$$

Здесь уже получается однократный спектр. Представление $\bar{\pi}$ — это представление, сопряженное к π . Утверждение (13.2) дает правильное понимание теоремы Петера–Вейля. Отметим, что в бесконечномерном случае именно объект $\pi \otimes \bar{\pi}$ имеет смысл, он отождествляется со сферическим представлением пары $(K \times K, \text{diag } K)$.

13.3 «Мера Хаара», связанная с бесконечномерной унитарной группой

Мы будем рассматривать модельный пример, связанный с бесконечномерной унитарной группой $U(\infty)$ (см. также [Оль09]). Возьмем $K(N) = U(N)$, это компактные группы. Пусть $K = \varinjlim K(N) = U(\infty)$. Оказывается, что пространство $L^2(K)$ рассматривать нельзя, так как на $U(\infty)$ нет инвариантной вероятностной меры. Оказывается, искомая «мера Хаара» может лежать не на $U(\infty)$, а на большем объекте. От этого большего объекта \mathfrak{U} требуется, чтобы $L^2(\mathfrak{U})$ было G -пространством, где $G = K \times K = U(\infty) \times U(\infty)$.

В качестве \mathfrak{U} надо брать проективный предел групп $U(N)$. Этот объект уже не будет группой. Зато на нем возможно определить вероятностную меру, так, что в $L^2(\mathfrak{U})$ группа $U(\infty)$ действует слева и справа (то есть, $L^2(\mathfrak{U})$ — G -пространство). Опишем объект $\mathfrak{U} = \varprojlim U(N)$.

Преобразование Кэли отождествляет (с точностью до множества меры нуль) группу $U(N)$ с пространством $H(N)$ эрмитовых матриц $N \times N$. На уровне эрмитовых матриц проекция $H(N+1) \rightarrow H(N)$ состоит просто в вырезании из матрицы $(N+1) \times (N+1)$ левого верхнего блока размером $N \times N$. Таким образом, имеем следующие проекции:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & U(N) & \longleftarrow & U(N+1) & \longleftarrow & \dots \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & H(N) & \longleftarrow & H(N+1) & \longleftarrow & \dots \end{array} \quad (13.3)$$

(вертикальные стрелки отвечают преобразованию Кэли).

Мера Хаара на $U(N)$ при преобразовании Кэли переходит в меру на $H(N)$ с плотностью

$$\text{Const} \cdot \det(1 + X^2)^{-N} \quad (13.4)$$

относительно меры Лебега на $H(N)$ (см. также предыдущую лекцию). Оказывается, что эти меры на $H(N)$ согласованы с проекциями $H(N+1) \rightarrow H(N)$. Кроме того, можно даже рассматривать более общие меры Хуа–Пикрелла, см. предыдущую лекцию.

В результате проективного предела (из согласованности) получается вероятностная мера на $H = \varprojlim H(N)$ — пространстве всех эрмитовых матриц.

Двустороннее действие $U(N) \times U(N)$ на $U(N)$ с помощью преобразования Кэли переносится на $H(N)$.⁵⁶ Меры (13.4) являются инвариантными относительно этого действия. Кроме того, это действие можно продолжить до действия группы $G = U(\infty) \times U(\infty)$,

$$G \times H \rightarrow H.$$

Построенная вероятностная мера на H инвариантна относительно этого действия.

С помощью преобразования Кэли строятся проекции $U(N+1) \rightarrow U(N)$, которые обладают некоторыми другими хорошими свойствами. Проективный предел относительно данных проекций $\mathfrak{U} = \varprojlim U(N)$ является G -пространством, и на нем существует G -инвариантная вероятностная мера, которая получается из мер Хаара на $U(N)$.

13.4 G -квазиинвариантные меры на \mathfrak{U} и H

Отметим, что мы построили для $U(\infty)$ аналог вероятностной меры Хаара на компактной группе. Также в первой части лекций [Оль09] были

⁵⁶Получается действие $U(N) \times U(N)$ на $H(N)$ некоторыми дробно-линейными преобразованиями с точностью до множеств меры нуль.

описаны неприводимые характеры $U(\infty)$. С точки зрения представлений, каждый такой характер отвечает неприводимому сферическому представлению пары (G, K) , где $G = U(\infty) \times U(\infty)$ и $K = \text{diag} U(\infty) \subset G$. Теперь перейдем к обобщению теоремы Петера–Вейля, которую следует понимать в смысле (13.2). При этом каждый объект $\pi \otimes \bar{\pi}$ отвечает на самом деле неприводимому сферическому представлению.

Оказывается, для решения этой задачи ее следует сначала обобщить. А именно, следует включить когерентные семейства $G(N)$ -инвариантных мер на $H(N)$ или $U(N)$ (для случая $U(N)$ это меры Хаара, которые согласованы относительно проекций (13.3)) в семейства мер, зависящих от параметра. На $H(N)$ данную роль играют меры Хуа–Пикрелла, построенные в предыдущей лекции. Эти меры на $H(N)$ согласованы относительно проекций и имеют следующую плотность относительно меры Лебега:

$$\text{Const} \cdot \det((1 + iX)^{-s-N}) \det((1 - iX)^{-\bar{s}-N}), \quad (13.5)$$

где $s \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ — параметр.⁵⁷

Данные меры приводят к семейству вероятностных мер на H и (с помощью преобразования Кэли) на \mathfrak{U} , зависящих от $s \in \mathbb{C}$. Данные меры уже не будут инвариантными, они будут квазиинвариантными. С помощью квазиинвариантных мер также можно строить представления, об этом — в следующем подразделе.

13.5 Квазиинвариантные меры и представления

Пусть G — группа, которая (справа) действует на пространстве X :

$$X \times G \rightarrow X, \quad (x, g) \mapsto x \cdot g.$$

Пусть P — мера на X , не обязательно конечная. Для каждого $g \in G$ можно определить образ меры P при умножении на элемент g , обозначим эту меру через P^g .

Определение 13.1. Мера P на X называется квазиинвариантной, если для всех $g \in G$ меры P и P^g эквивалентны (то есть, отличаются друг от друга умножением на функцию).

Предположим, что мера P на X является G -инвариантной. Тогда определено унитарное представление T группы G в пространстве $L^2(X, P)$:

$$g \mapsto T(g), \quad (T(g)f)(x) = f(x \cdot g), \quad f \in L^2(X, P).$$

Ясно, что

$$(T(g)f, T(g)f)_{L^2(X, P)} = (f, f)_{L^2(X, P)},$$

то есть, представление действительно унитарно.

⁵⁷Условие $\text{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ накладывается для того, чтобы меру было можно сделать вероятностной.

Теперь пусть P — квазиинвариантная мера. Тогда представление G в $L^2(X, P)$ также можно построить, однако, для этого придется модифицировать картину, описанную выше. А именно, представление $g \mapsto T(g)$ следует определить так:

$$(T(g)f)(x) = f(x \cdot g)c(x, g).$$

Чтобы это было представлением, функция $c: X \times G \rightarrow \mathbb{C}$ должна быть коциклом, то есть,

$$c(x, g_1 g_2) = c(x, g_1)c(x \cdot g_1, g_2), \quad x \in X, \quad g_1, g_2 \in G.$$

Чтобы представление было унитарным, необходимо потребовать, чтобы

$$|c(x, g)|^2 = \frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)},$$

где в правой части стоит производная Радона–Никодима меры P^g по мере P .⁵⁸

Один из возможных вариантов выбора функции $c(x, g)$ — это просто

$$c(x, g) := \left\{ \frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Однако, для унитарности представления T необходимо лишь условие на $|c(x, g)|^2$, поэтому можно обогатить конструкцию, взяв

$$c(x, g) := \left\{ \frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)} \right\}^{\frac{1}{2} + i\xi}, \quad (13.6)$$

где $\xi \in \mathbb{R}$ — параметр.

Таким образом, по квазиинвариантной мере P можно построить целое семейство представлений G в $L^2(X, P)$.

13.6 Обобщенные регулярные представления дубля бесконечномерной унитарной группы и их сжатие

Пусть $G = U(\infty) \times U(\infty)$ и $K = \text{diag } U(\infty) \subset G$. Каждое из пространств \mathfrak{U} и \mathfrak{H} является G -пространством, они связаны преобразованием Кэли. На \mathfrak{H} и \mathfrak{U} из мер (13.5) получаются семейства вероятностных мер, зависящих от параметра $s \in \mathbb{C}$. На \mathfrak{H} обозначим эти меры через P_s . Замечательно, что эти меры являются квазиинвариантными относительно действия группы G . Добавляя в определение представления второй параметр, как в (13.6), получим (после переобозначения параметров) семейство представлений $T_{z,w}$

⁵⁸По определению квазиинвариантности, эти меры эквивалентны, то есть, такая ненулевая (на носителе P) функция существует. Производную $\frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)}$ можно неформально воспринимать как отношение бесконечно малого объема вокруг точки $x \cdot g$ к бесконечно малому объему вокруг точки x .

группы G в $L^2(H, P_s)$. Здесь $z, w \in \mathbb{C}$ — комплексные параметры, и $z + \bar{w} = s$. Представления $T_{z,w}$ и следует рассматривать как аналоги бирегулярного представления $U(N) \times U(N)$ в L^2 по мере Хаара на $U(N)$. Задача гармонического анализа состоит в том, чтобы получить разложение представлений $T_{z,w}$ на неприводимые.

Перейдем к сжатию. Меры P_s ($s \in \mathbb{C}$) на H также имеют представлений-челский смысл. А именно, можно рассмотреть сферические представления сжатой группы $\mathring{G} = U(\infty) \times H(\infty)$ (сферические относительно $U(\infty) \subset \mathring{G}$). Неприводимые сферические представления здесь — это в точности эргодические вероятностные меры на H относительно действия $U(\infty)$ сопряжениями. Данные меры мы обсуждали в нескольких предыдущих лекциях. Эргодические меры на H , истолкованные как сферические функции, получаются из сферических функций представлений (G, K) путем сжатия.

13.7 Задача гармонического анализа

Перейдем к задаче гармонического анализа для представлений $T_{z,w}$. Отметим, что есть также сжатая версия этой задачи, о которой скажем позже.

Дуальное пространство к группе $U(\infty)$, то есть, пространство параметров неприводимых сферических представлений (G, K) , было описано в первой части лекций [Оль09]. Оно обозначается

$$\Omega \subset \mathbb{R}^{4\cdot\infty+2}$$

и состоит из всех наборов $\omega = (\alpha^\pm, \beta^\pm, \delta^\pm)$ с условиями

$$\begin{aligned} \alpha^\pm &= (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \beta^\pm &= (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \delta^\pm &\geq 0, \end{aligned}$$

и

$$\sum_i \alpha_i^\pm + \sum_i \beta_i^\pm < \delta^\pm, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.$$

Каждой точке $\omega \in \Omega$ соответствует неприводимое сферическое представление $T^{(\omega)}$ пары (G, K) .

Представление $T_{z,w}$, зависящее от двух параметров, можно разложить на неприводимые, это аналог теоремы Петера–Вейля:

$$T_{z,w} = \int_{\Omega} T^{(\omega)} \nu_{z,w}(d\omega).$$

Здесь $\nu_{z,w}$ — вероятностная мера, которая определяется неоднозначно. Ее можно определить однозначно, если договориться, что выделенный вектор в пространстве $L^2(H, P_s)$ представления $T_{z,w}$ пары (G, K) — это единичная функция.⁵⁹ При (z, w) в общем положении этот вектор является циклическим.

⁵⁹Если не фиксировать выделенный вектор, то представление $T_{z,w}$ однозначно определяет лишь класс мер $\nu_{z,w}$ с точностью до эквивалентности.

Перейдем на уровень сжатия. Множество параметров эргодических мер на H обозначим через $\mathring{\Omega}$. Оно состоит из всех точек $\mathring{\omega} = (\alpha, \gamma_1, \delta)$, где $\alpha = (\alpha_k \in \mathbb{R})$ — последовательность, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $\delta \geq 0$ и $\sum \alpha_i^2 \leq \delta$. Меры Хуа-Пикрелла P_s на H являются инвариантами относительно действия $U(\infty)$ сопряжениями, и поэтому однозначно разлагаются по эргодическим мерам. То есть, существуют вероятностные меры $\mathring{\nu}$ на $\mathring{\Omega}$, такие, что $(P^{\mathring{\omega}})$ — эргодическая мера, отвечающая $\mathring{\omega} \in \mathring{\Omega}$

$$P_s = \int_{\mathring{\Omega}} P^{\mathring{\omega}} \mathring{\nu}_s (d\mathring{\omega}).$$

Здесь меры $\mathring{\nu}_s$ определяются совсем однозначно.

13.8 Описание мер $\nu_{z,w}$ и $\mathring{\nu}_s$ с помощью детерминантных процессов

Меры $\nu_{z,w}$ и $\mathring{\nu}_s$ — это меры на бесконечномерных пространствах Ω и $\mathring{\Omega}$, соответственно. Можно ставить вопрос, например, о поведении координаты α_1^+ , или, более общо, о совместном распределении некоторого набора координат. Однако, данные вопросы не имеют простого ответа (в случае α_1^+ , например, распределение задается с помощью решения некоторого трансцендентного уравнения). Поэтому требуется другое понимание мер $\nu_{z,w}$ и $\mathring{\nu}_s$. А именно, данные меры интерпретируются с помощью точечных процессов.

Начнем с меры $\nu_{z,w}$. Она сосредоточена на пространстве

$$\Omega = \{(\alpha^\pm, \beta^\pm, \delta^\pm)\}.$$

Забудем про δ^\pm и будем описывать лишь поведение координат α^\pm и β^\pm . При этом мы получим какую-то проекцию меры $\nu_{z,w}$. Рассмотрим проколотую прямую $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{2}\}$. Отложим на ней:

- Точки $\alpha_1^+, \alpha_2^+, \dots$ направо от точки $+\frac{1}{2}$. Таким образом, в конфигурацию попадут точки $\{\frac{1}{2} + \alpha_1^+, \frac{1}{2} + \alpha_2^+, \dots\}$.
- Аналогично, точки $\alpha_1^-, \alpha_2^-, \dots$ налево от точки $-\frac{1}{2}$.
- От точки $+\frac{1}{2}$ налево отложим точки $\beta_1^+, \beta_2^+, \dots$.
- От точки $-\frac{1}{2}$ направо отложим точки $\beta_1^-, \beta_2^-, \dots$. В силу условия $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$, в интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ не возникнет совпадающих точек.

Таким образом, получим локально конечную точечную конфигурацию на проколотой прямой $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{2}\}$. Восстановить α^\pm по точечной конфигурации можно, а β^\pm — нет, так как неясно, какие из точек в интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ отнести к β^+ , а какие — к β^- .

Мера $\nu_{z,w}$ на Ω проектируется в меру на конфигурациях на $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{2}\}$. Таким образом, возникает случайный точечный процесс. Оказывается, он является детерминантным, и его ядро можно выразить через гауссовскую гипергеометрическую функцию.

В сжатии мера $\hat{\nu}_s$ лежит на $\hat{\Omega} = \{(\alpha, \gamma_1, \delta)\}$. Забудем про γ_1 и δ , и расположим точки α_k ($k = 1, 2, \dots$) на проколоте прямой $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Они будут сгущаться к нулю, а других точек сгущения не будет. Мера $\hat{\nu}_s$ определяет точечный процесс на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, который также является детерминантным. Его ядро можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Можно показать, что сжатие здесь работает и на уровне точечных конфигураций. При этом β^\pm исчезают, а два прокола $\pm \frac{1}{2}$ в случае с Ω превращаются в один прокол в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Более общие результаты, включающие в детерминантные процессы динамику, были получены в [BF08]. Динамика здесь не имеет (пока?) представленного смысла. Динамические модели с детерминантными процессами естественно возникают в задачах теории случайных матриц.

13.9 Дизъюнктность

Представления $T_{z,w}$ пары (G, K) обобщают регулярные представления R_N пары $(U(N) \times U(N), \text{diag } U(N))$ в следующем смысле. Существует очень много вложений представления R_N в R_{N+1} . Для всех допустимых значений параметров $z, w \in \mathbb{C}$ можно определить цепочку вложений регулярных представлений

$$\dots \hookrightarrow R_N \hookrightarrow R_{N+1} \hookrightarrow \dots$$

которая зависит от z, w . Данные вложения приводят к представлению $T_{z,w}$.

Возникает вопрос, для чего требуется рассматривать целое семейство $T_{z,w}$ обобщенных регулярных представлений пары (G, K) ? Почему не рассматривать только одно, скажем, при $z = w = 0$?

Оказывается, при различных (z, w) в общем положении представления $T_{z,w}$ дизъюнкты, то есть, соответствующие им меры $\nu_{z,w}$ на Ω дизъюнкты (то есть, носители мер не пересекаются). Другими словами, представления $T_{z,w}$ являются «разными». Именно поэтому требуется рассматривать целое семейство обобщенных регулярных представлений.

Доказательство дизъюнктности представлений $T_{z,w}$ требует усилий и не извлекается из вида корреляционных ядер для мер $\nu_{z,w}$ на Ω (см. выше). В этом отличие детерминантных процессов от гауссовских мер. Сходство состоит в том, что оба класса мер управляются функцией двух переменных (или, более точно, корреляционным оператором). При этом в случае гауссовских мер вопрос о дизъюнктности решается просто и ответ можно сформулировать в терминах корреляционного оператора. Для детерминантных процессов такой ответ неизвестен.

Список литературы

- [BDJ99] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, Journal of the American Mathematical Society **12** (1999), no. 4, 1119–1178.
- [BDJ00] ———, *On the distribution of the length of the second row of a Young diagram under Plancherel measure*, Geometric And Functional Analysis **10** (2000), no. 4, 702–731, arXiv:math/9901118v1 [math.CO].
- [BF08] A. Borodin and P. Ferrari, *Anisotropic growth of random surfaces in 2+1 dimensions: fluctuations and covariance structure*, arXiv:0804.3035v2 [math-ph].
- [Bia01] P. Biane, *Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups*, International Mathematics Research Notices **2001** (2001), no. 4, 179, arXiv:math/0006111v2 [math.RT].
- [BO01] A. Borodin and G. Olshanski, *Infinite random matrices and ergodic measures*, Communications in Mathematical Physics **223** (2001), no. 1, 87–123.
- [BO07] ———, *Asymptotics of Plancherel-type random partitions*, Journal of Algebra **313** (2007), no. 1, 40–60, arXiv:math/0610240v2 [math.PR].
- [BOO00] A. Borodin, A. Okounkov, and G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, Journal of the American Mathematical Society **13** (2000), no. 3, 481–515, arXiv:math/9905032v2 [math.CO].
- [Bor09] A. Borodin, *Determinantal point processes*, arXiv:0911.1153v1 [math.PR].
- [Dei00] P. Deift, *Integrable systems and combinatorial theory*, Notices Amer. Math. Soc **47** (2000), no. 6, 631–640.
- [Dys62] Freeman J. Dyson, *Трусы стамбу в J. Math. Phys.*
- [Joh01] K. Johansson, *Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure*, Annals of Mathematics **153** (2001), no. 1, 259–296, arXiv:math/9906120v3 [math.CO].
- [Kar68] S. Karlin, *Total positivity*, Stanford University Press Stanford, CA, 1968.
- [Kra99] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, arXiv:math/9902004v3 [math.CO].

- [LR04] V. Lomonosov and P. Rosenthal, *The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras*, Linear Algebra and its Applications **383** (2004), 45–48.
- [LS77] BF Logan and L.A. Shepp, *A variational problem for random Young tableaux*, Advances in Math **26** (1977), no. 2, 206–222.
- [Mon73] HL Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Symp. Pure Math, vol. 24, 1973, pp. 181–193.
- [Odl87] AM Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Mathematics of Computation (1987), 273–308.
- [Ols08] G. Olshanski, *Difference operators and determinantal point processes*, Functional Analysis and Its Applications **42** (2008), no. 4, 317–329, arXiv:0810.3751v1 [math.PR].
- [OV96] G. Olshanski and A. Vershik, *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices*, Contemporary Mathematical Physics. F.A. Berezin's memorial volume. American Mathematical Society Translations, (Advances in the Mathematical Sciences — 31), 2, vol. 175, 1996, arXiv:math/9601215v1 [math.RT], pp. 137–175.
- [Pic87] D. Pickrell, *Measures on infinite dimensional Grassmann manifolds*, Journal of Functional Analysis **70** (1987), no. 2, 323–356.
- [Pic91] ———, *Mackey analysis of infinite classical motion groups*, Pacific J. Math **150** (1991), no. 1, 139–166.
- [Sag01] B.E. Sagan, *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Springer Verlag, 2001.
- [Sim98] B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Advances in Mathematics **137** (1998), no. 1, 82–203.
- [Sos00] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Russian Mathematical Surveys **55** (2000), no. 5, 923–975, arXiv:math/0002099v4 [math.PR].
- [AG77] Н.И. Ахиезер and И.М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*.
- [Ахи61] Н.И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*.
- [БЭ66] Г. Бейтмен and А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, 1966.

- [ВК77] А.М. Вершик and С.В. Керов, *Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга*, ДАН СССР **233** (1977), 1024–1027.
- [Вей07] Г. Вейль, *Классические группы. Их инварианты и представления*, КомКнига М., 2007.
- [Вин01] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры*, М.: Факториал пресс (2001).
- [Кер86] С. В. Керов, *Distribution of symmetry types of high rank tensors*, Записки научных семинаров ЛОМИ **155** (1986), 181–186, Англ. перевод: J. Sov. Math., 41:2 (1988), 995–999.
- [Мак84] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, М: Мир, 1984.
- [НСУ85] А.Ф. Никифоров, С.К. Суслов, and В.Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, 1985.
- [Оль89] Г. Ольшанский, *Унитарные представления бесконечномерных классических групп. Докторская диссертация*, доступно по ссылке http://www.iitp.ru/upload/userpage/52/Olshanski_thesis.pdf.
- [Оль09] Г. Ольшанский, *Асимптотическая теория представлений I. Записки лекций.*, Доступно по адресу <http://www.iitp.ru/en/userpages/88/>.
- [РС77] М. Рид and Б. Саймон, *Современные методы математической физики. Т. 1*, 1977.
- [Фул06] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, М.: МЦНМО (2006).
- [Хуа59] Ло-Кен Хуа, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, М.: Изд-во иностр. лит (1959).