RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

ABDELWAHEB REBAÏ
JEAN-MARC MARTEL

Rangements BBTOPSIS fondés sur des intervalles de proximités relatives avec qualification des préférences

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 34, nº 4 (2000), p. 449-465

<http://www.numdam.org/item?id=RO_2000__34_4_449_0>

RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **34** (2000) 449-465

RANGEMENTS BBTOPSIS FONDÉS SUR DES INTERVALLES DE PROXIMITÉS RELATIVES AVEC QUALIFICATION DES PRÉFÉRENCES (*)

par Abdelwaheb REBAÏ (1) et Jean-Marc MARTEL (2)

Communiqué par Jean-Yves JAFFRAY

Résumé. – *Dans ce travail, nous proposons une procédure de rangement des actions potentielles dans le cas où l'information sur l'importance relative des critères est de nature ordinale et les évaluations des actions potentielles sont non-cardinales ou mixtes. L'intérêt de cette procédure réside dans le fait que les logiciels standards de programmation linéaire peuvent être utilisés directement pour calculer les intervalles de proximités relatives d'où sont obtenus les rangements.*

Mots clés : BBTOPSIS, information non-cardinale, information mixte, théorie des paniers.

Abstract. – *In this work we propose a ranking procedure. This procedure uses an ordinal information about the criterion weights and a non-cardinal or mixed information for the potential actions evaluation. The advantage of this procedure is that it uses the linear programming software packages to compute the intervals of relative proximities from where the rankings are obtained.*

Keywords: BBTOPSIS, non-cardinal information, mixed information, theory of bags.

1. INTRODUCTION

Très souvent, dans les situations de choix, les critères d'évaluation sont multiples, hétérogènes, conflictuels et ils n'ont pas nécessairement tous la même importance relative. Selon Eckenrode (1965), le rangement ordinal est la méthode la plus spontanée et aussi la plus simple pour obtenir une information sur les coefficients d'importance relative des critères et selon Rebaï et Martel (1999) les informations non-cardinales ou mixtes au niveau de l'évaluation des performances des actions potentielles sont prépondérantes dans bon nombre de situations de choix.

(*) Reçu en octobre 1997.

(1) Département des Méthodes Quantitatives Appliquées, Faculté des Sciences Économiques et de Gestion, BP. 1088, Sfax 3018, Tunisie.

(2) Département Opérations et Systèmes de Décision, Faculté des Sciences de l'Administration, Université Laval, Sainte-Foy (Québec), Canada, G1K 7P4.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/00/04/$ 7.00

Parmi les procédures d'agrégation multicritère conçues spécifiquement pour s'adapter à une information ordinale concernant les importances relatives des critères et à des informations non-cardinales ou mixtes sur les évaluations des actions potentielles, on peut citer la méthode REGIME (Hinloopen *et al.* 1983 ; Hinloopen et Nijkamp 1990), les méthodes d'échelonnements multidimensionnels (Nijkamp et Voogd 1979, 1981 ; Voogd 1983), la méthode EVAMIX (Voogd 1982; 1983) et une méthode fondée sur le concept de dominance stochastique (Rietveld et Ouwersloot 1992).

Faisons observer, sans entrer dans les détails de ces procédures d'agrégation multicritère, que pour la méthode REGIME, le problème posé par les régimes dits critiques n'est pas facilement surmontable en contexte d'informations ordinales et que le processus de partionnement de l'espace des coefficients d'importance relative dits admissibles ([1]) se complique considérablement en contexte d'informations mixtes.

Par ailleurs, la quantification des informations non-cardinales ou mixtes à l'aide des méthodes d'échelonnements multidimensionnels est une opération complexe qui nécessite un nombre suffisant de degrés de liberté. En l'absence d'un tel nombre aucun résultat significatif ne peut être atteint. De plus, si l'information sur les coefficients d'importance relative des critères est de nature ordinale, un calcul précis des coordonnées de l'action potentielle idéale devient impossible.

La méthode EVAMIX, quant à elle, suppose que les différences entre les diverses actions potentielles peuvent être appréhendées par deux mesures différentes de dominance: une mesure pour les critères ordinaux et une mesure pour les critères cardinaux.

La recommandation fournie par cette méthode repose par ailleurs sur un certain nombre d'autres hypothèses dont la justification n'est pas une tâche aisée pour l'homme d'étude.

Enfin, remarquons que la méthode fondée sur le concept de dominance stochastique utilise un grand nombre de jeux stochastiques pour les coefficients d'importance relative admissibles et un grand nombre de valeurs numériques générées d'une manière aléatoire pour les diverses évaluations ordinales des actions potentielles. Cette méthode est fondée, sans justification, sur l'hypothèse de l'uniformité des distributions des coefficients d'importance relative, dans l'espace des coefficients d'importance relative admissibles, et

([1]) Un jeu de coefficients d'importance des critères est dit admissible lorsqu'il est consistant avec le classement ordinal spécifié sur les critères.

de celles des valeurs admissibles pour les évaluations des actions potentielles. En plus, toutes les valeurs générées d'une manière aléatoire ne peuvent pas être fournies directement par les logiciels commercialisés. De ce fait cette méthode n'est pas à la portée des non experts.

L'exposé sélectif que nous venons de faire est loin d'épuiser les problèmes qui sont posés par l'agrégation des informations non-cardinales ou mixtes. Il suffira pourtant ici, puisque notre objet est d'attirer l'attention sur la difficulté d'agrégation de telles informations. Nous jugeons donc que les procédures d'agrégation multicritère analysées ne peuvent pas être appliquées aisément par des non experts; et nous pensons que la procédure d'agrégation multicritère BBTOPSIS (c'est-à-dire **B**ag **B**ased **T**echnique for **O**rder **P**reference by **S**imilarity to **I**deal **S**olution, Rebaï 1993), utilisant les paniers multicritères canoniques flous de supériorité, d'infériorité ou de non-infériorité des actions potentielles et recourant aux métriques de paniers pour le calcul des mesures de séparation et de proximité relative, est plus accessible. En effet, les différentes étapes de cette procédure d'agrégation multicritère sont compréhensibles par des non experts. Cette dernière procédure d'agrégation multicritère est en quelque sorte une extension de la procédure TOPSIS de Hwang et Yoon (1981), laquelle est fondée sur l'axiome de choix de Coombs (1958). Dans cette procédure on a recours à deux points de référence: l'idéal et l'anti-idéal, et on utilise la distance Euclidienne comme mesure de proximité entre deux points dans l'espace $\mathbf{R}^{|F|}$, où F est une famille de critères et $\mathbf{R}$ est l'ensemble des réels. L'idée de départ de TOPSIS est d'effectuer la synthèse des mesures de séparation par une mesure unique: la proximité relative qui permet d'établir un rangement des diverses actions potentielles. Or, le calcul des proximités relatives à l'aide de la distance Euclidienne dans un contexte d'informations non-cardinales ou mixtes n'est pas autorisé c'est-à-dire n'est pas signifiant selon la théorie du mesurage.

Dans BBTOPSIS (Rebaï 1993) un unique jeu possibiliste de coefficients d'importance relative ([2]) est utilisé pour former les paniers multicritères canoniques flous. Ce jeu peut être défini à partir d'un jeu probabiliste déterminé par l'une des méthodes qui prennent appui sur l'espace des coefficients d'importance relative admissibles à savoir: la méthode de la valeur espérée ou la méthode de la valeur extrême (Janssen *et al.*

([2]) Par jeu possibiliste de coefficients d'importance relative on entend des nombres $\pi_h \in [0,1]$ (pour $h = 1, \ldots, |F|$), vérifiant la condition $\max \pi_h = 1$.

1990). Dans le présent travail, pour toute action potentielle, tout un sous-espace de coefficients d'importance relative admissibles est exploré pour la recherche des extremums d'une fonction objectif spécifique. L'objet de cette recherche est d'opérationnaliser cette procédure d'agrégation multicritère sans le recours à un jeu possibiliste unique de coefficients d'importance relative.

Le présent document est organisé de la manière suivante. La section 2 est consacrée à un bref aperçu de la procédure d'agrégation multicritère BBTOPSIS. Nous y montrons comment construire les paniers multicritères canoniques flous idéaux et les paniers multicritères canoniques flous anti-idéaux, comment calculer les mesures de séparation et de proximité relative et comment effectuer les rangements des actions potentielles. La section 3 est dévouée à la détermination des intervalles de proximités relatives et la section 4 à leur exploitation. Dans la section 5 nous illustrons la démarche proposée dans ce travail et enfin la section 6 vise à décrire comment émettre un jugement qualitatif sur l'intensité de préférence d'une action potentielle sur une autre action potentielle. Nous renvoyons à Rebaï (1993; 1994) pour les détails de la mathématique des paniers flous.

2. LA PROCÉDURE D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE BBTOPSIS : UN APERÇU

2.1 Paniers multicritères canoniques flous idéaux et anti-idéaux

Étant donnés un ensemble fini et stable A d'actions potentielles et une famille cohérente F de critères, nous écrivons $a >_h b$ pour indiquer qu'une action potentielle a est strictement préférable à une action potentielle b selon le critère C_h, et $a \approx_h b$ si a et b sont *ex-æquo*. Pour toute action potentielle a et pour tout critère C_h, les scores de supériorité, d'infériorité, d'équivalence et de non-infériorité sont respectivement définis dans (Rebaï 1993; 1994) par :

- le nombre des actions potentielles b auxquelles a est strictement préférable selon le critère C_h. Soit

$$S_h(a) = |\{b \in A : a >_h b\}| \quad \text{pour la supériorité ;} \tag{1}$$

- le nombre des actions potentielles b qui sont strictement préférables à a selon le critère C_h, c'est-à-dire

$$I_h(a) = |\{b \in A : b >_h a\}| \quad \text{pour l'infériorité ;} \tag{2}$$

- le nombre des actions potentielles b qui sont *ex-æquo* avec a selon le critère C_h, c'est-à-dire

$$E_h(a) = |\{b \in A : a \approx_h b\}| \quad \text{pour l'équivalence ;} \tag{3}$$

- et enfin le nombre des actions potentielles b qui ne sont pas strictement préférables à a selon le critère C_h, c'est-à-dire

$$N_h(a) = S_h(a) + E_h(a) \quad \text{pour la non-infériorité.} \tag{4}$$

Lorsque, en particulier, les évaluations des diverses actions potentielles selon certains critères sont de nature pseudo-cardinale ou cardinale, les scores précédents peuvent être définis par:

- $S_h(a) = |\{b \in A : C_h(a) - C_h(b) > \mathrm{SEUIL}_h^1(C_h(b))\}|$
- $I_h(a) = |\{b \in A : C_h(a) - C_h(b) < \mathrm{SEUIL}_h^2(C_h(b))\}|$
- $E_h(a) = |\{b \in A : \mathrm{SEUIL}_h^2(C_h(b)) \leq C_h(a) - C_h(b) \leq \mathrm{SEUIL}_h^1(C_h(b))\}|$
- et $N_h(a) = S_h(a) + E_h(a)$

où SEUIL_h^1 et SEUIL_h^2 sont respectivement des fonctions-seuils de supériorité et d'infériorité définies pour chaque critère C_h.

Pour une action potentielle « a » les divers *paniers multicritères canoniques flous* d'intérêt (Rebaï 1993 ; 1994) sont donnés par les formules (5-7) où « / » joue le rôle d'élément séparateur sans plus et où π_h désigne le coefficient possibiliste d'importance relative de C_h pour $h = 1, \ldots, |F|$.

Le panier multicritère canonique flou de supériorité noté $\mathrm{PMCF}^{>}(a)$ est défini par:

$$\mathrm{PMCF}^{>}(a) = [S_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F]. \tag{5}$$

À titre d'exemple, si $\mathrm{PMCF}^{>}(a) = [3/(1/C_1); 5/(0,9/C_2); 2/(0,7/C_3)]$ ceci veut dire que selon les critères C_1, C_2 et C_3, de coefficients possibilistes d'importance relative respectifs 1, 0,9 et 0,7, l'action potentielle a est strictement préférable à 3, 5 et 2 actions potentielles respectivement.

- Le panier multicritère canonique flou de non-infériorité noté $\mathrm{PMCF}^{\geq}(a)$ est défini par :

$$\mathrm{PMCF}^{\geq}(a) = [N_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F]. \tag{6}$$

Exemple : $\mathrm{PMCF}^{\geq}(a) = [7/(1/C_1); 8/(0,9/C_2); 2/(0,7/C_3)]$.

- Enfin, le panier multicritère canonique flou d'infériorité noté $\mathrm{PMCF}^{<}(a)$ est défini par:

$$\mathrm{PMCF}^{<}(a) = [I_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F]. \tag{7}$$

Exemple : $\mathrm{PMCF}^{<}(a) = [3/(1/C_1); 2/(0,9/C_2); 8/(0,7/C_3)]$.

Les rangements BBTOPSIS exigent la définition de paniers multicritères canoniques flous idéaux et de paniers multicritères canoniques flous anti-idéaux ; il est facile de voir que les actions potentielles idéales de supériorité et de non-infériorité auront les scores de supériorité et de non- infériorité maximums par rapport à tout critère C_h ; alors que les actions potentielles anti-idéales de supériorité et de non-infériorité auront les scores de supériorité et de non-infériorité minimums.

Les paniers multicritères canoniques flous idéaux de supériorité et de non-infériorité seront alors respectivement :

$$\mathrm{PMCF}^{+}_{>} = \left[\max_{a \in A} S_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F\right] \tag{8}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{PMCF}^{+}_{\geq} &= \left[\max_{a \in A} N_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F\right] \\ &= [|A|/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F]\end{aligned} \tag{9}$$

et les paniers multicritères canoniques flous anti-idéaux de supériorité et de non-infériorité seront

$$\mathrm{PMCF}^{-}_{>} = \left[\min_{a \in A} S_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F\right] = \varnothing \text{ (panier vide)} \tag{10}$$

et

$$\mathrm{PMCF}^{-}_{\geq} = \left[\min_{a \in A} N_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F\right]. \tag{11}$$

Par contre, le panier multicritère canonique flou idéal d'infériorité sera

$$\mathrm{PMCF}^{+}_{<} = \left[\min_{a \in A} I_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F\right] = \varnothing \text{ (panier vide)} \tag{12}$$

et le panier multicritère canonique flou anti-idéal d'infériorité

$$\mathrm{PMCF}^{-}_{<} = \left[\max_{a \in A} I_h(a)/(\pi_h/C_h); \forall C_h \in F\right]. \tag{13}$$

2.2. Rangements BBTOPSIS

2.2.1. *Mesures de séparation et mesures de proximité relative*

Si nous désirons par exemple obtenir un rangement BBTOPSIS fondé sur la supériorité, alors nous définissons pour toute action potentielle « a » les mesures de séparation par la distance entre le panier multicritère canonique flou de supériorité de « a » et le panier multicritère canonique flou idéal de supériorité, c'est-à-dire

$$d_{>}^{+}(a) = \mathrm{dis}(\mathrm{PMCF}^{>}(a); \mathrm{PMCF}_{>}^{+}), \tag{14}$$

et par la distance entre le panier multicritère canonique flou de supériorité de « a » et le panier multicritère canonique flou anti-idéal de supériorité, c'est-à-dire

$$d_{>}^{-}(a) = \mathrm{dis}(\mathrm{PMCF}^{>}(a); \varnothing) \text{ puisque } \mathrm{PMCF}_{>}^{-}(a) = \varnothing. \tag{15}$$

La proximité relative de l'action potentielle « a » à la solution idéale sera alors

$$C_{>}(a) = \frac{d_{>}^{-}(a)}{d_{>}^{+}(a) + d_{>}^{-}(a)}. \tag{16}$$

On définit de la même manière les mesures de séparation et les mesures de proximité relative dans le cas d'un rangement BBTOPSIS fondé sur la non-infériorité ou sur l'infériorité.

2.2.2. *Les étapes d'un rangement BBTOPSIS*

Les différentes étapes d'un rangement BBTOPSIS sont:

1. opter pour l'usage des S-, N- ou des I-paniers multicritères canoniques flous idéaux et anti-idéaux;
2. former le panier multicritère canonique flou associé à chaque action potentielle;
3. former le panier multicritère canonique flou idéal et le panier multicritère canonique flou anti-idéal;
4. calculer les mesures de séparation du panier multicritère canonique flou de chaque action potentielle au panier multicritère canonique flou idéal et au panier multicritère canonique flou anti-idéal;
5. calculer les proximités relatives des actions potentielles à la solution idéale;
6. ranger les actions potentielles à partir de ces mesures de proximités relatives (plus grande sera la mesure de proximité relative, meilleur sera le rang de l'action potentielle).

Pour l'étape 1, nous avons mentionné qu'on doit opter pour des S-, N-, ou des I-paniers multicritères canoniques flous idéaux et anti-idéaux. Mais la question qui vient immédiatement à l'esprit est « comment faire ce choix ? »

Nous pensons que la confiance dans un rangement BBTOPSIS dépend en bonne partie du type de panier multicritère canonique flou requis. Si le décideur n'est pas prêt à tenir compte des *ex æquo* le panier multicritère canonique flou de non-infériorité ne sera pas approprié, alors que s'il est prêt à incorporer le nombre des *ex æquo* il n'y aura aucune objection à l'utiliser. Or, la différence essentielle entre le panier multicritère canonique flou de non-infériorité et le panier multicritère canonique flou de supériorité réside dans le simple fait de prendre ou de ne pas prendre les *ex æquo* en considération. De même, la différence essentielle entre l'usage du panier multicritère canonique flou de supériorité et le panier multicritère canonique flou d'infériorité réside dans le fait de considérer l'aspect d'infériorité comme une base plus valable que celle de la supériorité, ou inversement, pour la comparaison des actions potentielles. *Ceci nous amène à conclure que décider du type de panier multicritère canonique flou à employer dépend en bonne partie de la psychologie du décideur. Ainsi les rangements obtenus dans ces diverses situations ne seront pas nécessairement les mêmes.*

3. DÉTERMINATION DES INTERVALLES DE PROXIMITÉS RELATIVES

Dès l'instant où l'information sur l'importance relative des critères est de nature ordinale tout le sous-espace des coefficients d'importance relative admissibles pour lesquels la cardinalité du panier multicritère canonique flou d'infériorité est plus petite que celle du panier multicritère canonique flou de supériorité, peut être exploré; tous les jeux de coefficients possibilistes d'importance relative appartenant à ce sous-espace ont la même chance d'être considérés. D'où l'idée de chercher pour chaque action potentielle, $a \in A$, dans le cas de la supériorité, par exemple, la proximité relative pessimiste notée $C_{>}^{\min}(a)$ (c'est-à-dire la moins élevée) et la proximité relative optimiste notée $C_{>}^{\max}(a)$ (c'est-à-dire la plus élevée). Ainsi, on peut former dans le cas de la supériorité un intervalle de proximités relatives $[C_{>}^{\min}(a); C_{>}^{\max}(a)]$ noté $C_{>}^{\text{int}}(a)$, c'est-à-dire pour tout

$$a \in A : C_{>}^{\text{int}}(a) = [C_{>}^{\min}(a); C_{>}^{\max}(a)]. \tag{17}$$

Les intervalles de proximités relatives ainsi définis peuvent être exploités de la manière que nous décrirons ultérieurement (Rebaï 1992). Commençons d'abord par voir comment ils peuvent être obtenus.

Dans le cas de la supériorité, les mesures de séparation $d^+_>(a)$ et $d^-_>(a)$ citées plus haut seront dans le cas de la *distance de la différence symétrique des paniers* (3)

$$\begin{aligned} d^+_>(a) &= \mathrm{dis}(\mathrm{PMCF}^>(a); \mathrm{PMCF}^+_>) \\ &= \sum_{1 \le h \le |F|} \left[\left(\max_{a \in A} S_h(a) \right) - S_h(a) \right] . \pi_h \end{aligned} \tag{18}$$

et

$$d^-_>(a) = \mathrm{dis}(\mathrm{PMCF}^>(a); \emptyset) = \sum_{1 \le h \le |F|} S_h(a).\pi_h, \tag{19}$$

donnant

$$d^+_>(a) + d^-_>(a) = \sum_{1 \le h \le |F|} \left(\max_{a \in A} S_h(a) \right) . \pi_h. \tag{20}$$

Il s'en suit que la mesure de proximité relative $C_>(a)$ peut se mettre sous la forme linéaire fractionnaire

$$C_>(a) = \frac{d^-_>(a)}{d^+_>(a) + d^-_>(a)} = \frac{\sum\limits_{1 \le h \le |F|} S_h(a).\pi_h}{\sum\limits_{1 \le h \le |F|} \left(\max\limits_{a \in A} S_h(a) \right) . \pi_h}. \tag{21}$$

Pour obtenir les proximités relatives optimistes et pessimistes $C^{\max}_>(a)$ et $C^{\min}_>(a)$, nous proposons de recourir au programme linéaire fractionnaire suivant dont les variables décisionnelles sont les coefficients possibilistes d'importance relative π_h, $\forall h = 1, 2, \ldots, |F|$.

$$\begin{cases} [\text{Maximiser/Minimiser}] \dfrac{\sum\limits_{1 \le h \le |F|} S_h(a).\pi_h}{\sum\limits_{1 \le h \le |F|} \left(\max\limits_{a \in A} S_h(a) \right) . \pi_h}. \\ \text{En respectant les contraintes} \\ \sum\limits_{1 \le h \le |F|} I_h(a).\pi_h \le S_h(a).\pi_h \\ 0 < \pi_{|F|} < \ldots < \pi_2 < \pi_1 < 1. \end{cases}$$

(3) Cette distance est définie dans (Rebaï 1993) par $\mathrm{dis}(A, B) = \Sigma\Sigma u.|\mathrm{Mult}_A(u/x) - \mathrm{Mult}_B(u/x)|$, lorsque x dénote l'élément, u le degré d'appartenance et $\mathrm{Mult}_A(u/x)$ (resp. $\mathrm{Mult}_B(u/x)$) la multiplicité de x avec le degré d'appartenance u dans le panier A (resp. B).

La fonction objectif de ce programme est constituée de la proximité relative linéaire fractionnaire. La première contrainte que nous imposons signifie que la cardinalité du panier multicritère canonique flou d'infériorité de l'action potentielle « a » est plus petite que celle du panier multicritère canonique flou de supériorité de cette action potentielle car nous voulons que les actions potentielles retenues soient plus « dominantes » que « dominées ». C'est cette contrainte qui permet la segmentation dichotomique de l'ensemble des actions potentielles en actions potentielles acceptables et d'autres non acceptables. Dans ce programme nous avons supposé, sans perte de généralité, que les critères d'évaluation sont rangés par ordre décroissant de leur importance relative, d'où la deuxième contrainte. Remarquons que nous pouvons traiter également toute information qui s'exprimerait à l'aide d'inéquations linéaires (*e.g.*, $\pi_h > \pi_{h+2} + \pi_{h+3}$) donnant lieu à un domaine d'admissibilité des coefficients possibilistes d'importance relative sous forme de polyèdre convexe.

En posant

$$\frac{1}{\sum_{1 \leq h \leq |F|} \left(\max_{a \in A} S_h(a) \right) .\pi_t} = t \tag{22}$$

à la manière de Charnes et Cooper (1962), le programme linéaire fractionnaire précédent devient :

$$\begin{cases} [\text{Maximiser/Minimiser}] \sum_{1 \leq h \leq |F|} S_h(a).\pi_h.t. \\ \text{En respectant les contraintes} \\ \sum_{1 \leq h \leq |F|} \left(\max_{a \in A} S_h(a) \right) .\pi_h.t = 1 \\ \sum_{1 \leq h \leq |F|} I_h(a).\pi_h.t \leq \sum_{1 \leq h \leq |F|} S_h(a).\pi_h.t \\ 0 < \pi_{|F|}.t < \ldots < \pi_2.t < \pi_1.t \leq 1. \end{cases}$$

En posant $\pi_h.t = W_h$, ce programme linéaire devient

$$\begin{cases} [\text{Maximiser/Minimiser}] \displaystyle\sum_{1 \leq h \leq |F|} S_h(a).W_h. \\ \text{En respectant les contraintes,} \\ \displaystyle\sum_{1 \leq h \leq |F|} \left(\max_{a \in A} S_h(a)\right).W_h = 1 \\ \displaystyle\sum_{1 \leq h \leq |F|} I_h(a).W_h \leq \sum_{1 \leq h \leq |F|} S_h(a).W_h \\ 0 < W_{|F|} < \ldots < W_2 < W_1 \leq 1. \end{cases}$$

En effectuant le changement de variables suivant

$$\begin{aligned} W_1 &= u_1 \\ W_2 &= u_1 - u_2 \\ W_3 &= u_1 - u_2 - u_3 \\ W_{|F|} &= u_1 - u_2 - u_3 - \ldots - u_{|F|} \end{aligned}$$

où $u_h \geq 0\,;\ h = 1, 2, \ldots, |F|$, que nous pouvons écrire d'une manière plus économique sous la forme

$$W_h = 2u_1 - \sum_{1 \leq k \leq h} u_k, h = 1, 2, \ldots, |F|, \tag{23}$$

nous obtenons l'équation (24):

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq h \leq |F|} \text{COEF}_h.W_h \\ &\quad = \left[\sum_{1 \leq h \leq |F|} \text{COEF}_h\right].u_1 - \sum_{2 \leq k \leq |F|} \left[\sum_{k \leq h \leq |F|} \text{COEF}_h\right].u_k. \end{aligned} \tag{24}$$

Maintenant, en appliquant le résultat précédent aux coefficients

- $\text{COEF}_h = S_h(a)$
- $\text{COEF}_h = \max\limits_{a \in A} S_h(a)$
- $\text{COEF}_h = I_h(a) - S_h(a)$

le programme linéaire précédent peut s'écrire sous la forme opérationnelle suivante, laquelle peut être traitée par les logiciels standards de programmation linéaire tel que LINDO (Linear Interactive and Dicrete Optimizer) :

$$[\text{Maximiser / Minimiser}] \left[\sum_{1\le h\le |F|} S_h(a)\right].u_1 - \sum_{2\le k\le |F|}\left[\sum_{k\le h\le |F|} S_h(a)\right].u_k,$$

en respectant les contraintes

$$\left[\sum_{1\le h\le |F|}\left(\max_{a\in A} S_h(a)\right)\right].u_1 - \sum_{2\le k\le |F|}\left[\sum_{k\le h\le |F|}\left(\max_{a\in A} S_h(a)\right)\right].u_k = 1$$

$$\left[\sum_{1\le h\le |F|}(I_h(a) - S_h(a))\right].u_1 - \sum_{2\le k\le |F|}\left[\sum_{k\le h\le |F|}(I_h(a) - S_h(a))\right].u_k \le 0$$

$$u_1 \le 1$$

$$u_1 - \sum_{2\le h\le |F|} u_h \ge \varepsilon$$

$$u_h \ge 0,\ h = 1, 2, \ldots, |F|.$$

4. EXPLOITATION DES INTERVALLES DE PROXIMITÉS RELATIVES

Le programme linéaire précédent fournit pour chaque action potentielle « a » une proximité relative optimiste $C_{>}^{\max}(a)$ (pessimiste $C_{>}^{\min}(a)$) dans le cas de maximisation (minimisation) de la fonction objectif. Les intervalles de proximités relatives $C_{>}^{\text{int}}(a)$, $a \in A$ servent pour ranger les actions potentielles selon l'ordre total défini par $[a; b] >_{\text{int}} [c; d]$ ssi $(b > d)$ ou $[(b = d)$ et $(a > c)]$ (Ponsard 1977).

5. EXEMPLE ILLUSTRATIF

Considérons un ensemble A de 4 actions potentielles α, β, χ et δ dont les évaluations selon 5 critères $C_1, C_2, \ldots, C_5$ où $\pi_1 > \pi_2 > \pi_3 > \pi_4 > \pi_5$ sont consignées au tableau 1.

Supposons, par ailleurs, que le sens des préférences est croissant sur chacun des critères, c'est-à-dire que les valeurs les plus élevées sont les plus préférées (sauf pour C_3).

TABLEAU 1
Matrice d'évaluation des actions potentielles.

	Critères				
Actions potentielles	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
α	TE	B	2	pas O.K	Au tour de 20
β	E	Me	1	O.K	Plus de 20
χ	E	Me	2	pas O.K	Entre 10 et 20
δ	M	B	4	pas O.K	Au tour de 20

où TE, E et M sont les acronymes de Très Elevé, Elevé et Modéré ; B, Me les acronymes de Bonne et Médiocre.

Le tableau 1 permet de former la matrice suivante des scores de supériorité :

TABLEAU 2
Matrice des scores de supériorité des actions potentielles.

	Critères				
Actions potentielles	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
α	3	2	1	0	1
β	1	0	3	3	3
χ	1	0	1	0	0
δ	0	2	0	0	1

Donnant $\max_{a \in A} S_1(a) = 3$; $\max_{a \in A} S_2(a) = 2$; $\max_{a \in A} S_3(a) = 3$; $\max_{a \in A} S_4(a) = 3$; $\max_{a \in A} S_5(a) = 3$.

La matrice des scores d'infériorité est :

TABLEAU 3
Matrice des scores d'infériorité des actions potentielles.

	Critères				
Actions potentielles	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
α	0	0	1	1	1
β	1	2	0	0	0
χ	1	2	1	1	3
δ	3	0	3	1	1

Nous obtenons alors les programmes linéaires qui suivent :

Programme linéaire associé à l'action potentielle α :

$$[\text{Maximiser / Minimiser}]\ 7u_1 - 4u_2 - 2u_3 - u_4 - u_5.$$

En respectant les contraintes

2) $14u_1 - 11u_2 - 9u_3 - 6u_4 - 3u_5 = 1$

3) $-4u_1 + u_2 - u_3 - u_4 \leq 0$

4) $u_1 \leq 1$

5) $u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 \geq \varepsilon$

6) $u_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Programme linéaire associé à l'action potentielle β :

$$[\text{Maximiser / Minimiser}]\ 10u_1 - 9u_2 - 9u_3 - 6u_4 - 3u_5.$$

En respectant les contraintes

2) $14u_1 - 11u_2 - 9u_3 - 6u_4 - 3u_5 = 1$

3) $-7u_1 + 7u_2 + 9u_3 + 6u_4 + 3u_5 \leq 0$

4) $u_1 \leq 1$

5) $u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 \geq \varepsilon$

6) $u_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Programme linéaire associé à l'action potentielle χ :

$$[\text{Maximiser / Minimiser}]\ 2u_1 - u_2 - u_3.$$

En respectant les contraintes

2) $14u_1 - 11u_2 - 9u_3 - 6u_4 - 3u_5 = 1$

3) $6u_1 - 6u_2 - 4u_3 - 4u_4 - 3u_5 \leq 0$

4) $u_1 \leq 1$

5) $u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 \geq \varepsilon$

6) $u_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Programme linéaire associé à l'action potentielle δ :

$$[\text{Maximiser / Minimiser}]\ 3u_1 - 3u_2 - u_3 - u_4 - u_5.$$

En respectant les contraintes

2) $14u_1 - 11u_2 - 9u_3 - 6u_4 - 3u_5 = 1$

3) $5u_1 - 2u_2 - 4u_3 - u_4 \leq 0$

4) $u_1 \leq 1$

5) $u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 \geq \varepsilon$

6) $u_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Pour $\varepsilon = 0,01$, les intervalles suivants de proximités relatives ont été obtenus à l'aide de LINDO

- $C_{>}^{\text{int}}(\alpha) = [0,500 ; 1]$;
- $C_{>}^{\text{int}}(\beta) = [0,333 ; 0,714]$;
- $C_{>}^{\text{int}}(\chi) = [\varnothing ; \varnothing]$; (c'est-à-dire pas de solutions réalisables) ;
- $C_{>}^{\text{int}}(\delta) = [0,333 ; 0,333]$.

Il en résulte que le rangement BBTOPSIS des diverses actions potentielles sera : $\alpha > \beta > \delta >_{||} \chi$ où nous employons le signe $>_{||}$ pour séparer les actions potentielles qui satisfont à la contrainte 2) des actions potentielles qui la violent (c'est-à-dire qui n'ont pas de solutions réalisables).

6. RANGEMENT BBTOPSIS AVEC QUALIFICATION DE LA PRÉFÉRENCE

En plus, ayant rangé les diverses actions potentielles par ordre décroissant de leurs intervalles de proximités relatives, nous indiquons maintenant comment émettre de surcroît un jugement qualitatif sur l'« intensité » de préférence d'une action potentielle x sur une autre action potentielle y. Nous proposons pour ce faire les six gradations présentées au tableau 4, en définissant les positions des proximités relatives pessimistes et optimistes des deux actions potentielles et la gradation à retenir.

TABLEAU 4
Gradations des jugements comparatifs.

Gradation	Conditions d'attribution
Préférence extrêmement forte de x sur y	$x >_{\|\|} y$
Très forte préférence de x sur y	$C_{>}^{\min}(x) > C_{>}^{\max}(y)$
Forte préférence de x sur y	$(C_{>}^{\min}(x) > C_{>}^{\min}(y))$ et $(C_{>}^{\max}(x) > C_{>}^{\max}(y))$
Préférence modérée de x sur y	$(C_{>}^{\min}(x) = C_{>}^{\min}(y))$ et $(C_{>}^{\max}(x) > C_{>}^{\max}(y))$
Faible préférence de x sur y	$(C_{>}^{\min}(x) > C_{>}^{\min}(y))$ et $(C_{>}^{\max}(x) = C_{>}^{\max}(y))$
Pas de préférence de x sur y	$(C_{>}^{\min}(x) = C_{>}^{\min}(y))$ et $(C_{>}^{\max}(x) = C_{>}^{\max}(y))$

Il est facile de voir en appliquant les gradations de ce tableau que dans le cas de notre exemple les qualifications des préférences seront les suivantes :

une *forte préférence* de α sur β, une *préférence modérée* de β sur δ et une *préférence extrêmement forte* de δ sur χ.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons proposé une procédure de rangement des actions potentielles dans le cas où l'information sur l'importance relative des critères est de nature ordinale et les évaluations des actions potentielles sont non-cardinales ou mixtes. L'intérêt de cette procédure réside dans le fait que les logiciels standards de programmation linéaire peuvent être utilisés pour calculer les intervalles de proximités relatives d'où sont tirés les rangements.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier les rapporteurs pour leurs commentaires très constructifs.

RÉFÉRENCES

A. Charnes et W.W. Cooper, Programming with linear fractional functionals. *Naval Res. Logist. Quarterly* **9** (1962) 181-185.

C.H. Coombs, On the use of Inconsistency of preferences in Psychological Measurent. *J. Experiment. Psychology* **55** (1958) 1-7.

R. Eckenrode, Weighting multiple criteria. *Management Sci.* **12** (1965) 180-193.

E. Hinloopen et P. Nijkamp, Qualitative multiple criteria choice analyses: The dominant regime method. *Quantity and Quality* **24** (1990) 37-56.

E. Hinloopen, P. Nijkamp et P. Rietveld, Qualitative discrete multiple criteria choice models in regional planning. *Regional Science and Urban Economics* **13** (1983) 77-102.

C.L. Hwang et K. Yoon, *Multiple Attribute Decision-Making Methods and Applications: A state of the Art Survey.* Springer-Verlag, New York (1981).

R. Janssen, P. Nijkamp et P. Rietveld, Qualitative multicriteria methods in the Netherlands, édité par *Multiple criteria decision aid.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1990) 383-409.

P. Nijkamp et H. Voogd, The use of psychometric techniques in evaluation procedures. *Papers of the Regional Science Association* **42** (1979) 119-138.

P. Nijkamp et H. Voogd, New multicriteria methods for physical planning by means of multidimensional scaling techniques, édité par Y.Y. Haïmes et J. Kindler, *Water and land resource systems.* Pergamon press (1981) 19-30.

C. Ponsard, Hiérarchie des places centrales et graphes phi-flous. *Environment and Planning A* **9** (1977) 1233-1252.

A. Rebaï, FLEXCHOM: A qualitative MADM method based on specialized weightings of attributes, *Journées d'Économétrie et de Recherche Opérationnelle.* Sfax (1992).

A. Rebaï, BBTOPSIS: A bag based technique for order preference by similarity to ideal solution. *Fuzzy Sets and Systems* **60** (1993) 143-162.

A. Rebaï, Canonical fuzzy bags and bag fuzzy measures as a basis for MADM with mixed non cardinal data. *European J. Oper. Res.* **78** (1994) 34-48.

A. REBAÏ et J.-M. MARTEL, *Que doit on attendre d'une procédure d'agrégation multicritère pour des évaluations non-cardinales ou mixtes ?* INFOR (à paraître).

P. RIETVELD et H. OUWERSLOOT, Ordinal data in multicriteria decision making, a stochastic dominance approach to siting nuclear power plants. *European J. Oper. Res.* **56** (1992) 249-262.

H. VOOGD, Multicriteria evaluation with mixed qualitative and quantitative data. *Environment and planning* B **9** (1982) 221-236.

H. VOOGD, *Multicriteria evaluation for urban and regional planning*. Pion, London (1983).