LIFTEZ LES SYLOWS! UNE SUITE À "SOUS-GROUPES PÉRIODIQUES D'UN GROUPE STABLE"

BRUNO POIZAT[1] AND FRANK O WAGNER[2]

Abstract. If G is an omega-stable group with a normal definable subgroup H, then the Sylow-2-subgroups of G/H are the images of the Sylow-2-subgroups of G.

Zusammenfassung. Sei G eine omega-stabile Gruppe und H ein definierbarer Normalteiler von G. Dann sind die Sylow-2-Untergruppen von G/H Bilder der Sylow-2-Untergruppen von G.

Si H est un sous-groupe normal d'un groupe fini G, les p-sylows de G/H sont les images des p-sylows de G ; c'est une conséquence directe de la conjugaison des sylows, et du fait que l'ordre d'un sylow est la puissance maximale de p divisant l'ordre du groupe ambiant.

Nous généralisons ici cette propriété au cas où H est définissable, $p = 2$, et G est oméga-stable, ou même seulement stable et menu, ou bien est stable et périodique; ou encore si H est toujours définissable, p premier quelconque, mais G stable et résoluble par fini.

Ces hypothèses nous ont permis dans [3] de montrer que les sylows de G (comme ceux de G/H!) sont localement finis et conjugués. Si nous renonçons à la seconde hypothèse du Théorème 14 (ii) de cet article, c'est que nous n'allons pas jusqu'à prétendre que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se relève en un 2-sylow de $\mathbb{Z}$!

Nous faisons paraître cette note par remord de n'avoir pas fait cette remarque alors (elle attire l'attention sur la difficulté de la démonstration du Théorème 14(ii) !), et aussi parce que ce résultat simple fait défaut dans un manuel sur le sujet comme [1].

Les cardinaux infinis manquant de valuation p-adique, nous procédons de manière fort différente en commençant par relever les p-groupes nilpotents. Nous montrons tout d'abord que si G/H lui-même est un p-groupe d'exposant fini, il se relève sur n'importe quel sylow S de G.

En effet, nous savons qu'alors G/H est nilpotent; soit H_1 le centre de G modulo H: c'est également un groupe définissable. Nos hypothèses impliquent que tout élément de G/H se relève en un p-élément de G: il suffit de voir que tout élément g de G est congru modulo H à un élément d'ordre fini; c'est évident dans le cas périodique; dans le cas menu, cela vient de ce que g est contenu dans un groupe abélien définissable A, et que $A \cap H$ se décompose en un groupe divisible et un groupe d'exposant fini [3,

Research at MSRI is supported in part by NSF grant DMS-9701755.

[1] La unua geskribisto varmege dankas pro la gia gastemo la Instituton de Sercado de Matematikaj Sciencoj (MSRI) de la urbo Berkeley, en kiu estis prilabora tiu artikoleto en la monato januaro de jaro mil nau cent nau dek ok post la naskigo Krista.

[2] Heisenberg-Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Wa 899/2-1).

Lemme 13]. Donc tout élément central dans G/H, se relevant dans un conjugué de S, a bien un antécédent dans S lui-même. Cela règle le cas où G/H est commutatif; pour le cas général, nous procédons par induction sur la classe de nilpotence de G/H, si bien que nous savons que tout élément de G/H_1 se relève dans S. Tout élément g de G s'écrit donc comme produit d'un élément de S et d'un élément de H_1, ce dernier s'écrivant comme produit d'un élément de S et d'un élément de H; finalement, g est bien congru modulo H à un élément de S.

Il nous suffit maintenant de montrer que tout sylow Σ de G/H s'exprime comme réunion d'une suite croissante $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$ de sous-groupes définissables d'exposant fini; en effet, nous relèverons d'abord Σ_1 sur un sylow S_1 de son image réciproque, puis Σ_2 sur un sylow S_2 de son image réciproque contenant S_1, et ainsi de suite.

Changeant alors de notation, nous considérons un sylow S d'un groupe G satisfaisant nos hypothèses. S est localement fini et nilpotent par fini; il est donc possible de trouver un sous-groupe définissable nilpotent G_1 de G, normalisé par S, tel que l'intersection S_1 de S et de G_1 soit d'indice fini dans S. Comme S normalise l'unique sylow S_2 de G_1, il le contient, et en fait $S_1 = S_2$: S_1 est cet unique sylow de G_1. D'après le Lemme 3 de [3], le quotient de S_1 par son centre est d'exposant fini p^a. On trouve alors un entier b, facilement calculable en fonction de p^a et de la classe de nilpotence de S_1, tel que pour tout $n \geq b$ les éléments de S_1 d'ordre au plus p^n forment un groupe Π_n (voir [4, Lemma 1.2.20]; dans le cas menu, on le voit de façon plus directe en observant que le centre de S_1 est engendré par un groupe d'exposant fini et un groupe divisible, si bien que S_1 lui-même est engendré par un groupe d'exposant fini et un groupe central divisible.) Π_n est définissable car c'est en fait l'ensemble des éléments d'ordre divisant p^n de G_1. Notons Γ un groupe, fini, engendré par un système de représentants de S/S_1; comme Π_n est caractéristique dans S_1, il est normalisé par Γ, et engendre avec ce dernier un groupe définissable Σ_n, puisque Π_n est d'indice fini dans Σ_n. S est bien l'union des Σ_n.

On observe que le résultat de [2] interdit aux Σ_n d'être tous normaux, et a fortiori caractéristiques, dans S quand ce dernier n'est pas nilpotent.

References

[1] Alexandr Borovik & Ali Nesin, 'Groups of finite Morley Rank', Oxford, Clarendon Press, 1994

[2] Jamshid Derakhshan & Frank O Wagner, 'Nilpotency in groups with chain condition', à paraître dans Oxford Quarterly Journal

[3] Bruno Poizat & Frank O Wagner, 'Sous-groupes périodiques d'un groupe stable', J. Symb. Logic, 385–400, 1993

[4] Frank O Wagner, 'Stable groups', London Math. Soc. Lecture Notes 240, Cambridge University Press, 1997

Bruno Poizat, Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard (Lyon-1), bâtiment 101 (mathématiques), 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69621 Villeurbanne, France

E-mail address: poizat@desargues.univ-lyon1.fr

Frank O Wagner, Mathematical Institute, University of Oxford, 24–29 St Giles', Oxford OX1 3LB, UK

E-mail address: wagner@maths.ox.ac.uk