# ATTRACTION DU SOLEIL ET DE LA LUNE

Par

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**

INGÉNIEUR GÉNÉRAL À L'OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE
BP 156, 1080 TUNIS-CEDEX, TUNISIE
VERSION 1. MAI 2009

***A la mémoire de notre cher ami et collègue Noureddine YANGUI***

**Résumé**

Cette note donne les éléments sur l'attraction du soleil et de la lune. Elle a été inspirée de la lecture de l'ouvrage de Helmut Moritz et Ivan I. Muller intitulé *'Earth Rotation : Theory and Observation'* [1] qui peut être un cours d'introduction sur les marées.

Il comprend les chapitres suivants :

1. Le Potentiel de marée luno-solaire
2. Les Termes zonaux, sectoriaux et tesseraux

## 1 Le Potentiel de Marée Luno-solaire

La précession, la nutation, le mouvement du pôle et les marées terrestres ont tous une commune cause : c'est l'attraction gravitationnelle du soleil et de la lune. Ainsi le potentiel de cette attraction, le potentiel luno-solaire ou potentiel des marées joue un rôle fondamental dans tous ces phénomènes.

Pour la suite, nous considérons que la Terre est une sphère de rayon $R$ =6371 km (valeur moyenne de $R$). Soit l'attraction de la lune en un point $P$ de la surface terrestre (le cas du soleil se traite de la même façon). Le potentiel de l'attraction au point $P$ est :

$$v = \frac{mG}{l} \tag{1}$$

avec :
- $m$ la masse de la Lune,
- $G$ constante de gravitation universelle,
- $l$ distance PL=distance Terre-Lune.

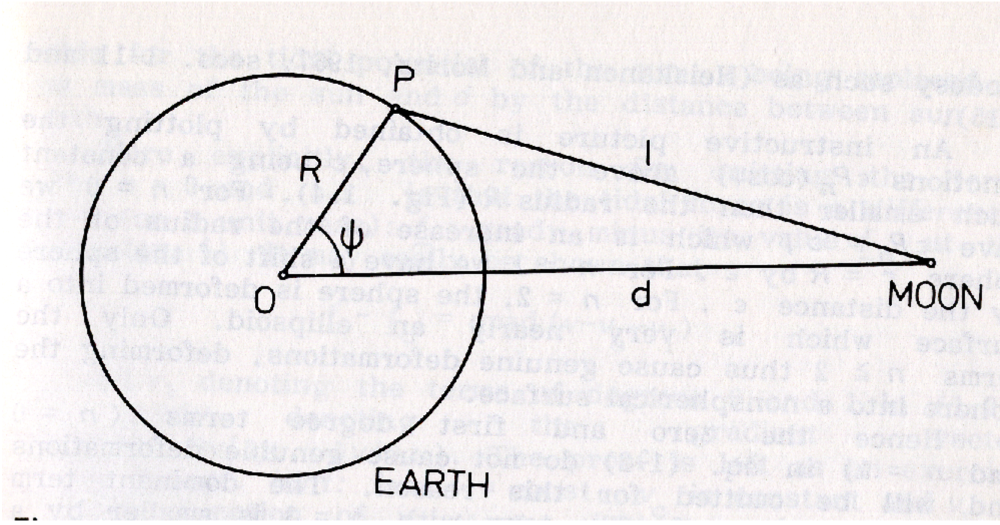


Fig. 1: Système Terre-Lune

Vu la distance Terre-Lune, la Lune est considérée comme un point de masse $m$, or $l$ vérifie :

$$l^2 = R^2 + d^2 - 2Rdcos\psi \tag{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2-2Rdcos\psi}} = \frac{1}{d}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{d}\right)cos\psi}}$$

$$= \frac{1}{d}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n P_n(cos\psi)\right) \tag{3}$$

où $P(cos\psi)$ est le polynôme de Legendre de degré $n$ en $cos\psi$. Par suite (1) devient :

$$v = mG\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{R^n}{d^{n+1}}P_n(cos\psi) \tag{4}$$

On a :

$$P_0(cos\psi) = 1; \;\; P_1(cos\psi) = cos\psi; \;\; P_2(cos\psi) = \frac{3}{2}cos^2\psi - \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$P_3(cos\psi) = \frac{5}{2}cos^3\psi - \frac{3}{2}cos\psi \tag{6}$$

Soit $\epsilon$ une constante $< R$, construisons la fonction $\epsilon P_n(cos\psi)$ au dessus de la sphère de rayon $R$.

Pour $n$=0, on a $\epsilon P_0(cos\psi) = \epsilon$ soit la figure avec $r = R + \epsilon_0(cos\psi)$.

Pour $n$=1, on a $\epsilon P_1(cos\psi) = \epsilon cos\psi \Rightarrow -\epsilon \leq \epsilon_1(cos\psi) \leq \epsilon$.

Pour $n$=2, on a $\epsilon P_2(cos\psi) = \epsilon(\frac{3}{2}cos^2\psi - \frac{1}{2})$. On voit que pour $n \geq 2$, les

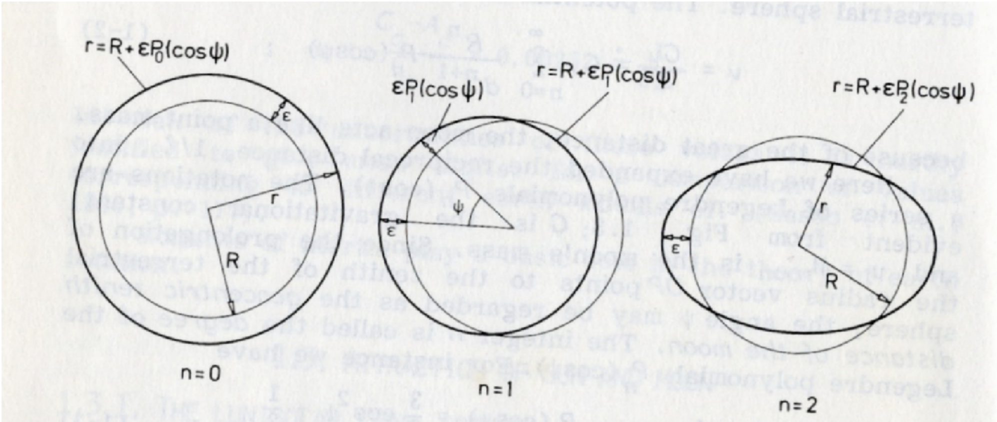


Fig. 2: Les Figures Obtenues par $\epsilon P_2(cos\psi)$

déformations ne laissent pas invariante la sphère de rayon $R$.

$$v_0 = \frac{mGP_0(cos\psi)}{d} = \frac{mG}{d} \tag{7}$$

$$v_1 = \frac{mGP_1(cos\psi)}{d^2} = \frac{mGRcos\psi}{d^2} \tag{8}$$

$$v_2 = \frac{mGP_2(cos\psi)}{d^3} = \frac{mGR^2}{d^3}(\frac{3}{2}cos^2\psi - \frac{1}{2}) \tag{9}$$

$$v_3 = \frac{mGP_3(cos\psi)}{d^4} = \frac{mGR^3}{d^4}(\frac{5}{2}cos^3\psi - \frac{3}{2}cos\psi) \Rightarrow$$
$$|v_3| \leq \frac{R}{d}|v_2| \approx 0.016v_2 \tag{10}$$

Donc, on peut négliger $v_3 \ll v_2$ et garder que $v_2$. Le terme $v_2$ est considéré comme le potentiel de marée.

Plus explicitement, les raisons d'omettre les termes $v_0$ et $v_1$ est que la force des marées est une force différentielle (par unité de masse).

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad}v - \mathbf{f}_0 \tag{11}$$

où $\mathbf{f}_0$ est la force au centre, en effet, $\mathbf{f} - \mathbf{f}_0 = \mathbf{grad}(v - v_0 - v_1)$. Comme :

$$v_0 = \frac{mG}{d} = constante \Rightarrow \ \mathbf{grad}v_0 = 0$$

et :

$$v_1 = \frac{mGR}{d^3}cos\psi \ \text{ or } \ cos\psi = \frac{\mathbf{OP.OL}}{\|\mathbf{OP}\|.\|\mathbf{OL}\|} = \frac{\mathbf{OP.OL}}{R.d}$$

Si $\mathbf{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{OL} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3$, on obtient :

$$cos\psi = \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{Rd}$$

D'où :

$$v_1 = \frac{mGR}{d^2}\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{Rd} = \frac{mG(xx_0+yy_0+zz_0)}{d^3} \Rightarrow \mathbf{grad}v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{mGx_0}{d^3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{mGy_0}{d^3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z} = \dfrac{mGz_0}{d^3} \end{pmatrix} \tag{12}$$

On a :

$$\mathbf{grad}v_1 = \frac{mG.OL}{d^3} = \frac{mG}{d^2}\frac{OL}{d} \Rightarrow \mathbf{f}_0 = \mathbf{grad}v_1 = \text{la force au point O} \tag{13}$$

Nous notons qu'en cas du soleil, le terme $f_0 = m'G/d^3$ avec $m'$ la masse du soleil et $d'$ la distance terre-soleil, est responsable de la rotation de la terre autour du soleil.

## 2 Les Termes Zonaux, Sectoriaux et Tesseraux

Exprimons maintenant $P_2(cos\psi)$ en fonction des coordonnées géocentriques d'un point P et du centre de la lune. Dans un repère fixé à la terre, le point P a pour coordonnées $(\theta, \lambda)$ avec :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = 90^\circ - \varphi \tag{14}$$

où $\varphi$ est la latitude géographique. De même, la lune a pour coordonnées $(\Theta, \Lambda)$ avec :

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \delta = 90^\circ - \delta \tag{15}$$

où $\delta$ est la déclinaison de la lune et $\Lambda$ l'angle horaire de la lune.

En appliquant la relation fondamentale de la trigonométrie sphérique, on a dans le triangle $P - Ple - L$ :

$$cos\psi = cos\theta cos\Theta + sin\theta sin\Theta cos(\Lambda - \lambda) \tag{16}$$

Pour développer $P(cos\psi)$, nous utilisons la formule de décomposition (W.A. Heiskenen & H. Moritz, [2]) soit :

$$\begin{aligned} P_2(cos\psi) = P_2(cos\theta cos\Theta + sin\theta sin\Theta cos(\Lambda - \lambda)) = P_2(cos\theta)P_2(cos\Theta) + \\ + \frac{1}{3}\left[R_{21}(\theta,\lambda)R_{21}(\Theta,\Lambda) + S_{21}(\theta,\lambda)S_{21}(\Theta,\Lambda)\right] + \\ + \frac{1}{12}\left[R_{22}(\theta,\lambda)R_{22}(\Theta,\Lambda) + S_{22}(\theta,\lambda)S_{22}(\Theta,\Lambda)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

$$\text{où } R_{nm} = P_{nm}(cos\theta)cosm\lambda \;\; ; \;\; S_{nm} = P_{nm}(cos\theta)sinm\lambda \tag{18}$$

Soit :

$$R_{21}(\theta,\lambda) = P_{21}(cos\theta)cos\lambda$$

Or $P_{21}(cos\theta) = 3sin\theta cos\theta$ d'où :

$$R_{21}(\theta,\lambda) = 3sin\theta cos\theta cos\lambda \quad (19)$$

$$R_{21}(\Theta,\Lambda) = 3sin\Theta cos\Theta cos\Lambda \quad (20)$$

$$S_{21}(\theta,\lambda) = P_{21}(cos\theta)sin\lambda = 3sin\theta cos\theta sin\lambda \quad (21)$$

$$S_{21}(\Theta,\Lambda) = P_{21}(cos\Theta)sin\Lambda = 3sin\Theta cos\Theta sin\Lambda \quad (22)$$

D'où :

$$\begin{aligned} P_2(cos\psi) = \frac{1}{3}\left[P_{21}(cos\theta)cos\lambda P_{21}(cos\Theta)cos\Lambda + P_{21}(cos\theta)sin\lambda P_{21}(cos\Theta)sin\Lambda\right] + \\ + \frac{1}{12}\left[P_{22}(cos\theta)cos2\lambda P_{22}(cos\Theta)cos2\Lambda + P_{22}(cos\theta)sin2\lambda P_{22}(cos\Theta)sin2\Lambda\right] \quad (23) \end{aligned}$$

ou encore :

$$P_2(cos\psi) = \frac{1}{3}P_{21}(cos\theta)P_{21}(\Theta)cos(\Lambda-\lambda) + \frac{1}{12}P_{22}(cos\theta)P_{22}(cos\Theta)cos2(\Lambda-\lambda) \quad (24)$$

D'où :

$$\begin{aligned} v_2 = \frac{mGR^2}{d^3}\left(P_2(cos\theta)P_2(\Theta) + \frac{1}{3}P_{21}(cos\theta)P_{21}(\Theta)cos(\Lambda-\lambda)\right) \\ + \frac{mGR^2}{d^3}\left(\frac{1}{12}P_{22}(cos\theta)P_{22}(cos\Theta)cos2(\Lambda-\lambda)\right) \quad (25) \end{aligned}$$

Soit :

$$v_2 = v_{20} + v_{21} + v_{22}$$

avec :

$$\begin{aligned} v_{20} &= \frac{mGR^2}{d^3}P_{20}(cos\theta)P_{20}(cos\Theta) \Longrightarrow \text{ Partie zonale} \\ v_{21} &= \frac{mGR^2}{3d^3}P_{21}(cos\theta)P_{21}(cos\Theta)cos(\Lambda-\lambda) \Longrightarrow \text{ Partie Tesserale} \\ v_{22} &= \frac{mGR^2}{12d^3}P_{22}(cos\theta)P_{22}(cos\Theta)cos2(\Lambda-\lambda) \Longrightarrow \text{ Partie Sectorielle} \quad (26) \end{aligned}$$

$\lambda$ est constante (position du point) et $\Lambda$ variable (mouvement de la lune) a une période de 24 heures. D'où :

$$v_{20} = \frac{mGR^2}{d^3}P_{20}(cos\theta)cos\Theta = \frac{mGR^2}{d^3}cos\theta sin\delta \quad (27)$$

$\Theta = \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta$ déclinaison de la lune $\Longrightarrow$ période 1 mois $\Rightarrow$ marée à long terme.

$v_{21} \rightarrow \Lambda \rightarrow$ période de 24 heures $\Rightarrow$ responsable de la marée journalière.

Comme :

$P_{21}(cos\Theta) = 3sin\Theta cos\Theta = \frac{3}{2}sin2\Theta = \frac{3}{2}sin2(\frac{\pi}{2} - \delta) = \frac{3}{2}sin(\pi - 2\delta) = -\frac{3}{2}sin2\delta \rightarrow$ période un demi mois.

$v_{22} \longrightarrow 2\Lambda \longrightarrow$ période une demi-journée $\Rightarrow$ responsable de la marée demi journalière.

## Références

[1] **H. Moritz and I.I. Mueller**. 1988. *Earth Rotation : Theory and Observation*.Ungar Publishing Compagny, New York.

[2] **W.A. Heiskanen, H. Moritz**. 1967. *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco. Reprint,1979. Institute of Theoretical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.

## Table des matières