УДК 517.987.5:519.218.865

Лемешко Є. І.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080i2018p21-24

ІСНУВАННЯ РІВНОВАЖНИХ СТАНІВ У ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ПРИТЯГАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Поняття інтерактивної складної системи є основним інструментом у побудові математичних моделей для розв'язання сучасних проблем цивілізаційного розвитку. Таким, зокрема, є поняття складної динамічної системи з притягальною взаємодією. Проблема пошуку та досягнення компромісного стану для опонентів на спільній території існування має різні варіанти постановки задачі і вибору конфліктної взаємодії. У цій роботі сформульовано та доведено теорему про існування граничного стану в динамічній системі з притягальною взаємодією в термінах щільностей.

Ключові слова: компроміс, опоненти, притягальна взаємодія, конфлікт, щільність, динамічна система, оптимальність, граничний стан.

Вступ

Сучасний розвиток науки характеризується потребою вивчення різноманітних складних процесів і явищ. На сьогодні дослідження складних систем є одним із найдієвіших способів дослідження сучасного світу. Моделі біології та екології, фізичні моделі, а також різні економічні та соціальні моделі — це типові приклади динамічних систем. На основі теорії конфлікту створюються й досліджуються моделі складних систем, встановлюються закони й важливі формули конфліктної взаємодії, прогнозується динаміка змін та визначаються рекомендації для уникнення чи досягнення певного результату. Метою цієї роботи є дуже стислий опис основ теорії динамічних систем, а також нової, перспективної для досліджень та застосувань, моделі динамічної системи конфлікту. Актуальність цього дослідження полягає в удосконаленні інструментарію побудови та пошуку застосувань абстрактних моделей у повсякденному житті. Розглянуто нову динамічну модель із притягальною взаємодією: докладно описано динамічну систему конфлікту в термінах щільностей та надано доведення теореми про існування граничного стану.

Базові означення теорії моделювання динамічної системи конфлікту

Передусім, під поняттям *система* далі ми розуміємо скінченну (або нескінченну) множину функціональних, подібних у певному сенсі елементів і відношень між ними, виокремлених із середовища відповідно для певної мети в межах визначеного часового інтервалу.

Означення 1. *Складна система* — динамічна система, що містить у собі компоненти із відносно незалежною поведінкою.

У математичному моделюванні динамічних систем можна виділити *три основні частини*:

- *емпірична частина* містить фактичні дані, отримані в експериментах і спостереженнях;
- *теоретична частина* розвиває основні концепції, що дають змогу об'єднати й пояснити з єдиних позицій емпіричні закономірності та явища;
- *математична частина* конструює моделі для перевірки основних теоретичних концепцій, а також методи обробки експериментальних даних, планування експериментів і спостережень.

Означення 2. *Динамічні системи* (з погляду застосувань) — системи, що під впливом зовнішніх та внутрішніх чинників змінюють з часом свій стан.

Означення 3. *Динамічна система конфлікту (ДСК)* — це складна система, яка об'єднує кілька (не менше двох) компонент (які, своєю чергою, також можуть бути динамічними системами), еволюція в часі яких деформується під дією конфліктної взаємодії. Закон (відображення) конфліктної динаміки всієї системи містить інформацію про стан окремих компонент у кожен момент часу.

Означення 4. *Стан* — сукупність значень параметрів системи в певний момент часу. Взаємодія між компонентами у складних системах є *конфліктною* (тобто наявна суперечність та конфронтація), що є причиною нелінійних законів поведінки.

Взаємодія між опонентами: *відштовхування*, *притягання*.

Означення 5. *Рівноважний стан* — компромісний розподіл простору існування і життєвих ресурсів між незнищенними опонентами.

Теорема про існування граничного стану в динамічних системах із притягальною взаємодією в термінах щільностей

В. Д. Кошманенко у 2016 році опублікував монографію [1] про новий підхід до побудови динамічної системи конфлікту, що ґрунтується на інтерпретації опонентів у вигляді імовірнісних розподілів на спірній території. Далі буде розглянуто підхід до побудови системи в термінах щільностей.

Задача полягає в дослідженні поведінки траєкторій мір μ^N, ν^N при $N \to \infty$ на основі конкретної формули конфліктного перетворення $*$.

Нехай $\Omega, M(\Omega), *$ позначає динамічну систему конфлікту з притягальною взаємодією. Тут Ω — простір конфлікту, $M(\Omega)$ — множина розподілів опонентів на Ω; $*$ — деяке нелінійне відображення в $M(\Omega)$. Далі, $\Omega = [0,1]$, а $M(\Omega)$ — простір імовірнісних мір на $[0,1]$. Маємо дві ймовірнісні абсолютно неперервні міри $\mu, \nu \in M_{ac}([0,1])$, такі, що:

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \rho(x) d\lambda(x),$$
$$\nu(\Delta) = \int_\Delta \sigma(x) d\lambda(x),$$

де $\Delta \in B(\Omega)$.

Припускаємо, що щільності $\rho(x)$, $\sigma(x)$ є неперервними. Зауважимо, що простір Θ можна подати у вигляді об'єднання двох просторів:

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

де

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \rho(x) \geq \sigma(x)\},$$
$$\Omega_- = \{x \in \Omega \mid \rho(x) < \sigma(x)\}.$$

Траєкторії $\{\mu^N, \nu^N\} \xrightarrow{*,N} \{\mu^{N+1}, \nu^{N+1}\}$ задано в термінах щільностей мір:

$$\begin{cases} \rho^{N+1}(x) = \dfrac{1}{z^N}\big[\rho^N(x)(1+\theta^N) + \tau^N(x)\big], \\ \sigma^{N+1}(x) = \dfrac{1}{z^N}\big[\sigma^N(x)(1+\theta^N) + \tau^N(x)\big], \end{cases} \tag{1}$$

$x \in [0,1]$, $N = 0, 1, \ldots$, $\rho^0 = \rho$, $\sigma^0 = \sigma$.

Дійсна функція $\theta(\rho, \sigma)$ є аналогом мультиплікативного гамільтоніана системи (математично є білінійним додатним функціоналом на просторі мір). В (1) покладаємо:

$$\Theta = \int_\Omega \sqrt{\rho^N(x)\sigma^N(x)}\, d\lambda(x) \geq 0, \tag{2}$$

де λ — міра Лебега;

$$\tau^N(x) = \min\big\{\sigma^N(x), \rho^N(x)\big\}. \tag{3}$$

Нормувальний знаменник:

$$z^N = 1 + \Theta^N + W^N > 0, \tag{4}$$
$$W^N = \int_\Omega \tau^N(x) d\lambda(x) > 0.$$

З наведених означень величин z^N, Θ^N, τ^N випливає, що σ^N, ρ^N є неперервними щільностями мір μ^N, ν^N, $\forall N = 1, 2, \ldots$

Теорема. *Для довільної пари початкових мір μ, ν існує граничний (компромісний) стан*

$$\rho^\infty(x) = \lim_{N\to\infty} \rho^N(x), \quad \sigma^\infty(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma^N(x),$$
$$\rho^\infty(x) = \sigma^\infty(x) = \frac{\tau(x)}{W},$$

де $\tau(x) = \min\{\rho(x), \sigma(x)\}$, $W = \tau(\Omega)$.

Доведення. Розглянемо ситуацію для фіксованого x. Нехай точка $x = [0,1]$ така, що $\rho^{N+1}(x) > \sigma^{N+1}(x)$. Доведемо, що $\rho^\infty = \sigma^\infty$; спочатку проведемо аналіз різниці

$$\rho^{N+1}(x) - \sigma^{N+1}(x) \tag{5}$$

при зростанні N, врахувавши (1):

$$\begin{aligned} &\rho^{N+1}(x) - \sigma^{N+1}(x) = \\ &\quad = \frac{\rho^N(x)(1+\theta^N(x)) + \tau^N(x)}{z^N} - \\ &\quad - \frac{\sigma^N(x)(1+\theta^N(x)) + \tau^N(x)}{z^N} = \\ &\quad = \frac{(1+\theta^N(x))(\rho^N(x) - \sigma^N(x))}{z^N} = \\ &\quad = \frac{(z^N - W^N)(\rho^N(x) - \sigma^N(x))}{z^N} = \\ &\quad = (\rho^N(x) - \sigma^N(x))\Big(1 - \frac{W^N}{z^N}\Big). \end{aligned} \tag{6}$$

За (4):

$$1 - \frac{W^N}{z^N} = 1 - \frac{W^N}{1 + \theta^N(x) + W^N}.$$
$$\theta^N \geq 0, \quad W^N < 1 + \theta^N + W^N, \quad \frac{W^N}{z^N} < 1.$$

З цього випливає, що зі збільшенням N різниця між заданими щільностями зменшуватиметься.

Далі дослідимо, чи прямує (5) до скіченного значення. Вираз (6) можемо записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\rho^{N+1}(x) - \sigma^{N+1}(x) = \\ &\quad = (\rho^0(x) - \sigma^0(x)) \prod_{l=0}^{N}\Big(1 - \frac{W^l}{z^l}\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

Припускаємо, що ряд з (7) збігається до 1. У такому разі потрібно, аби

$$\frac{W^l}{z^l} \to 0.$$

З виразів (3) та (1) маємо:

$$\tau^{l+1}(x) = \frac{\tau^l(x) + \tau^l(x)\theta^l + \tau^l(x)}{z^l} = \\ = \tau^l(x)\frac{1+\theta^l+1}{1+\theta^l+W^l}.$$

Позначимо множник

$$\frac{1+\theta^l+1}{1+\theta^l+W^l} = k^l,$$

тоді $\tau^{l+1}(x) = \tau^l(x)k^l$. Очевидно, що $k^l > 1$, $\tau^{l+1}(x) > \tau^l(x)$. З цього випливає, що графік $\tau^l(x)$ (відповідно, і W^l) зростатиме зі збільшенням l.

Робимо висновок, що припушення (7) хибне, оскільки

$$\frac{W^l}{z^l} \nrightarrow 0.$$

Взагалі кажучи:

$$\nexists c \in (0,1) : \frac{W^l}{z^l} \to c.$$

Тоді

$$\frac{W^l}{z^l} \to 1, \quad \prod_{l=1}^{N}(1 - \frac{W^l}{z^l}) \to 0, \quad \forall N$$

Як результат:

$$\rho^\infty - \sigma^\infty \to 0, \quad \rho^\infty = \sigma^\infty. \tag{8}$$

Тепер доведемо існування границі; для цього дослідимо $\rho^{\Delta(N+1)}(x)$ та $\sigma^{\Delta(N+1)}(x)$:

$$\rho^{N+1}(x) - \rho^N(x) = \frac{\tau^N(x) - W^N\rho^N(x)}{z^N};$$
$$\sigma^{N+1}(x) - \sigma^N(x) = \frac{\tau^N(x) - W^N\sigma^N(x)}{z^N} = \\ = \frac{\tau^N(x) - W^N\tau^N(x)}{z^N}.$$

Оскільки $0 < W^N < 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{\tau^N(x) - W^N\rho^N(x)}{z^N} < 0, \\ \frac{\tau^N(x) - W^N\tau^N(x)}{z^N} > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

З (8) та (9) робимо висновок, що існують границі:

$$\rho^\infty = \lim_{N\to\infty} \rho^N(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma^N(x) = \sigma^\infty. \tag{10}$$

Знайдемо граничне значення. Відомо, що $\tau(x)$ не є нормованою (оскільки $0 < W < 1$). Очевидно, що

$$\rho^\infty = \sigma^\infty = \tau^\infty.$$

З цього робимо висновок, що $W^\infty \to 1$. Тоді:

$$\lim_{N\to\infty} \tau^N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\tau^N(x)}{W^N}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{N+1}(x)}{W^{N+1}} &= \frac{\tau^{N+1}(x)}{\int_{[0,1]} \tau^{N+1}(x)d\lambda(x)} = \\ &= \frac{\dfrac{\tau^N(x)(1+\theta^N+1)}{1+\theta^N+W^N}}{\displaystyle\int_{[0,1]} \frac{\tau^N(x)(1+\theta^N+1)}{1+\theta^N+W^N}\, d\lambda(x)} = \\ &= \frac{\tau^N(x)}{\int_{[0,1]} \tau^N(x)d\lambda(x)} = \\ &= \frac{\tau^N(x)}{W^N} = \ldots = \frac{\tau^0(x)}{W^0}. \end{aligned} \tag{11}$$

Переходячи до границі, робимо висновок, що вираз (11) не залежить від часу. Отримаємо в результаті:

$$\lim_{N\to\infty} \rho^N(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma^N(x) = \\ = \lim_{N\to\infty} \frac{\tau^N(x)}{W^N} = \frac{\tau^0(x)}{W^0}.$$

На цьому доведення існування граничного стану для випадку, коли $\rho^N(x) > \sigma^N(x)$, можна вважати завершеним. Граничний стан для протилежного випадку ($\rho^N(x) \le \sigma^N(x)$) також існує та дорівнює знайденому вище. Доведення існування граничних станів (10) на проміжку, довжина якого $< \infty$, є очевидним.

Підґрунтям майбутніх досліджень щодо доведеної теореми може стати пошук прикладного застосування.

Список літератури

1. Koshmanenko V. The Spectral Theory of Conflict Dynamical Systems / V. Koshmanenko. — Kyiv : Naukova dumka, 2016. — 287 p.
2. Koshmanenko V. Existence theorems of the ω-limit states for conflict dynamical systems / V. Koshmanenko // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — Vol. 20, no. 4. — P. 379–390.
3. Khan S. M. M. Segregation through conflict / Salam Md. Mahbubush Khan, Kazuyuki Ikko Takahashi // Advances in Applied Sociology. — 2013. — Vol. 3, no. 8. — P. 315–319.

E. Lemeshko

THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM STATES IN DYNAMIC SYSTEMS WITH ATTRACTIVE INTERACTION

Nowadays, science is characterized by needs of the study of various complex processes and phenomena's. Today's research of complex and dynamical systems is one of the most advanced ways of research and evolution of the modern world. Models of biology and ecology, physical models, various economic and social models are typical examples of dynamic systems.

The concept of an interactive complex system in modern science is a main tool for construction of mathematical models for solving modern civilization problems and development. The dynamical systems approach to conflict is relatively new, but it has beginning in different research fields. Theory of dynamic systems helps us to understand the experiments, build the mathematical model of iterations and examine behavior and relations between opponents, like distribution of resources and territory, population growing etc.

This is a challenging problem of finding and achieving a compromise state for opponents on a common territory has different options to define the task and to choose conflict interaction. In 2016, the monograph by V. Koshmanenko where was introduced new approach for dynamic system of conflict that based on interactions of the opponents in the form probability distribution in the disputed area was published. In particular, presented the concept of a complex dynamic system with attractive interaction.

The relevance of this research is improving new dynamical system and researching for a new application of abstract models in everyday life. In this paper briefly fundamentals of the theory of dynamical systems described and the theorem on the existence of a equilibrium state in a the new, perspective for research, dynamical system with attractive interaction in terms of probability distributions (measures) and their densities, formulated and proved.

Keywords: compromise, opponents, attractive interaction, conflict, density, dynamical system, optimality, boundary condition.

Матеріал надійшов 13.06.2018