# LE GEOIDE ET LES SYSTEMES D'ALTITUDES

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**

**Ancien Ingénieur Général Géographe**
**à l'Office de la Topographie et du Cadastre**

**Abstract :** In this paper, we give the different definition of heights and the corrected terms to take in consideration. An example is presented on how to correct a line of the spirit leveling by introducing gravity observations.

**Résumé :** Dans cet article, nous donnons les différentes définitions des altitudes et les termes corrigés à prendre en considération. Un exemple est présenté sur la manière de corriger une ligne de nivellement de précision en introduisant des observations de gravité.

Décembre 2020

Version 2.

abenhadjsalem@gmail.com

## Table des matières

# LE GEOIDE ET LES SYSTEMES D'ALTITUDES

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ancien Ing. Général**

**A l'Office de la Topographie et de la Cartographie (OTC)**

**Résumé**

Ce papier représente les notes rédigées à partir de l'action de formation donnée à l'OTC, du 11 au 20 juin 1984, sur le thème " Les Satellites Doppler ".

## 1 Le Champ de Pesanteur

### 1.1 Introduction

Le phénomène fondamental qui régit la forme de la Terre est la pesanteur. Elle est le résultat de l'attraction newtonienne du corps terrestre et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre autour de son axe. Voyons ce-ci en détail.

La force newtonienne, pour la masse ponctuelle est écrite sous la forme :

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1}$$

où :
- $G$ la constante de gravitation universelle,
- $M, m$ les masses des corps,
- $r$ la distance des masses ponctuelles.

La force centrifuge est donnée par :

$$f = m\omega^2 rcos\varphi \tag{2}$$

où $\omega$ est la vitesse angulaire de rotation de la Terre. On peut calculer la composante verticale de la force centrifuge avec la formule :

$$f_v = fcos\varphi = m\omega^2 rcos^2\varphi \tag{3}$$

Sous l'action de la pesanteur, un fil à plomb au repos se met en équilibre suivant la verticale physique : c'est la définition même de la verticale en un point.

Si l'on considérait un ensemble de fils à plomb disposés à la suite des uns des autres, ils dessinaient dans l'espace une courbe gauche que l'on appelle **ligne**

**de force** du champs de pesanteur.

La courbure et la torsion de cette courbe sont très petites de l'ordre d'une fraction de seconde par kilomètre, mais elles ne sont pas tout à fait négligeables dans certains cas.

Nous pouvons exprimer la pesanteur par les expressions suivantes :

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{grad}W \tag{5}$$

La différence entre la force newtonienne et la force centrifuge c'est la force de la pesanteur :

$$P = F - f_v \tag{6}$$

On appelle l'accélération de la pesanteur ou la pesanteur :

$$g = k\int_T \frac{dm}{r^2} - \omega^2 rcos\varphi \tag{7}$$

Le déplacement $dr$ de la masse homogène sphérique $m$ dans le champ de la pesanteur d'une masse $M$ produit le travail élémentaire :

$$dL = P.dr \tag{8}$$

Le travail total d'une force de masse $m$ de la distance $r$ à l'infini est donné par l'intégrale :

$$L = \int_r^{+\infty} PdR \tag{9}$$

Divisée par la masse $m$, nous obtenons la valeur du potentiel de la pesanteur :

$$W = \frac{1}{m}\int_r^{+\infty} Pdr \tag{10}$$

Dans le cas d'une masse homogène sphérique $m$, nous obtenons :

$$W = k\frac{m}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \tag{11}$$

L'intégration de cette formule n'est pas possible car nous ne connaissons pas la distribution de la masse dans la Terre. La distance entre deux surfaces équipotentielle est donnée par :

$$dR = -\frac{dW}{g} \tag{12}$$

## 1.2 Le géoïde

La surface des liquides et des fluides se met en équilibre perpendiculairement à la verticale. Si on considérait un ensemble fluide recouvrant toute la Terre, il définissait donc une surface de niveau de la pesanteur.

La surface moyenne du niveau des mers, abstraction faite des marées et corrigée des variations, définissait une surface de niveau unique pour le monde entier. On peut définir d'autres surfaces de niveau de proche en proche à partir d'un point quelconque pris comme origine sur une verticale donnée, par la condition que cette surface soit en tout point perpendiculaire à toutes les autres verticales.

Ces surfaces de niveau successives que l'on peut numéroter sont des surfaces fermées qui s'enveloppent les unes les autres. Par exemple, les surfaces de même pression atmosphérique (isobares) sont théoriquement des surfaces de niveau.

Comme par définition, une surface de niveau est normale aux lignes de force et que ces lignes sont des courbes gauches, les surfaces de niveau ne sont pas parallèles entre elles, c'est-à-dire que la distance de deux surfaces de niveau n'est pas constante, ce qui reste constant c'est le travail qu'il faut accomplir contre la pesanteur pour déplacer une masse d'un point donné de ces surfaces à un point quelconque d'une autre de celles-ci.

**Définition 1.1.** *On appelle géoïde la surface de niveau qui coincide avec la surface moyenne des mers et qui se prolonge sous les continents par la condition d'y rester normale à toutes les lignes de force.*

On peut dans ces conditions considérer que la Terre est consituée par le géoïde, surmontée du relief dont l'altitude au dessus du niveau moyen de la mer sera par définition égale à la distance qui le sépare du géoïde. L'expérience prouve que le géoïde s'écarte très peu d'un ellipsoïde de révolution parceque le géoïde a une forme mathématique très compliquée, alors nous utilisons en géodésie la surface mathématique à savoir l'ellipsoïde de révolution.

## 2 Systèmes d'Altitudes et Déviation de la Verticale

Nous avons vu précédemment que la distance de deux surfaces équipotentielles est donnée : par

$$dR = -\frac{dW}{g}$$

c'est-à-dire que la différence de potentiel de deux points $A$ et $B$ s'exprime par la formule suivante :

$$\Delta W_{AB} = -g.dh \tag{13}$$

Cette différence peut être évaluée pour une masse unité par :

$$\Delta W_{AB} = \sum_{A}^{B} g.dh \tag{14}$$

où $g$ est l'accélération de la pesanteur mesurée en chaque point du trajet et $dh$ l'élément vertical qui précisement se mesure à l'aide du niveau.

## 2.1 Les Altitudes Dynamiques

**Définition 2.1.** *L'altitude dynamique dérive des côtes géopotentielles par la formule :*

$$H_B^d = \frac{W_0 - W_B}{\gamma_0(45°)} = \frac{1}{\gamma_0(45°)} \int_0^B g.dh \tag{15}$$

*où $\gamma_0(45°)$ est la pesanteur normale à l'altitude zéro sous la latitude géodésique $\varphi = 45°$.*

Pour la différence des altitudes des points $A$ et $B$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_B^d - H_A^d = \int_A^B \frac{g}{\gamma_0(45°)} dh &= \int_A^B \left(1 + \frac{g - \gamma_0(45°)}{\gamma_0(45°)}\right) dh \\ &= \int_A^B dh + \int_A^B \frac{g - \gamma_0(45°)}{\gamma_0(45°)} dh \end{aligned} \tag{16}$$

En pratique, on utilise la formule suivante :

$$\boxed{H_B^d - H_A^d = \sum_A^B \Delta h_i + \sum_A^B \frac{g_i - \gamma_0(45°)}{\gamma_0(45°)} \Delta h_i} \tag{17}$$

où le deuxième terme du membre à droite est la correction dynamique.

## 2.2 Les Altitudes Orthométriques

Le concept de l'altitude orthométrique cherche à revenir à la définition géométrique litérale de l'altitude en tant que distance point-surface du géoïde comptée selon la normale. Comme la différence des potentiels d'un point $B_0$ sur le géoïde et d'un point $B$ sur le terrain vaut :

$$W_0 - W_B = \int_{B_0}^B g.dh = g_B^m H_B \tag{18}$$

avec $g_B^m$ la pesanteur moyenne entre les points $B$ et $B_0$.

**Définition 2.2.** *On écrit l'équation qui définit l'altitude orthométrique par :*

$$H_B^o = \frac{1}{g_B^m} \int_0^B g.dh \tag{19}$$

Pour la différence des altitudes des points $A$ et $B$, nous obtenons :

$$H_B - H_A = \int_A^B dh + \frac{g_B - g_B^m}{g} H_B - \frac{g_A - g_A^m}{g} H_A - \frac{1}{g} \int_A^B dg \tag{20}$$

avec $g$ la valeur moyenne de la pesanteur dans la région. En pratique, nous utilisons la formule suivante :

$$H_B - H_A = \sum_A^B \Delta_i + \frac{\chi}{R}(H_A^2 - H_B^2) - \frac{1}{g}\sum_A^B H_i \Delta g_i \tag{21}$$

$$\text{avec} \quad \chi = \frac{\sigma}{\sigma_m} \tag{22}$$

- $\sigma$ : densité de la croûte terrestre,
- $\sigma_m$ : densité moyenne de la Terre,
- $R$ : rayon moyen de la Terre.

Quand on ne dispose pas des valeurs gravimétriques, on remplace $g$ et $\Delta g$ par les valeurs $\gamma$ et $\Delta\gamma$ de la pesanteur normale et la différence des altitudes sera :

$$\boxed{H_B - H_A = \sum_A^B \Delta h_i - 0.0053 sin2\varphi_m.H_m\Delta\varphi} \tag{23}$$

Avec $\Delta\varphi$ l'amplitude en latitude géodésique.

## 2.3 Les Altitudes Normales ou de Molodensky

Elles sont définies de la façon suivante :

**Définition 2.3.** *En un point $B$ connu par sa position géodésique dont on connait par conséquent sa latitude géodésique, on appellera altitude normale la quantité :*

$$H_B^n = \frac{1}{\gamma_B^m}\sum_{B_0}^B g.dh \tag{24}$$

La différence des altitudes entre deux points $A$ et $B$ est :

$$\boxed{H_B^n - H_A^n = \sum_A^B \Delta h_i + \frac{1}{\bar{\gamma}_{AB}}(\gamma_{0_B} - \gamma_{0_A})H_{AB} + \frac{1}{\bar{\gamma}_{AB}}\sum_A^B (g_0 - \gamma_0)_i \Delta h_i} \tag{25}$$

avec :
- $\bar{\gamma}_{AB} = \gamma_0^{\varphi_m} - 0.15mgals.H_{AB}$,
- $H_{AB}$ l'altitude moyenne des points $A$ et $B$,
- $\gamma_{0_B}, \gamma_{0_A}$ la pesanteur normale respectivement de $B$ et de $A$ à l'altitude zéro,
- $(g_0 - \gamma_0)_0$ l'anomalie à l'air libre,
- $g_0 = g + 0.3086H$

# 3 Références

1. Helmut Moritz & and Ivan I. Mueller. *Earth Rotation :Theory and Observation.* Ungar Publishing Compagny. New York. 1988.

2. Bernhard Hofmann-Wellenhof & Helmut Moritz. *Physical Geodesy*, ISBN-10 3-211-23584-1, Springer Wien New-York, 422 pages, 157–172 (2005).

## A Annexes

Soit le repère $OXYZ$ tel que $O$ soit le centre de gravité de la Terre et $OZ$ son axe de rotation. Le plan $OXY$ contient le méridien de Greenwich.

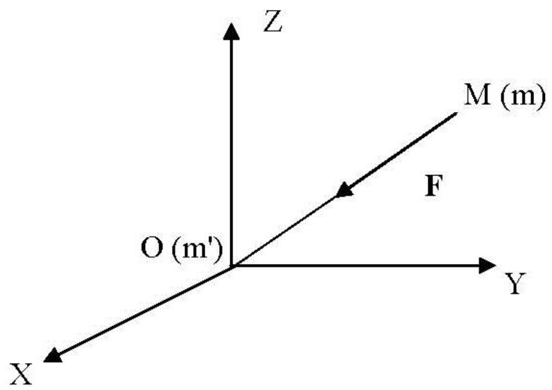


Fig. 1: Le Repère 3D

### A.1 Le Champ du Potentiel

On appelle champ du potentiel la fonction scalaire $V$ définie par :

$$V = \frac{Gmm'}{r} = V\left(X, Y, Z\right) \tag{26}$$

### A.2 Gradient

On appelle gradient d'une fonction scalaire $U(X, Y, Z)$ le vecteur noté $\boldsymbol{gradU}$ et de composantes :

$$\boldsymbol{grad}U = \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \tag{27}$$

Si on pose :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{28}$$

Alors :

$$\boldsymbol{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{-r}}{r^3} \tag{29}$$

Calculons le gradient de la fonction scalaire donnée par l'équation (26) c'est-à-dire le champ du potentiel, on a :

$$\boldsymbol{grad}V = \boldsymbol{grad}\left(\frac{Gmm'}{r}\right) = Gmm'\boldsymbol{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -Gmm'\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{30}$$

Remarquons si on pose :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{31}$$

On a $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire porté par $\boldsymbol{OM}$ et dans la direction $\boldsymbol{OM}$. L'expression de la force $\boldsymbol{F}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{n} = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{grad}V = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n} \tag{33}$$

D'où :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad}V \tag{34}$$

On dit que la force $\boldsymbol{F}$ dérive du champ de potentiel $V$.

## A.3 Le Champ Réel ou Champ du Potentiel de la Pesanteur

Un point $M(X, Y, Z)$ de masse unité est soumis au potentiel $V$ de gravitation et au potentiel $\Phi$ de la force centrifuge due à la rotation de la terre.

L'expression de $V$ est :

$$V = G\iiint_{Terre}\frac{dm'}{r} \tag{35}$$

Malheureusement, cette expression n'est pas calculable car nous ignorons la distribution des masses à l'intérieur de la Terre.

L'expression du potentiel $\Phi$ de la force centrifuge est donnée par :

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\omega^2 \tag{36}$$

où $\omega$ est la vitesse de la rotation de la Terre.

**Définition A.1.** *On appelle Potentiel du champ réel $W$ ou potentiel de la pesanteur la somme du potentiel $V$ et $\Phi$ :*

$$W = V + \Phi \tag{37}$$

**Définition A.2.** *On appelle vecteur de gravité le vecteur $\boldsymbol{g}$ tel que :*

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{grad}W \tag{38}$$

$g$ mesure la gravité ou la pesanteur, a la dimension d'une accélération et

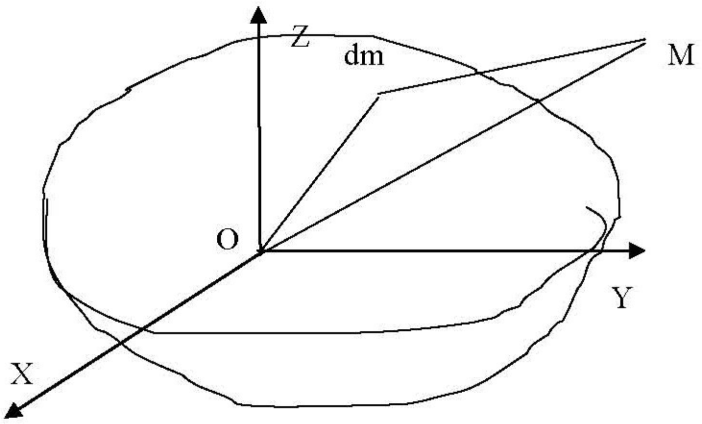


Fig. 2: Le Potentiel

exprimée en $m/s^2$(Unité Système International) ou en $cm/s^2$ ($1cm/s^2 = 1gal$ en hommage à Galilée[1]). $g$ mesure 978 $gals$ à l'équateur et 983 $gals$ aux pôles.

## A.4 Calculs de corrections des altitudes

On a observé une ligne de nivellement de précision où on a mesuré les valeurs de l'accélération terrestre dans les points caractéristiques du terrain :

| Numéro du point | Latitude 49° | Altitude approximative en m | $g$ en mgal |
|---|---|---|---|
| $A$ | 20.3′ | 739.49 | 980 816.2 |
| 1 | 19.3′ | 764.92 | 980 809.9 |
| 2 | 18.8′ | 823.10 | 980 798.8 |
| 3 | 18.6′ | 798.52 | 980 802.9 |
| 4 | 17.9′ | 827.58 | 980 797.2 |
| 5 | 17.7′ | 914.51 | 980 782.6 |
| 6 | 17.4′ | 912.91 | 980 762.0 |
| $B$ | 17.2′ | 915.01 | 980 778.5 |

Tab. 1: Tableau des Calculs 1

En utilisant les formules des corrections (17-23-25), on a le tableau suivant :

1. Galileo Galilei, dit Galilée : Astronome et physicien italien (Pise 1564-Arcetri 1642).

| Numéro du point | $\Delta h_i$ | $g_i$ | $g_i - \gamma_0^{45°}$ | $H_i$ | $\Delta g_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | | | |
| | $+25.43$ | $980\,813.0$ | $197.7$ | $752.20$ | $-6.3$ |
| 1 | | | | | |
| | $+58.18$ | $980\,804.4$ | $188.5$ | $794.01$ | $-11.1$ |
| 2 | | | | | |
| | $-24.58$ | $980\,800.8$ | $184.9$ | $810.80$ | $4.1$ |
| 3 | | | | | |
| | $29.06$ | $980\,800.0$ | $184.1$ | $813.05$ | $-5.7$ |
| 4 | | | | | |
| | $86.93$ | $980\,789.9$ | $174.0$ | $871.05$ | $-14.6$ |
| 5 | | | | | |
| | $-1.6$ | $980\,772.3$ | $156.4$ | $913.71$ | $-20.6$ |
| 6 | | | | | |
| | $+2.1$ | $980\,770.2$ | $154.3$ | $913.96$ | $+16.5$ |
| $B$ | | | | | |

Tab. 2: Tableau des Calculs 2

On a les données et les formules :

$$\sigma = 2.7 \quad ; \sigma_m = 5.52 \quad ; R = 6.37 \times 10^6 \, m$$

$$Correction\, Dynamique\ = C.D = \sum_A^B \frac{g_i - \gamma_0(45°)}{\gamma_0(45°)} \Delta h_i \tag{39}$$

$$Correction\ \ Orthométrique = C.O = \frac{\chi}{R}(H_A^2 - H_B^2) - \frac{1}{g}\sum_A^B H_i \Delta g_i \tag{40}$$

$$Pas\ de\ données\ gravimétriques,\ Correction\ Orthométriques\ (sans\, g) = $$

$$C.O_g = -0.0053 sin2\varphi_m H_m \Delta\varphi \tag{41}$$

$$Correction\ Normale\ ou\ de\ Molodensky\ = \frac{\gamma_{0_B} - \gamma_{0_A}}{\bar{\gamma}_{AB}} H_{AB} + \sum_A^B \frac{(g_0 - \gamma_0)_i}{\bar{\gamma}_{AB}} \Delta h_i \tag{42}$$

Avec :

$$\bar{\gamma}_{AB} = \gamma_0(\varphi_m) - 0.15^{mgal} H_{AB}$$

$$g_0 = g + 0.3086 H$$

$$\gamma_0(\varphi) = 978030(1 + 0.005302 sin^2\varphi - 0.000007 sin^2 2\varphi)$$

$$H_{AB} = \frac{(H_A + H_B)}{2}$$

| Numéro du point | $g_0$ | $\gamma_0(\varphi)$ | $g_0 - \gamma_0$ | $(g_0 - \gamma_0)_i$ | $\Delta h_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 981 044.4 | 981 007.2 | +37.2 | | |
| | | | | +38.9 | +25.43 |
| 1 | 981 046.4 | 981 005.8 | +40.6 | | |
| | | | | +44.2 | +58.18 |
| 2 | 981 052.8 | 981 005.0 | +47.8 | | |
| | | | | +46.2 | −24.58 |
| 3 | 981 049.3 | 981 004.7 | +44.6 | | |
| | | | | +46.8 | +29.06 |
| 4 | 981 052.6 | 981 003.6 | +49.0 | | |
| | | | | +55.2 | +86.93 |
| 5 | 981 064.8 | 981 003.4 | +61.4 | | |
| | | | | +51.1 | −1.06 |
| 6 | 981 043.7 | 981 002.9 | +40.8 | | |
| | | | | +49.6 | +2.10 |
| $B$ | 981 060.9 | 981 002.6 | +58.3 | | |

Tab. 3: Tableau des Calculs 3

D'où les valeurs numériques :

$$C.D = +32.6\,mm \quad C.O = +19.2\,mm \quad C.O_g = 3.9\,mm$$

$$\gamma_{AB} = \gamma_0(\varphi_m) - 0.15H_{AB} = 981005 - 124 = 980881\,mgals$$

$$C.N = +12.7\,mm$$

## Table des figures

## Liste des tableaux