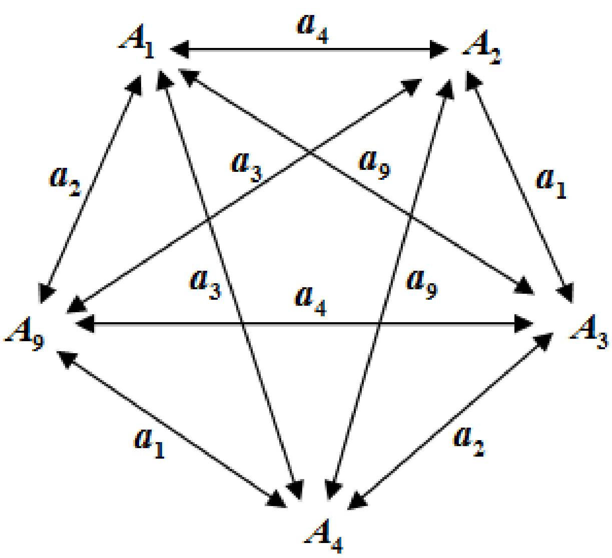
The theory of cyclic isomorphism
(Теория циклического изоморфизма).

Franz Hermann
(Франц Герман)
franz.h-n@yandex.ru

In this paper, we introduce the notion of cyclic isomorphism of subgroups of some finite abstract group. Examples of matrix representation of such a simple isomorphism are shown on the example of Clifford-Pauli matrices
(В данной статье вводится понятие циклического изоморфизма подгрупп некоторой конечной абстрактной группы. Показаны примеры матричного представления такого простейшего изоморфизма на примере матриц Клиффорда-Паули).



Франц Герман

Теория циклического изоморфизма

franz.h-n@yandex.ru

Общая теория

В данной работе рассматривается свойство изоморфных подгрупп некоторой абстрактной группы ***G***, которое мы называем циклическим изоморфизмом. А также приводится пример матричного представления такого циклического изоморфизма.

Определение:

Если для ***k*** изоморфных подгрупп A_1, A_2, ..., A_k некоторой группы ***G*** существуют преобразования:

$$a_1A_2a_1^{-1} = A_3,\;\; a_2A_3a_2^{-1} = A_4,\;\; \ldots,\;\; a_{k-1}A_ka_{k-1}^{-1} = A_1,\;\; a_kA_1a_k^{-1} = A_2,$$

где a_i - изоморфные элементы соответствующих подгрупп A_i, то такое преобразование будем называть циклическим изоморфизмом.

Приступим к поискам циклического изоморфизма среди подгрупп 2-го порядка. Таблица Кэли для таких групп имеет вид (Рис. 1).

	a_0	a_1
a_0	a_0	a_1
a_1	a_1	a_0

Рис. 1

Предположем, что мы имеем три подгруппы второго порядка (группы второго порядка всегда изоморфны), обладающие свойством циклического изоморфизма.:

A:{ e, a }, ***B:{ e, b }***, ***C:{ c, c }***, , где ***e*** - нейтральный элемент. Каждый элемент в такой группе является обратным самому себе, поэтому можем записать:

$$aCa = B,\;\; cBc = A,\;\; bAb = C \quad . \qquad (1)$$

Циклический изоморфизм удобно изображать в виде диагрвммы (Рис. 2).

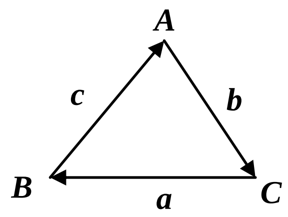


Рис. 2

Из равенств (1) легко получить обратные преобразования:

$$\boldsymbol{aBa = C,\ \ cAc = B,\ \ bCb = A}.$$

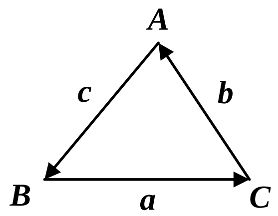


Рис. 3

Очевидно, что обе диаграммы можно объединить.

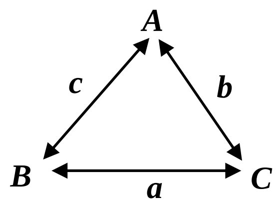


Рис. 4

Как видим, простейший циклический изоморфизм симметричен или, вернее сказать, по своему коммутативен, т. е. $\boldsymbol{aBa = bAb,\ \ cAc = aCa,\ \ bCb = cBc}$.

Из равенств рассмотренного циклического изоморфизма можно получить два таких выражения:

$$\boldsymbol{ab = bc = ca = d,\ ba = cb = ac = f.}$$

Не трудно заметить, что элементы ***e, a, b, c, d, f*** образуют некоммутативную группу шестого порядка, изоморфную группе подстановок 3-го порядка. Таблица Кэли такой группы показана на Рис. 5.

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

Рис. 5

Для симметрической группы подстановок третьего порядка будем иметь такие соответствия:

$$e=\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\ a=\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}.$$

Всякая группа, изоморфная группе подстановок 3-го порядка имеет три подгруппы, обладающие элементарным циклическим изоморфизмом. Данный изоморфизм мы назвали элементарным, т. к. он построен для подгрупп минимального порядка.

Перейдём к рассмотрению циклического изоморфизма для групп 3-го порядка. Таблица Кэли для таких групп имеет вид:

	a_0	a_1	a_2
a_0	a_0	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	a_0
a_2	a_2	a_0	a_1

Рис. 6

Пусть имеем три изоморфных подгруппы с элементами a_i, b_i, c_i и нейтральным элементом e, для которых справедлив циклический изоморфизм. Зная таблицу Кэли и определение циклического изоморфизма, можем записать: $a_1Ba_2 = C$ или $a_1b_ia_2 = c_i$, а отсюда получаем:

$$a_2b_ia_1 = a_1c_ia_2. \tag{2}$$

Из равенства (2) замечаем, что т. к. в левой и правой части сопряжённые элементы принадлежат одной и той же группе, а b_i и c_i - элементы других разных групп, то на основании определения циклического изоморфизма заключаем, что для существования циклического изоморфизма для подгрупп 3-го порядка необходимо, как минимум, четырёх изоморфных подгрупп.

Ниже мы вернёмся ещё к циклическому изоморфизму для подгрупп 3-го порядка.

Для циклического изоморфизма справедлива следующая

Теорема:

Если среди подгрупп некоторой конечной группы G существуют хотя бы две изоморфные взаимнопростые подгруппы A и B, и существует хотя бы один элемент a_i, некоммутативный с подгруппой B (т. е. $a_iB \neq Ba_i$), то между подгрупп этого порядка существует циклический изоморфизм.

Доказательство:

Пусть некоторая группа G имеет две изомофные подгруппы A и B, и существует элемент $a_i \in A$, такой, что $a_iB \neq Ba_i$. Здесь под некоммутативностью элемента a_i и подгруппы B имеется в виду, что a_iB и Ba_i образуют разные подгруппы в группе G.

Очевидно, что элементы $a_iBa_i^{-1}$ также образуют подгруппу, причём в силу неравенства $a_iB \neq Ba_i$ - это будет подгруппа, отличная от подгрупп A и B, но изоморфная им. Обозначим её $C = a_iBa_i^{-1}$.

Рассмотрим элементы $b_iCb_i^{-1}$, где b_i - элемент соответственно изоморфный элементу a_i. В силу изоморфизма подгрупп A, B и C, элементы $b_iCb_i^{-1}$ вновь образуют подгруппу, изоморфную данным.

Т. к. группа G конечная, то она имеет конечное число подгрупп. Продолжая наши построения подобным образом, мы в конце концов получим элементы уже существующей подгруппы. Т. е. получаем, согласно определения, циклический изоморфизм прдгрупп A, B, C, ...

Что и требовалось доказать.

Циклический изоморфизм может быть довольно сложным. Мы убедимся в этом уже при рассмотрении подгрупп группы подстановок 4-го порядка.

Среди подгрупп данной группы можно выделить три изоморфных подгруппы четвёртого порядка ***A, B, C***. Причём существует элемент a_i такой, что $a_i B \neq B a_i$. Следовательно, в силу вышеизложенной теоремы, данные подгруппы связаны циклическим изоморфизмом. В этом не трудно убедиться.

$$A:\left\{e, a_1=\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}\right\},$$

$$B:\left\{e, b_1=\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}\right\},$$

$$C:\left\{e, c_1=\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}, c_2=\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}, c_3=\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}\right\}, \text{ здесь } e=\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}.$$

Таблица Кэли для таких групп имеет вид:

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_3	a_0	a_2
a_2	a_2	a_0	a_3	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

Рис. 7

Элементом, отвечающим требованиям теоремы о циклическом изоморфизме, является элемент a_1 и, сответственно, - a_2, т. к. $a_2 = a_1^{-1}$. Получаем такой циклический изоморфизм:

$$a_1 B a_1^{-1} = C, \quad b_1 C b_1^{-1} = A, \quad c_1 A c_1^{-1} = B. \tag{3}$$

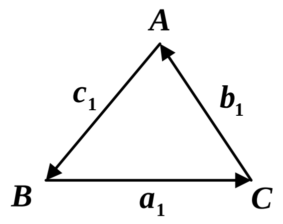


Рис. 8

Из равенств (3) легко получить обратные преобразования циклического изоморфизма.

$$a_2Ca_2^{-1}=B,\ \ c_2Bc_2^{-1}=A,\ \ b_2Ab_2^{-1}=C.$$

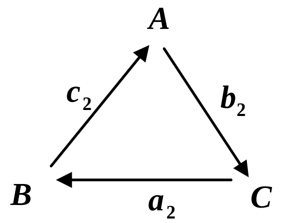


Рис. 9

Элемент a_3 не отвечает условиям нашей теоремы, поэтому для построения циклического изоморфизма не годится.

Кроме данных подгрупп этой группы существует ещё четыре подгруппы третьего порядка, отвечающие условиям нашей теоремы. Таблицу Кэли для таких групп мы показали на Рис.6. Ранее мы говорили, что для существования циклического изоморфизма среди подгрупп 3-го порядка необходимо как раз не менее четырёх изоморфных подгрупп.

Введём соответствующие обозначения и покажем диаграммы циклического изоморфизма для этих подгрупп.

$$A:\left\{e, a_1=\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}\right\},\ B:\left\{e, b_1=\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}\right\},$$

$$C:\left\{e, \mathrm{c}_1=\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}, \mathrm{c}_2=\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}\right\},\ D:\left\{e, \mathrm{d}_1=\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}, \mathrm{d}_2=\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}\right\}.$$

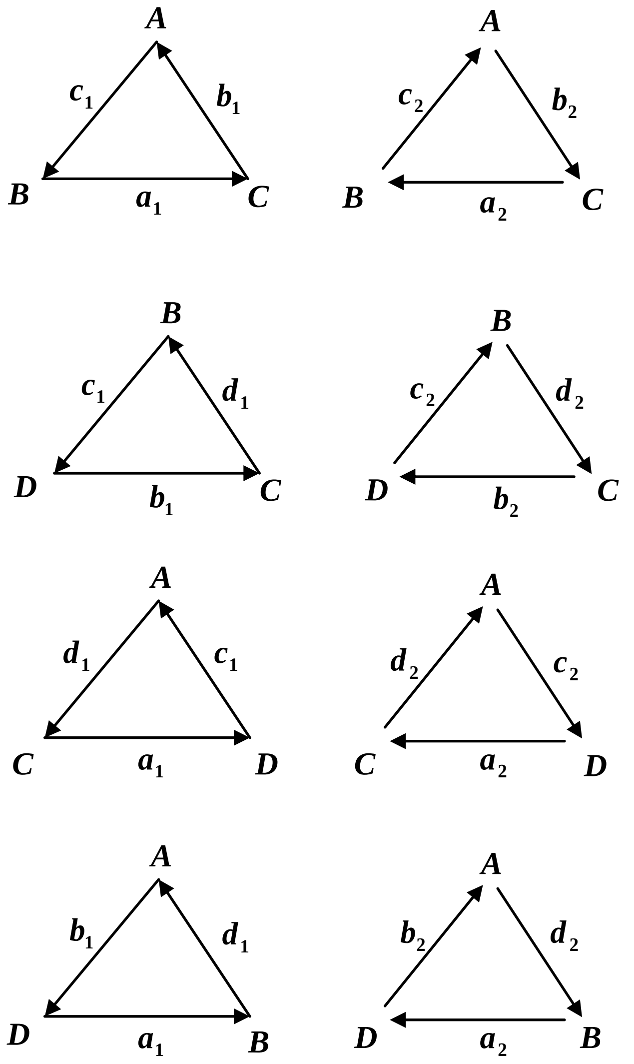


Рис. 10

В данном случае равенство (2) принимает вид:

$$\boldsymbol{a_2 B a_1 = a_1 C a_2 = D}.$$

Среди элементов симметрической группы 4-го порядка осталось ещё 6 элементов, каждый из которых в совокупности с нейтральным элементом образует подгруппу второго порядка. Причём, оставшиеся элементы отвечают требованиям теоремы о циклическом изоморфизме. Следовательно, между оставшихся подгрупп существует циклический изоморфизм.

Введём обозначения:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1243 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1432 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4231 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3214 \end{pmatrix}.$$

Подгруппы второго порядка, содержащие данные элементы, обозначим соответственно: ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***F*** и ***H***, тогда

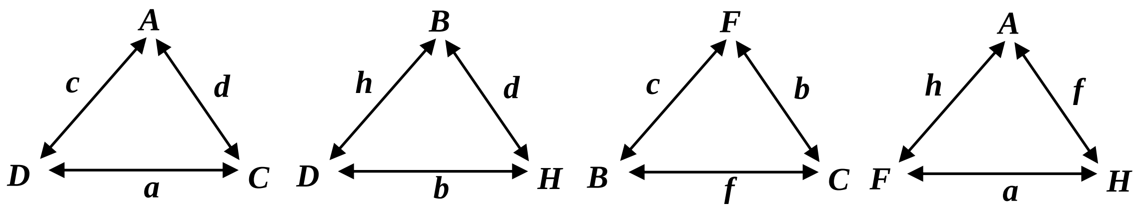


Рис. 11

Как видим из данных примеров, циклический изоморфизм довольно разнообразен.

Теперь займёмся построением группы, подгруппы которой образовывали бы циклический изоморфизм, имеющий четырёхугольную диаграмму Рис. 12.

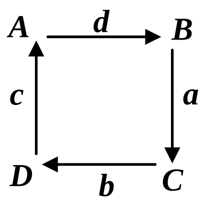


Рис. 12

Простейшие равенства циклического изоморфизма будут иметь вид: ***aBa = C***, ***bCb = D***, ***cDc = A***, ***dAd = B***.

Перепишем эти равенства, введя обозначения, как принято в опренделении циклического изоморфизма:

$$a_1A_2a_1 = A_3,\ a_2A_3a_2 = A_4,\ a_3A_4a_3 = A_1,\ a_4A_1a_4 = A_2. \tag{4}$$

Т. к. мы хотим построить простейшую из возможных групп, то будем считать, что все подгруппы A_1, A_2, A_3 и A_4 второго порядка.

Из равенств (4) получаем дополнительные соотношения: $a_3a_4 = a_2a_1 = a_1a_3 = a_5$, $a_4a_3 = a_1a_2 = a_3a_1 = a_6$, $a_1a_4 = a_4a_2 = a_2a_3 = a_7$, $a_4a_1 = a_2a_4 = a_3a_2 = a_8$. И, кроме этого, необходимо ввести ещё один элемент, определяемый равенством: $a_1a_8 = a_9$.

Получаем группу 10-го порядка, имеющую такую таблицу Кэли (Рис. 14).

Из теории абстрактных групп известно, что групп 10-го порядка существует только две. Одна из них Абелева, другая нет. Мы построили не

Абелеву группу, представляющую собой прямое произведение двух групп, второго и пятого порядков. Также известно, что такая группа имеет одну подгруппу 5-го порядка и пять подгрупп 2-го порядка.

Действительно, кроме данных нами подгрупп 2-го порядка A_1, A_2, A_3 и A_4, мы имеем ещё одну подгруппу $A_9 : \{a_0, a_9\}$, а элементы a_0, a_5, a_6, a_7, a_8 образуют подгруппу 5-го порядка.

Т. к. элемент a_9 отвечает требованиям нашей теоремы, то кроме заданного циклического изоморфизма мы получаем ещё четыре подобных.

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "a_1"] & A_3 \arrow[d, "a_2"] \\ A_1 \arrow[u, "a_4"] & A_4 \arrow[l, "a_3"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_9"] & A_3 \arrow[d, "a_1"] \\ A_9 \arrow[u, "a_2"] & A_2 \arrow[l, "a_3"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_2"] & A_9 \arrow[d, "a_1"] \\ A_2 \arrow[u, "a_4"] & A_4 \arrow[l, "a_9"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_3"] & A_4 \arrow[d, "a_1"] \\ A_3 \arrow[u, "a_9"] & A_9 \arrow[l, "a_4"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "a_9"] & A_4 \arrow[d, "a_2"] \\ A_9 \arrow[u, "a_3"] & A_3 \arrow[l, "a_4"] \end{tikzcd}$$

Рис. 13

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	a_1	a_0	a_6	a_5	a_7	a_3	a_2	a_4	a_9	a_8
a_2	a_2	a_5	a_0	a_7	a_8	a_1	a_9	a_3	a_4	a_6
a_3	a_3	a_6	a_8	a_0	a_5	a_4	a_1	a_9	a_2	a_7
a_4	a_4	a_8	a_7	a_6	a_0	a_9	a_3	a_2	a_1	a_5
a_5	a_5	a_2	a_9	a_1	a_3	a_7	a_0	a_8	a_6	a_4
a_6	a_6	a_3	a_1	a_4	a_9	a_0	a_8	a_5	a_7	a_2
a_7	a_7	a_9	a_4	a_2	a_1	a_8	a_5	a_6	a_0	a_3
a_8	a_8	a_4	a_3	a_9	a_2	a_6	a_7	a_0	a_5	a_1
a_9	a_9	a_7	a_5	a_8	a_6	a_2	a_4	a_1	a_3	a_0

Рис. 14

Данный циклический изоморфизм интересен тем, что для каждой отдельной из пяти полученных четырёхгранных диаграмм не существует обратных диаграмм.

Все пять подгрупп можно объединить одной диаграммой (Рис.15).

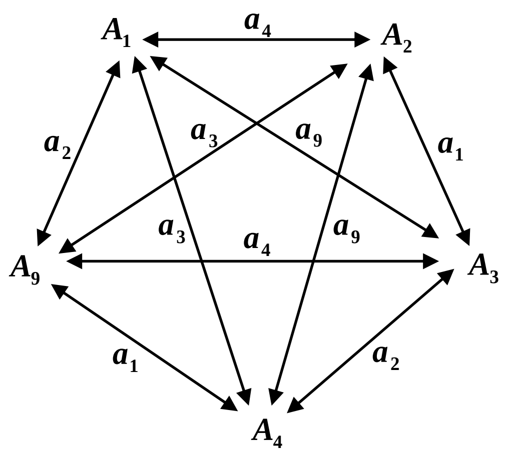


Рис. 15

О существовании пятой подгруппы A_9 можно было сделать заключение и из анализа равенств (4).

На этом мы закончим исследование общих вопросов и приступим к построению матричного представления циклического изоморфизма.

Матричное представление

Следует заметить, что однотипным (изоморфным) циклическим изоморфизмом могут быть связаны подгруппы не обязательно изоморфных групп, поэтому мы будем строить матричное представление именно циклического изоморфизма, а не матричное представление абстрактных групп.

Построим циклический изоморфизм для матричных групп 4-го порядка, состоящих из матриц 2-го порядка. Таблица Кэли таких групп показана на Рис. 7.

Рассмотрим частный случай раенств (3).

$$a_1 b_3 a_1^{-1} = c_3, \quad b_1 c_3 b_1^{-1} = a_3, \quad c_1 a_3 c_1^{-1} = b_3. \tag{5}$$

Сопоставим каждому элементу, искомых групп, некоторую матрицу второго порядка.

$$a_0 = E, \quad a_1 = \sqrt{A_+}, \quad a_2 = a_1^{-1} = \sqrt{A_-}, \quad a_3 = A,$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица, $\sqrt{\boldsymbol{A}_+}$, $\sqrt{\boldsymbol{A}_-}$ - сопряжённые корни квадратные из матрицы $\boldsymbol{A}$, причём $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$, $\sqrt{\boldsymbol{A}_+}\ \sqrt{\boldsymbol{A}_-} = \sqrt{\boldsymbol{A}_-}\ \sqrt{\boldsymbol{A}_+} = \boldsymbol{E}$.

Сделаем аналогичные сопоставления и для элементов других двух групп.

$$\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{E},\ \ \boldsymbol{b}_1 = \sqrt{\boldsymbol{B}_+},\ \ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1^{-1} = \sqrt{\boldsymbol{B}_-},\ \ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{E},\ \ \boldsymbol{c}_1 = \sqrt{\boldsymbol{C}_+},\ \ \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1^{-1} = \sqrt{\boldsymbol{C}_-},\ \ \boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{C}.$$

Тогда на основании равенств (5) получаем следующую стстему матричных уравнений представления циклического изоморфизма.

$$\begin{cases} \sqrt{\boldsymbol{A}_+}\boldsymbol{B}\sqrt{\boldsymbol{A}_-} = \boldsymbol{C} \\ \sqrt{\boldsymbol{B}_+}\boldsymbol{C}\sqrt{\boldsymbol{B}_-} = \boldsymbol{A} \\ \sqrt{\boldsymbol{C}_+}\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{C}_-} = \boldsymbol{B} \end{cases}. \tag{6}$$

Мы должны помнить, что буквами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ теперь обозначаются матрицы, а не группы.

Так как наши матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ обладают одними и теми же свойствами, то мы введём для них общее обозначение $\boldsymbol{X}$, где

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E},\ \sqrt{\boldsymbol{X}_+}\sqrt{\boldsymbol{X}_+} = \sqrt{\boldsymbol{X}_-}\sqrt{\boldsymbol{X}_-} = \boldsymbol{X},\ \sqrt{\boldsymbol{X}_+}\sqrt{\boldsymbol{X}_-} = \sqrt{\boldsymbol{X}_-}\sqrt{\boldsymbol{X}_+} = \boldsymbol{E} \tag{7}$$

Рассмортим в развёрнутом виде условия (7).

$$\boldsymbol{XX} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} & x_{12}(x_{11} + x_{22}) \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) & x_{22}^2 + x_{12}x_{21} \end{pmatrix} = \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 1 \\ x_{22}^2 + x_{12}x_{21} = 1 \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = 0 \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Кроме этого, из $\mathbf{det}(X)\cdot\mathbf{det}(X) = 1$, следует $\mathbf{det}(X) = \pm 1$. Для нахождения матриц $\sqrt{\boldsymbol{X}_+}$ и $\sqrt{\boldsymbol{X}_-}$ воспользуемся формулой (9), которая не сложно выводится и её вывод мы здесь опускаем.

$$\sqrt{X_{\pm}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x_{11} + x_{22} \pm 2\sqrt{\det(X)}}} \begin{pmatrix} x_{11} \pm \sqrt{\det(X)} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \pm \sqrt{\det(X)} \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

при $x_{11} + x_{22} \pm 2\sqrt{\det(X)} \neq 0$.

Рассмотрим произведение сопряжённых корней из матрицы X.

$$\sqrt{X_{+}}\sqrt{X_{-}} = \frac{\left(X + E\sqrt{\det(X)}\right)}{\sqrt{x_{11} + x_{22} + 2\sqrt{\det(X)}}} \cdot \frac{-\left(X - E\sqrt{\det(X)}\right)}{\sqrt{x_{11} + x_{22} - 2\sqrt{\det(X)}}} =$$

$$= \frac{-\left(X^2 - E\det(X)\right)}{\sqrt{(x_{11} + x_{22})^2 - 4\det(X)}} = \frac{E\left(\det(X) - 1\right)}{\sqrt{(x_{11} + x_{22})^2 - 4\det(X)}} = E\ .$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\det(X) - 1}{\sqrt{(x_{11} + x_{22})^2 - 4\det(X)}} = 1\,. \qquad (10)$$

Ранее мы отмечали, что $\det(X) = \pm 1$, но заметим, что при $\det(X) = 1$ равенство (10) становится противоречивым, следовательно $\det(X) = -1$. Тогда, с учётом (10), получаем такую систему уравнений.

$$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 1 \\ x_{22}^2 + x_{12}x_{21} = 1 \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = 0 \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0 \\ \sqrt{(x_{11} + x_{22})^2 + 4} = -2 \end{cases}. \qquad (11)$$

Теперь можем приступить к поиску простейших решений системы уравнений (11), которые бы удовлетворяли решениям системы (6).

Рассмотрим случай, когда $x_{12} = x_{21} = 0$, тогда $x_{11}^2 = x_{22}^2 = 1$. Помним, что $\det(X) = -1$. Т. о., получаем такие решения:

1) $x_{12} = x_{21} = 0$, $x_{11} = 1$, $x_{22} = -1$ или $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) $x_{12} = x_{21} = 0$, $x_{11} = -1$, $x_{22} = 1$ или $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, эти решения удовлетворяют системе (11).

Рассмотрим второй простейший случай, когда $\boldsymbol{x_{11} = x_{22} = 0}$, Т. к. $\mathbf{det}(\boldsymbol{X}) = -\mathbf{1}$, то $\boldsymbol{x_{12}x_{21} = 1}$. Получаем такие простейшие решения:

3) $\boldsymbol{x_{11} = x_{22} = 0}$, $\boldsymbol{x_{12} = 1}$, $\boldsymbol{x_{21} = 1}$ или $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

4) $\boldsymbol{x_{11} = x_{22} = 0}$, $\boldsymbol{x_{12} = -1}$, $\boldsymbol{x_{21} = -1}$ или $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Решения 1) – 4) все удовлетворяют матрицам $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$. Рассмотрим всевозможные пары решений 1) – 4), может быть, какая-то пара из них удовлетворяет системе уравнений (6).

Рассмотрим решения 1) и 2), пусть $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Вычислим по формуле (9) сопряжённые квадратные корни $\sqrt{\boldsymbol{A}_+}$ и $\sqrt{\boldsymbol{A}_-}$.

$$\sqrt{\boldsymbol{A}_+} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}}\begin{pmatrix} \mathbf{1}+\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}+\boldsymbol{i} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\boldsymbol{A}_-} = \frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{-\mathbf{2}\boldsymbol{i}}}\begin{pmatrix} \mathbf{1}-\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}-\boldsymbol{i} \end{pmatrix}.$$

Подставим полученные матрицы в первое уравнение системы (6).

$$\sqrt{\boldsymbol{A}_+}\boldsymbol{B}\sqrt{\boldsymbol{A}_-} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}}\begin{pmatrix} \mathbf{1}+\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}+\boldsymbol{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{-\mathbf{2}\boldsymbol{i}}}\begin{pmatrix} \mathbf{1}-\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}-\boldsymbol{i} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{4}}}\begin{pmatrix} -\mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \frac{-\mathbf{1}}{-\mathbf{2}}\begin{pmatrix} -\mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

Заметим, что мы взяли $\sqrt{\mathbf{4}} = -\mathbf{2}$, т. к. это условие пятого уравнения системы (11) при $\boldsymbol{x_{11} + x_{22} = 0}$, т. е., в нашем случае, $\boldsymbol{a_{11} + a_{22} = 0}$.

Т. о., получаем $\boldsymbol{B \equiv C}$, что противоречит первому уравнению системы (6).

Поменяв местами матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, также приходим к противоречию. Решения 3) и 4) также не удовлетворяют первому уравнению системы (6).

Рассмотрим решения 1) и 3). Пусть $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Находим сопряжённые корни квадратные из матрицы $\boldsymbol{A}$, подставляем полученные выражения в первое уравнение системы (6) и получаем в результате новую матрицу $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Не трудно проверить, что матрица $\boldsymbol{C}$ удовлетворяет и системе уравнений (11).

Проверим, удовлетворяет ли матрица $\boldsymbol{C}$ второму уравнению системы (6). Находим $\sqrt{\boldsymbol{B}_+} = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $\sqrt{\boldsymbol{B}_-} = \frac{-1}{\sqrt{-2i}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ и подставляем во второе уравнение системы (6).

$$\sqrt{\boldsymbol{B}_+}\boldsymbol{C}\sqrt{\boldsymbol{B}_-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}.$$

Аналогично убеждаемся, что матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ удовлетворяют и третьему уравнению системы (6).

Таким образом, мы получаем первое представление циклического изоморфизма для трёх групп четвёртого порядка, порождаемое матрицами:

$$\textbf{1)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видим, матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ ни что иное, как известные матрицы Клиффорда-Паули ([1], стр. 103-104). Надо отметить, что эти матрицы В. Пули получил самостоятельно, ничего не зная о матрицах Клиффорда, занимаясь математической разработкой теории спина ([2], стр. 491).

Проводя аналогичные действия, получаем и другие простейшие решения системы уравнений циклического изоморфизма.

$$\textbf{2)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{3)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{4)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{5)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{6)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{7)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{8)}\qquad A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}.$$

Для всех матриц этих решений справедливо общее свойство:

$$AB=-iC,\quad BC=-iA,\quad CA=-iB. \qquad (12)$$

Параллельно заметим, что матрицы наших решений, в совокупности с матрицами $\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$, образуют известную группу кватернионов. Здесь $a_0=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$ - нейтральный элемент группы, $a_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $a_4=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, $a_5=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $a_6=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $a_7=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$. В качестве групповой операции «$\circ$» между элементами выполняется действие: $a_i\circ a_j=-ia_ia_j$. Таблица Кэли такой группы имеет вид:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1	a_7	a_3	a_5	a_2	a_4	a_0	a_6
a_2	a_2	a_4	a_7	a_1	a_6	a_0	a_3	a_5
a_3	a_3	a_2	a_6	a_7	a_0	a_1	a_5	a_4
a_4	a_4	a_5	a_1	a_0	a_7	a_6	a_2	a_3
a_5	a_5	a_3	a_0	a_6	a_1	a_7	a_4	a_2
a_6	a_6	a_0	a_4	a_2	a_5	a_3	a_7	a_1
a_7	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

Рис. 16

На этом мы оставим поиск других решений систем уравнений (11) и (6) и покажем в общем виде, как строятся группы, порождаемые матрицами Паули, которые обладают свойством циклического изоморфизма.

Группы матриц Паули

Введём обозначения для матриц Паули, принятые в большинстве известной нам литературы.

$$\boldsymbol{S}^1=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{S}^2=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{S}^3=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{i} & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

Пусть $\boldsymbol{S}$ – любая из матриц Паули. Тогда $\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$, $\mathbf{det}(\boldsymbol{S})=-\mathbf{1}$.

Пусть $\boldsymbol{S}_+^{\frac{1}{n}}$ и $\boldsymbol{S}_-^{\frac{1}{n}}$ - два сопряжённых корня $\boldsymbol{n}$-ой степени из матрицы $\boldsymbol{S}$, причём такие, что

$$\boldsymbol{S}_+^{\frac{1}{n}}\ \boldsymbol{S}_-^{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{S}_-^{\frac{1}{n}}\ \boldsymbol{S}_+^{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{E}, \tag{13}$$

тогда множество матриц $\boldsymbol{G}$ = $\left\{\boldsymbol{E},\boldsymbol{S}_+^{\frac{1}{n}},\boldsymbol{S}_+^{\frac{2}{n}},...,\boldsymbol{S}_+^{\frac{n-1}{n}},\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}_-^{\frac{n-1}{n}},...,\boldsymbol{S}_-^{\frac{2}{n}},\boldsymbol{S}_-^{\frac{1}{n}}\right\}$ образует циклическую группу $\boldsymbol{2n}$-го порядка.

Убедимся, что $\boldsymbol{G}$ – циклическая группа.

Любые два элемента из множества $\boldsymbol{G}$ коммутативны, т. к. каждый из взятых элементов представляет собой целую степень элемента $\boldsymbol{S}_+^{\frac{1}{n}}$ или элемента $\boldsymbol{S}_-^{\frac{1}{n}}$, с учётом (13).

Проверим аксиомы группы.

1. На множестве $\boldsymbol{G}$ в качестве групповой операции используется операция умножения матриц, для которой справедлив ассоциативный закон.
2. $\boldsymbol{E}$ – нейтральный элемент.
3. Для каждого элемента из $\boldsymbol{G}$ имеется ему обратный: $\boldsymbol{S}_+^{\frac{k}{n}}\ \boldsymbol{S}_-^{\frac{k}{n}}=\boldsymbol{E}$.
4. Покажем, что для любых двух элементов из $\boldsymbol{G}$ их произведение является тоже элементом из $\boldsymbol{G}$.

1). Рассмотрим произведение $\boldsymbol{S}_+^{\frac{k}{n}}\ \boldsymbol{S}_+^{\frac{m}{n}}=\boldsymbol{S}_+^{\frac{k+m}{n}}$, где $\boldsymbol{k}<\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}$.

а). Пусть $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{m}\le\boldsymbol{n}$, тогда $\boldsymbol{S}_+^{\frac{k+m}{n}}\in\boldsymbol{G}$.

б). Пусть $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{m}>\boldsymbol{n}$. Представим $\boldsymbol{S}_+^{\frac{k+m}{n}}$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{S}_+^{\frac{k+m}{n}}=\boldsymbol{S}_+^{\frac{k+m-n}{n}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_+^{\frac{k+m-n}{n}}\ \boldsymbol{S}_-^{\frac{k+m-n}{n}}\ \boldsymbol{S}_-^{\frac{2n-(k+m)}{n}}=\boldsymbol{S}_-^{\frac{2n-(k+m)}{n}},$$

а т. к. $k+m>n$ и $k<n$, $m<n$, то $2n-(k+m)<n$. Следовательно, $S_-^{\frac{2n-(k+m)}{n}} = S_+^{\frac{k+m}{n}} \in G$.

2). Рассмотрим произведение $S_+^{\frac{k}{n}}\ S_-^{\frac{m}{n}}$, где $k<n$, $m<n$.

а). Пусть $k>m$, тогда $S_+^{\frac{k}{n}}\ S_-^{\frac{m}{n}} = S_+^{\frac{k-m}{n}}\ S_+^{\frac{m}{n}}\ S_-^{\frac{m}{n}} = S_+^{\frac{k-m}{n}} \in G$.

б). Пусть $k=m$, тогда очевидно, что $S_+^{\frac{k}{n}}\ S_-^{\frac{m}{n}} = E$.

3). Рассмотрим произведение $S_+^{\frac{k}{n}}\ S$ (или $S_-^{\frac{k}{n}}\ S$).

$$S_+^{\frac{k}{n}}\ S = S_+^{\frac{k}{n}}\ S_-^{\frac{k}{n}}\ S_-^{\frac{n-k}{n}} = S_-^{\frac{n-k}{n}} \in G.$$

Теперь покажем, что элемент $S_+^{\frac{1}{n}}$ (или $S_-^{\frac{1}{n}}$) является образующим элементом группы G.

Очевидно, что все элементы слева от S (см. запись множества G), кроме E, являются степенями элемента $S_+^{\frac{1}{n}}$ от **1** до n-**1**. $\left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^n = S$.

Рассмотрим $\left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1}$.

$$\left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = S\ S_+^{\frac{1}{n}} = S_-^{\frac{n-1}{n}}\ S_-^{\frac{1}{n}}\ S_+^{\frac{1}{n}} = S_-^{\frac{n-1}{n}}.$$

Элемент $S_-^{\frac{n-1}{n}}$ - первый из элементов, расположенных справа от элемента S (см. запись множества G). $\left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^{n+2} = S_-^{\frac{n-2}{n}}$, и т. д..

Рассмотрим элемент $\left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^{2n-1}$.

$$\left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^{2n-1} = \left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^{n+(n-1)} = S\ \ S_+^{\frac{n-1}{n}} = S_-^{\frac{1}{n}}\ S_-^{\frac{n-1}{n}}\ S_+^{\frac{n-1}{n}} = S_-^{\frac{1}{n}},$$

тогда $\left(S_+^{\frac{1}{n}}\right)^{2n} = S_-^{\frac{1}{n}}\ S_+^{\frac{1}{n}} = E$.

Т. о., мы доказали, что множество $\boldsymbol{G}$ является циклической группой $\boldsymbol{2n}$-го порядка. Группы $\boldsymbol{G}$ в дальнейшем будем называть *группами матриц Паули*.

Покажем, что группы матриц Паули $\boldsymbol{2n}$-го порядка ($\boldsymbol{n}$ – чётное) обладают циклическим изоморфизмом.

Напомним, что $\boldsymbol{S}^1\ \boldsymbol{S}^2 = -\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{S}^3,\ \boldsymbol{S}^2\ \boldsymbol{S}^3 = -\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{S}^1,\ \boldsymbol{S}^3\ \boldsymbol{S}^1 = -\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{S}^2$.

Группу, порождаемую матрицей $\boldsymbol{S}^k$, будем обозначать $\boldsymbol{G}^k$. Т. о., мы имеем три группы матриц Паули: $\boldsymbol{G}^1$, $\boldsymbol{G}^2$, $\boldsymbol{G}^3$. Запишем в общем виде выражения для сопряжённых корней квадратных из матрицы $\boldsymbol{S}^k$.

$$\sqrt{\boldsymbol{S}_+^k} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2i}}}\left(\boldsymbol{S}^k + \boldsymbol{iE}\right),\ \sqrt{\boldsymbol{S}_-^k} = \frac{-\boldsymbol{1}}{\sqrt{-\boldsymbol{2i}}}\left(\boldsymbol{S}^k - \boldsymbol{iE}\right).$$

Не трудно убедиться, что

$$\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^2}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1} = \sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^3}\ , \tag{14}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{S}_+^2}\sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^3}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^2} = \sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^1}\ , \tag{15}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{S}_+^3}\sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^1}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^3} = \sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^2}\ , \tag{16}$$

Докажем, что $\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1} = \left(\boldsymbol{S}_\pm^3\right)^{\frac{1}{n}}$.

Преобразуем равенство (14) следующим образом:

$$\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^2}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1} = \sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\ldots\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1}\ ,$$

где сомножитель $\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}$ используется $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}$ раз. Правую часть, полученного выражения, можно представить в таком виде:

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1}\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1}\right)\ldots\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1}\right) = \prod^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1}\right),\ \text{но}$$

$$\prod^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1}\right) = \sqrt{\boldsymbol{S}_\pm^3} = \prod^{\frac{n}{2}}\left(\boldsymbol{S}_\pm^3\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда заключаем, что $\sqrt{\boldsymbol{S}_+^1}\left(\boldsymbol{S}_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\boldsymbol{S}_-^1} = \left(\boldsymbol{S}_\pm^3\right)^{\frac{1}{n}}$.

Аналогично доказывается, что $\sqrt{S_+^2}\left(S_\pm^3\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{S_-^2}=\left(S_\pm^1\right)^{\frac{1}{n}}$ и $\sqrt{S_+^3}\left(S_\pm^1\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{S_-^3}=\left(S_\pm^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Используя последние равенства не сложно доказать, что

$$\sqrt{S_+^1}\left(S_\pm^2\right)^{\frac{m}{n}}\sqrt{S_-^1}=\left(S_\pm^3\right)^{\frac{m}{n}},$$
$$\sqrt{S_+^2}\left(S_\pm^3\right)^{\frac{m}{n}}\sqrt{S_-^2}=\left(S_\pm^1\right)^{\frac{m}{n}},$$
$$\sqrt{S_+^3}\left(S_\pm^1\right)^{\frac{m}{n}}\sqrt{S_-^3}=\left(S_\pm^2\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Т. о., мы доказали, что для групп G^1, G^2, G^3 справедлив циклический изоморфизм:

$$\sqrt{S_+^1}G^2\sqrt{S_-^1}=G^3,$$
$$\sqrt{S_+^2}G^3\sqrt{S_-^2}=G^1,$$
$$\sqrt{S_+^3}G^1\sqrt{S_-^3}=G^2.$$

В заключение приведём пример конкретных групп матриц Паули 12-го порядка, для которых справедлив циклический изоморфизм.

Предварительно покажем вывод формулы для нахождения кубических корней из квадратных матриц 2-го порядка. Эта формула понадобится нам в дальнейшем.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ такая, что $X^3=A$ и $\det(X)=x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}=\sqrt[3]{\det(A)}$.

Развернув равенство $X^3=A$, получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}^3+x_{12}x_{21}x_{11}+x_{12}x_{21}(x_{11}+x_{22})=a_{11} & \textbf{(17)} \\ x_{11}^2x_{12}+x_{12}x_{21}+x_{12}x_{22}(x_{11}+x_{22})=a_{12} & \textbf{(18)} \\ x_{22}^2x_{21}+x_{12}x_{21}^2+x_{21}x_{11}(x_{11}+x_{22})=a_{21} & \textbf{(19)} \\ x_{22}^3+x_{12}x_{21}x_{22}+x_{12}x_{21}(x_{11}+x_{22})=a_{22} & \textbf{(20)} \end{cases}$$

Сделаем преобразования уравнения (17).

$$x_{11}^3+x_{12}x_{21}(2x_{11}+x_{22})=x_{11}^3+\left(x_{11}x_{22}-\sqrt[3]{\det(A)}\right)(2x_{11}+x_{22})=a_{11}.$$

$$x_{11}^3+2x_{11}^2x_{22}-2x_{11}\sqrt[3]{\det(A)}+x_{11}x_{22}^2-x_{22}\sqrt[3]{\det(A)}=$$

$$=x_{11}\left(x_{11}^2+2x_{11}x_{22}+x_{22}^2\right)-\sqrt[3]{\det(A)}(x_{11}+x_{22})-x_{11}\sqrt[3]{\det(A)}=$$

$$= x_{11}\left(\left(x_{11}+x_{22}\right)^2-\sqrt[3]{\det(A)}\right)-\left(x_{11}+x_{22}\right)\sqrt[3]{\det(A)}=a_{11}$$

Аналогично находим:

$$a_{22}=x_{22}\left(\left(x_{11}+x_{22}\right)^2-\sqrt[3]{\det(A)}\right)-\left(x_{11}+x_{22}\right)\sqrt[3]{\det(A)}.$$

Два последних равенства перепишем таким образом:

$$x_{11}=\frac{a_{11}+\sqrt[3]{\det(A)}\left(x_{11}+x_{22}\right)}{\left(x_{11}+x_{22}\right)^2-\sqrt[3]{\det(A)}},\ x_{22}=\frac{a_{22}+\sqrt[3]{\det(A)}\left(x_{11}+x_{22}\right)}{\left(x_{11}+x_{22}\right)^2-\sqrt[3]{\det(A)}}.$$

Сложим левые и правые части полученных выражений:

$$x_{11}+x_{22}=\frac{a_{11}+a_{22}+2\sqrt[3]{\det(A)}\left(x_{11}+x_{22}\right)}{\left(x_{11}+x_{22}\right)^2-\sqrt[3]{\det(A)}},\text{ или}$$

$$\left(x_{11}+x_{22}\right)^3-\sqrt[3]{\det(A)}\left(x_{11}+x_{22}\right)=a_{11}+a_{22}+2\sqrt[3]{\det(A)}\left(x_{11}+x_{22}\right).$$

Обозначив $x_{11}+x_{22}=t$, получаем характеристическое уравнение:

$$t^3-3t\sqrt[3]{\det(A)}-\left(a_{11}+a_{22}\right)=0. \qquad (21)$$

Решив это уравнение, можно найти t, и далее x_{11} и x_{22}, где

$$x_{11}=\frac{a_{11}+t\cdot\sqrt[3]{\det(A)}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}},\ x_{22}=\frac{a_{22}+t\cdot\sqrt[3]{\det(A)}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}}.$$

Из уравнений (18) и (19) находим:

$$x_{12}=\frac{a_{12}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}},\ x_{21}=\frac{a_{21}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}}.$$

Получаем общую формулу:

$$\sqrt[3]{A}=\frac{1}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}}\left(A+t\cdot\sqrt[3]{\det(A)}E\right) \qquad (22)$$

Характеристическое уравнение (21) для матриц Паули имеет вид:

$$t^3+3t=0.$$

Откуда: $t_1 = 0$, $t_2 = i\sqrt{3}$, $t_3 = -i\sqrt{3}$. И формула (22) будет выглядеть таким образом:

$$\sqrt[3]{S^k} = \frac{1}{t^2+1}\left(S^k + tE\right).$$

На основании последней формулы получаем:

$$\sqrt[3]{S^k} = S^k,\ \sqrt[3]{S_+^k} = -\frac{1}{2}\left(S^k - i\sqrt{3}E\right) = \left(S_+^k\right)^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[3]{S_-^k} = -\frac{1}{2}\left(S^k + i\sqrt{3}E\right) = \left(S_-^k\right)^{\frac{1}{3}}$$

Ранее мы показали, что $\left(S_+^k\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2i}}\left(S^k + iE\right)$, тогда

$$\left(S_+^k\right)^{\frac{1}{2}}\left(S_+^k\right)^{\frac{1}{3}} = \left(S_+^k\right)^{\frac{5}{6}} = -\frac{1}{2\sqrt{2i}}\left(S^k - i\sqrt{3}E\right)\left(S^k + iE\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2i}}\left(E - i\sqrt{3}S^k + iS^k + \sqrt{3}E\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2i}}\left(i\left(1-\sqrt{3}\right)S^k + \left(1+\sqrt{3}\right)E\right).$$

Мы помним также, что $\left(S_+^k\right)^{\frac{5}{6}} S^k = \left(S_-^k\right)^{\frac{1}{6}}$, т. е.

$$\left(S_-^k\right)^{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{2\sqrt{2i}}\left(i\left(1-\sqrt{3}\right)S^k + \left(1+\sqrt{3}\right)E\right)S^k = -\frac{1}{2\sqrt{2i}}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)S^k + i\left(1-\sqrt{3}\right)E\right).$$

Но $\left(S_-^k\right)^{\frac{1}{6}}$ - это как раз и есть образующий элемент для группы G^k 12-го порядка. Вычисляя различные степени этого элемента, можно найти все элементы группы G^k.

При вычислении матриц мы должны помнить, что $\sqrt{4} = -2$ (или $\sqrt{-4} = -2i$), т. к. это условие последнего уравнения системы (11).

Литература

1. Х. Грин, «Матричная квантовая механика», М., «Мир», 1968
2. В. Паули, «Труды по квантовой механике», М., «Наука», 1975