Базис Алгебры и Матрицы Паули – Точное Соответствие Семи Эзотерическим Принципам и Восьми Триграммам Багуа*.

К Синтезу Науки и Оккультной Философии.

* Explicit Correspondence of Pauli Matrices, the Basis of Cl(3,0) to 7 Esoteric Principles and to the Bagua.

В статье показано соответствие эзотерических доктрин о семи принципах, китайских триграмм Гуа Фу Си с матрицами Паули, которые являются базисом соответствующих алгебр и групп Ли, и широко применяются в современной фундаментальной физике. Данная статья предназначается для очень узкой категории читателей, а именно, для тех, кто знаком с математическим аппаратом теории групп и алгебр Клиффорда в их применении к физическому миру, с двоичными (битовыми) операциями и, в тоже время, с эзотерическими учением Теософии в изложении Е. П. Блаватской, С. Роу. Математикам эта работа может быть интересна в связи с предложенным способом нумерации матриц Паули при помощи битовых операций.

1. Алгебра Клиффорда Физического Пространства- Cl(3,0) и Матрицы Паули

Геометрические Алгебры были введены в математику Уильямом Кингдон Клиффордом, английским математиком и философом. В общем случае, алгебры Клиффорда могут рассматриваться как обобщение чисел, с другой стороны, они дают обобщенное описание геометрии соответствующих пространств с заданным количеством измерений. В данном случае нас интересует алгебра Клиффорда Cl(3,0) представляющая собой 8-мерную алгебру. Данная алгебра математически описывает геометрию нашего трехмерного пространства Евклида. Алгебра Клиффорда Cl(3,0) имеет уникальное свойство, так как, изначально описывая свойства трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$, она также содержит в себе и соответствие с четырехмерным пространством-временем Минковского, то есть с пространством Специальной теории относительности (СТО). Данное соответствие устанавливается изоморфизмами $Cl_{3,0} \cong Mat(2,\mathbb{C})$, что путем нормализации сводится к группе $SL(2,\mathbb{C})$, которая является двойным накрытием группы Лоренца $SO(1,3)^+$. И, кроме того, изоморфизм алгебы с четными подалгебрами $Cl_{3,0} \cong Cl^0_{3,1} \cong Cl^0_{1,3}$ ведет опять к пространству-времени Минковского. Данное уникальное свойство Cl(3,0) используется в физике, поэтому ее иногда называют Алгеброй Физического Пространства (APS).

Базис алгебры Клиффорда Cl(3,0) может быть задан при помощи матриц Паули

$$\begin{matrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_{123} & e_{23} & e_{13} & e_{12} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ i\sigma_0 & i\sigma_1 & i\sigma_2 & i\sigma_3 \end{matrix}$$

(поэтому иногда ее также называют алгеброй Паули). Где матрицы Паули это

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, пространственный вектор с базисом (e_1, e_2, e_3) соответствует своему отражению в пространстве «анти-Минковского» - бивектору (e_{23}, e_{23}, e_{13}), построенному на базисе комплексифицированных матриц Паули. Данные 6 матриц представляют собой базис для для алгебры Ли **sl**(2, $\mathbb{C}$) и генераторы группы $SL(2,\mathbb{C})$, имеющей гомоморфизм с группой $SO(3,\mathbb{C})$. В частности, данные 6 компонет - это базис для 6-вектора электромагнетизма $\boldsymbol{F} = \vec{E} + i\vec{B}$. Кроме того, верхний ряд соответствует также 4-вектору пространства Минковского, а нижний – его комплексифицированному 4-вектору, или 4-х вектору в пространстве «анти-Минковского». В дополнение к этому, алгебра изоморфна группе комплексифицированных кватернионов. В данной алгебре 8-мерное пространство описывается независимой суммой $\sigma_0 x_0 + \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3 + i\sigma_0 x_4 + i\sigma_1 x_5 + i\sigma_2 x\sigma_{0_6} + i\sigma_3 x_7$, где x_i это 8 произвольных рациональных чисисл. Важно отметить, что в этой алгебре замена знака для какой либо из матриц Паули не критично, так как отражает заркальное отражение одной из координат. Матрицы Паули имеют шировое применение в физике, отражая не только симметрию базиса рассмотренной алгебры Клиффорда, но и например базис Cl(1,3), где они связаны с матрицами Дирака внутри блок матриц 4x4, выполняя в некотором смысле роль обычных чисел внутри матриц 2x2 (*но* уже с учетом их знака +- σ_i) .

Семь Принципов Тайной Доктрины для Учеников Внутренней Группы и Багуа

Цитируем [1]: *«**Атман** не есть «принцип», но отстоит от человека, чьи семь «принципов» представлены следующим образом*

7-й, аурическое яйцо, окрашенное в голубой цвет.

6-й, Буддхи, окрашенный в желтый цвет.

5-й, Манас:Высший, представленный треугольником вершиной вверх и окрашенный в темно-синий цвет.

Низший, представленный треугольником вершиной вниз и окрашенный в зеленый цвет.

4-й, кама, символизированная пятиконечною звездой, с «рогами зла», обращенными вверх; объемлет низший манас и окрашена в кроваво-красный цвет.

3-й, лингашарира, окрашенная в фиолетовый цвет как проводник праны (оранжевой) и разделяющая природу камы (красной), а иногда и аурической оболочки (голубой).

2-й, прана, жизнь, окрашенная в оранжевый цвет – цвет одеяния аскетов.

1-й, стхулашарира, физическое тело человека, представленное майявическим контуром огромной пятиконечной звезды внутри аурического яйца.»

Располагая принципы согласно эзотерическому правилу в виде треугольников, и отмечая цвета порядковыми номерами их в спектре, начиная с единицы получаем изображение представленное на рисунке (рис. 1).

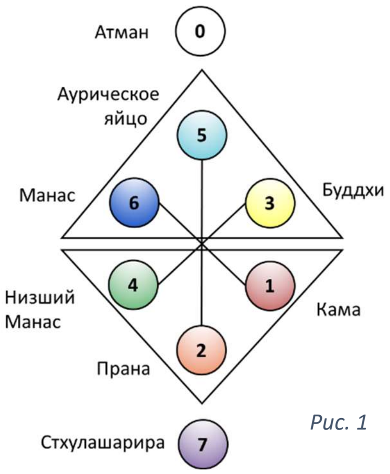


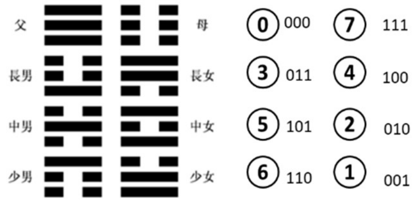
Рис. 1

Отсюда видно, что каждый из принципов имеет противостоящий ему. При данном противопоставлении сумма числа, соответствующая цвету элемента и противоположного равна 7. Атман представляет собой белый цвет, сумму всех семи и соответствует числу 0 в таком представлении (либо триаду 8-9-10, в представлении Сеффир Йецира).

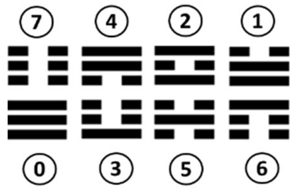
Точно так же данную схему можно легко привести в соответствие с китайскими триграммами Багуа (Восемь Гуа Фу Си), подразумевая, что каждая триграмма представляет написание числа от 0 до 7 в бинарной (двоичной) системе.

Понятно, что выбор соответствия Багуа числам неоднозначен, но мы можем начать с того, чтобы триграмма Цянь («небо», «отец») соответствовало принципу Атмана и то есть числу 0, а Кунь («земля», «мать») соответствовала числу 7 (Стхулашарира, физическое тело). Следовательно, в данном случае горизотальная линия соответствует цифре 0 в двоичном представлении, а прерывистая – единице.

Далее, оставшиеся 6 элементов представлены тремя дочерьми и тремя сыновьями, поэтому получается, что три дочери (в порядке их появления *Сунь, Ли и Дунь)* имеют в двоичной записи по 2 нуля, поэтому числам 4, 2 и 1 (либо 1, 2, 4).

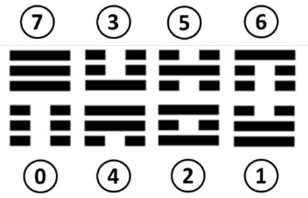


Таким образом на эзотерической схеме на рисунке 1, три дочери соответствуют треугольнику, направленному вниз. Соответственно сыновья (*Чжэнь*, *Кань* и *Гэнь*) - это треугольник (числа 3, 5 и 6) направленный вверх. В данной схеме, как и в более поздних схемах расположениях Гуа Фу Си, видно, что противостоящие элементы таковы, что сумма их чисел равна 7. Возвращаясь вновь к математике, соответствие эзотерических принципов, Багуа и базиса алгебры Паули:



$$\rightarrow \begin{matrix} \sigma_0 & i\sigma_3 & i\sigma_1 & i\sigma_2 \\ i\sigma_0 & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{matrix}$$

Либо:



$$\rightarrow \begin{matrix} \sigma_0 & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ i\sigma_0 & i\sigma_3 & i\sigma_1 & i\sigma_2 \end{matrix}$$

Рис. 3

Где мы во втором варианте сохранили соответствие чисел матрицам Паули, но поменяли соответствие чисел для Багуа. Объяснение этому дается в следующей главе.

2. Конечная Группа из 8 Элементов - Скалярное Произведение и Битовые Операции

Введем скалярное произведение двух матриц Паули

$$(\sigma_k, \sigma_j) = |\sigma_k \, \sigma_j| \qquad k, j = 0,1,2,3$$

где || означает взятие абсолютного значения, то есть, при необходимости, $\sigma_k \, \sigma_j$ умножаем на $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ так, чтобы результатом была опять какая либо из восьми матриц Паули. Введенное скалярное произведение ассоциативно $(\sigma_k, \sigma_j) = (\sigma_j, \sigma_k)$. Как соответствие этому скалярному произведению для матриц Паули, введем битовую операцию для двух чисел n и m - чисел, которые представляют эзотерические принципы $n, m = 0, .., 7$, следующим образом:

$$(n, m) \;=\; \overline{(n \wedge m)}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	7	6	5	4	3	2	1	0
1	6	7	4	5	2	3	0	1
2	5	4	7	6	1	0	3	2
3	4	5	6	7	0	1	2	3
4	3	2	1	0	7	6	5	4
5	2	3	0	1	6	7	4	5
6	1	0	3	2	5	4	7	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7

Где знаком ^ обозначена операция XOR, а $\overline{(n)}$ есть битовая операция NOT. Например, для пояснения, выражение $(3,5) = \overline{(011 \wedge 101)} = \overline{(110)} = 1$. В результате получаем следующую таблицу «умножения» в группе. Скалярным произведиям матриц Паули будут соответствовать битовые операции соответствующих им чисел, например:

$$(\sigma_1, \sigma_2) = i\sigma_3 \rightarrow (5,6) = 4 \qquad (i\sigma_1, i\sigma_2) = i\sigma_3 \rightarrow (2,1) = 4 \qquad (\sigma_1, i\sigma_2) = \sigma_3 \rightarrow (5,1) = 3$$

$$(\sigma_2, \sigma_3) = i\sigma_1 \rightarrow (6,3) = 2 \qquad (i\sigma_2, i\sigma_3) = i\sigma_1 \rightarrow (1,4) = 2 \qquad (\sigma_2, i\sigma_3) = \sigma_1 \rightarrow (6,4) = 5$$

$$(\sigma_1, \sigma_3) = i\sigma_2 \rightarrow (5,3) = 1 \qquad (i\sigma_1, i\sigma_3) = \sigma_2 \rightarrow (4,2) = 1 \qquad (\sigma_1, i\sigma_3) = \sigma_2 \rightarrow (5,4) = 6$$

и так далее. Причем умножение матрицы Паули на мнимую единицу $\sigma_i \rightarrow i\sigma_i$ соответствует битовой операции NOT, то есть $\overline{(n)}$. Скалярное произведение элемента с самим собой всегда дает

$$(n, n) = 7 \;\; \forall \mathrm{n}, \qquad \text{так же как:}\;\; (\sigma_k, \sigma_k) = \sigma_0 \;\; \forall \mathrm{k}$$

Кроме того, элементы 0 и 7 «коммутируют» со всеми остальными элементами как $i\sigma_0$ и σ_0:

$$(0, n) = \overline{n} \;\rightarrow\; (i\sigma_0, \sigma_j) = i\,\sigma_j \quad \text{и} \quad (7, n) \;= n \;\rightarrow\; (\sigma_0, \sigma_j) = \sigma_j$$

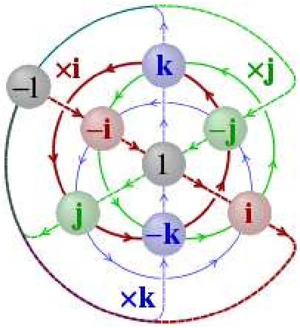
представляя, как и два элемента σ_0 , $i\sigma_0$, *центр* алгебры Паули или алгебры Cl(3,0). Кроме того, необходимо отметить, почему мы поменяли местами σ_3 и σ_2 вместо стандартного (рис.3). Дело в том, что *четным* числам должны соответствовать те матрицы Паули, в элементах которых присутствует мнимая единица i (например σ_2). Это легко видеть, начиная с элемента 0, представленного мнимой единицей $i\sigma_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ - и все же с духовной точки зрения именно этот элемент является телом и Землей (Кунь). *Нечетные* же числа, соответствуют матрицам Паули, содержащим только реальные значения элементов в матрице, как и 7, которое представляет в данном контексте именно единичную матрицу σ_0. Ведь действительно, если умножать матрицу Паули с реальными элементами на матрицу с мнимыми, результатом будет матрица с мнимыми значениями: так же как при введенном «умножении» четных и нечетных чисел. Таким образом, получается следующий «числовой ряд»:

$$0=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} 1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} 2=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} 3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} 4=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} 5=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 6=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} 7=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что определитель у матриц 1, 2, 4, 7 положительный, а у остальных 4х – отрицательный, что вполне соответствует разделению на рис. 1. На самом деле, мы рассмотрели подгруппу группы Паули из ее 8 положительных элементов, введя скалярное произведение и сопоставив с числам принципов. Сама группа Паули состоит из 16 элементов (включая и 8 отрицательных матриц) и есть $P = Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$,

Кватерниононная Группа Q_8 и Семь Принципов

Данная схема представляет собой операции взаимного умножения кватернионных единиц, или действия внутри группы Q_8. Сходство данной схемы с рисунком 1 весьма заметно: и в том и в другом случае имеется два треугольника вверх и вниз. И это очевидно, учитывая изложенное в предыдущей главе. Именно, соотношение между кватернионными единицами и матрицами Паули известно в математике как: $i\sigma_3 \to i, i\sigma_2 \to j,\ i\sigma_1 \to k,\ \sigma_0 \to 1,$ с единственной разницей, что 4 противостоящих им элемента идут со знаком минус: $-i,\ -j, -k, -1$, то есть умноженными на -1 в отличие от предыдущего случая, где такую роль играла мнимая единица.



Заключение

В заключение хочется заметить, что Субба Роу [2], один из ближайших сподвижников ЕПБ, не принимал до конца идею семеричности ТД, трактуя ее в виде четверичности. Данный материал в некотором смысле поясняет и объединяет эти две концепции.

Дальнейшее исследование предлагается самому читателю. Периодичность 8 – это хорошо извесный и фундаментальный факт в теории алгебр Клиффорда. В свете изложенного, симметрия двух теорий – древней Эзотерической и современной, научной – очевидна. Например можно заметить соответствие трем генераторам группы $SL(2, \mathbb{R})$ чисел 1, 3, 5; причем числу 1 (Кама) соответствует генератор вращения. В заключение, хотелось бы отметить, кроме того, что центр алгебры Клиффорда Cl(3) представлен лишь двумя элементами, которые в представленной аналогии соответствуют принципам с числами 0 и 7. Согласно статье автора [6], данные два элемента, в частности, могут представлять собой Время и Пространство (объем), с периодической осцилляцией в течение космологической эпохи периодически (и гармонически) превращаясь из одного в другое.

Литература

[1] Блаватская Е. П. Инструкции для учеников Внутренней Группы, Сфера, 2004 («The Inner *Group* Teachings of H. P. *Blavatsky* to Her Personal Pupils (1890-1891)»).

[2] Т.Субба Роу, "Оккультная философия", Сфера, 2001

[3] Lounesto, P. Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, 2nd edition, 2001

[4] Clifford W.K., Mathematical Papers by William Kingdon Clifford, R.Tucker, Macmillan and Co, London, 1882, 266-276

[5] Clifford W. K., On the Classification of Geometric Algebras, paper XLIII, in Mathematical Papers of W. K. Clifford, by R. Tucker (MacMillan, London, 1882)

[6] Kritov, A. Gravitation with Cosmological Term, Expansion of the Universe as Uniform Acceleration in Clifford Coordinates. Symmetry 2021, 13, 366

[7] Porteous I.R., Clifford Algebras and the Classical Groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics: 50, 2009.