

DR. ING. CHEDLY FEZZANI (1943-2019),
ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, ING.
GÉNÉRAL GÉOGRAPHE

THÉORIE DES ERREURS POUR
LES TECHNICIENS SUPÉRIEURS
-
NOTIONS DE LA THÉORIE DES
MOINDRES CARRÉS

Abstract : In this booklet, we give elements of the theory of Errors and notions of the Least Squares method for technicians working in the field of topography, geodesy and geomatics.
Version 2.0 - Octobre 2021.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
e-mail : abenhadsalem@gmail.com

*A la mémoire de mon collègue et ami CHEDLY FEZZANI
(1943-2019)*

*A la mémoire de mes parents,
A ma chère épouse, à mes enfants,*

A tous mes professeurs.



Fig. 0.1 Directeur Exécutif de l'OSS, Dr. Ing. Chedly FEZZANI en concertation avec le deuxième auteur Abdelmajid BEN HADJ SALEM (Photo prise lors du 1er Atelier Maghrébin de Géodésie organisé par l'OTC du 18 au 20 mai 2000 à Tunis sous le thème " Définition et Mise en œuvre d'un Référentiel Géodésique Unifié pour l'Afrique du Nord " .)(© A. Ben Hadj Salem)

Préface

L'idée de ce fascicule venait du souhait de Chedly Fezzani de coopérer tous les deux pour la rédaction d'un ouvrage de géodésie - topographie pour les techniciens supérieures qui permet d'améliorer leurs connaissances en la matière dans le but de hausser le niveau de nos techniciens et garder le métier de géomètre et du topographe en bonne situation.

C'est à partir d'un manuscrit écrit par Fezzani dans les années 70 concernant la théorie des erreurs à l'usage des techniciens supérieurs (1ère et 3ème parties du présent fascicule) auquel j'ai ajouté quelques chapitres relatifs à des notions de la théorie des moindres carrés (2ème partie) rédigés pour les techniciens supérieurs et les étudiants de la licence en géomatique.

Je m'ai permis d'apporter aussi quelques mises à jour au manuscrit original et des améliorations de la présentation.

Enfin, je voudrai dédier ce document à la mémoire de mon ami Dr.-Ing Chedly Fezzani qui nous a quitté en février 2019. Paix à son âme.

**Tunis,
Octobre, 2021**

***Abdelmajid Ben Hadj Salem
Ingénieur Géographe Général***

Table des matières

PRÉFACE	xi
Partie I Théorie des Erreurs pour les Techniciens Supérieurs	
1 INTRODUCTION	3
2 DÉFINITIONS DE BASE	5
2.1 DÉFINITIONS DE BASE	5
2.2 FAUTES ET ERREURS SYSTÉMATIQUES	6
2.2.1 Fautes	6
2.2.2 Erreurs Systématiques	6
2.3 ERREURS ACCIDENTELLES	7
2.3.1 Fréquence (f)	7
2.3.2 Fréquence relative (F)	8
2.3.3 Définition de la Probabilité P	8
2.3.4 Distributions de Probabilités	8
3 CONCEPT D'ESTIMATION ET RÈGLE DE LINÉARISATION DES ERREURS ACCIDENTELLES	9
3.1 CONCEPT D'ESTIMATION	9
3.2 MOYENNE ARITHMÉTIQUE D'OBSERVATIONS INDÉPENDANTES ET DE MÊME PRÉCISION	10
3.3 AUTRES DÉFINITIONS DE BASE	10
3.4 RÈGLE DE LINÉARISATION	11
4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE ET ÉCARTS-TYPES	13
4.1 NOTIONS DE VALEURS PROBABLES OU ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE (E)	13
4.1.1 Les Principaux Théorèmes et Définitions	13
4.1.2 Tableau de Variance et Erreurs Corrélées	14

4.1.3	Moyenne Arithmétique : Concept d'Estimation Utilisée en Topographie	15
4.2	ESTIMATION DE L'ECART-TYPE	15
4.3	LOI DE PROPAGATION DES ECARTS-TYPES	17
4.4	APPLICATIONS DE LA LOI DE PROPAGATION DES ECARTS-TYPES ..	18
4.4.1	Erreur Moyenne Quadratique d'une Somme	18
4.4.2	Erreur Moyenne Quadratique d'une Moyenne	19
5	LOI NORMALE DE DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉS	23
5.1	ETUDE MATHÉMATIQUE DE LA FONCTION $Y(x)$	24
5.1.1	Distribution Normale Type	25
5.2	TOLÉRANCE OU ERREUR MAXIMUM (T)	28
6	OBSERVATIONS D'INÉGALE PRÉCISION- MOYENNE PONDÉRÉE	29
6.1	CHOIX DES POIDS	30
6.2	APPLICATIONS	31
6.3	ERREUR MOYENNE QUADRATIQUE DE LA MOYENNE PONDÉRÉE ..	31
7	PROPAGATION DES ECART-TYPES DANS LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES	33
7.1	MATRICE DES COFACTEURS ET MATRICE DES POIDS	34
7.2	COEFFICIENT DE CORRÉLATION (r) OU INDICE DE DÉPENDANCE ..	34
8	APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES ERREURS À DES PROBLÈMES TOPOGRAPHIQUES	35
8.1	1 ÈRE APPLICATION	35
8.2	2 ÈME APPLICATION	36
8.3	APPLICATION : PROCÉDÉ DE LA BASE AUXILIAIRE.....	37
Partie II Notions de la Méthode des Moindres Carrés		
9	ELÉMENTS DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS	43
9.1	INTRODUCTION	43
9.1.1	Définition du Problème	43
9.2	LES MESURES	44
9.3	POIDS - MATRICE DE POIDS - VARIANCE DE LA MESURE DE POIDS UNITAIRE	45
9.4	MODÈLES FONCTIONNEL ET STOCHASTIQUE	46
9.4.1	Le Modèle Fonctionnel	46
9.4.2	La Méthode des Equations d'observations	47
9.4.3	Le Modèle Stochastique	48
9.5	PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS	50
9.6	LA SOLUTION DES MOINDRES CARRÉS	52
9.7	PROPRIÉTÉS DES ESTIMATEURS	52
9.8	LES RÉSIDUS	54

9.8.1	Expression du vecteur résidu.....	54
9.9	LA VARIANCE DES MESURES	55
9.10	L'ECRITURE MATRICIELLE DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS ...	56
10	MÉTHODE DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS AVEC EQUATIONS DE CONDITION	61
10.1	CAS OÙ LES r GRANDEURS À DÉTERMINER SONT LIÉS PAR p RELATIONS	61
10.2	APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.....	62
10.3	EXEMPLES DE POSE D'EQUATIONS D'OBSERVATIONS	64
10.4	LA GÉODÉSIE BIDIMENSIONNELLE	64
10.4.1	Observation d'une distance	64
10.5	LA GÉODÉSIE TRIDIMENSIONNELLE	66
10.5.1	Observation d'une distance	66
 Partie III Compléments Techniques et Pratiques		
11	RAPPELS DES NOTIONS ESSENTIELLES DE CALCULS NUMÉRIQUES .	71
11.1	UNITÉS DE MESURE.....	71
11.2	DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS	74
12	LES INTERPOLATIONS	77
12.1	INTERPOLATION LINÉAIRE.....	77
12.2	INTERPOLATION PARABOLIQUE	78
	Littérature	81
 Bibliographie		
81		
 Liste des Figures		
82		

Partie I
Théorie des Erreurs pour les Techniciens
Supérieurs

CHAPITRE 1

Introduction

Nous tenons tout d'abord à signaler que la théorie des erreurs proprement dite est étroitement liée à la théorie des probabilités et des statistiques et a fait l'objet de plusieurs publications ou ouvrages d'éminents professeurs.

Ce fascicule est un recueil de notions indispensables pour aborder la théorie des observations en topographie laquelle théorie nous permet de :

- justifier des modes opératoires et la limite d'emplois des instruments utilisés,
- déterminer les valeurs à choisir d'un ensemble de mesures,
- étudier la précision du résultat et la tolérance à ne pas dépasser,
- comparer plusieurs opérations différentes etc.,...

Les exigences des sciences géographiques sont primordiales car la correspondance bijective entre la définition d'une opération et son exécution matérielle n'est jamais satisfaite.

Force nous est donc de renoncer par avance de trouver des valeurs exactes des quantités mesurées et dont la définition est idéale. Nous ne pouvons qu'approcher ces valeurs.

CHAPITRE 2

Définitions de Base

2.1 DÉFINITIONS DE BASE

Définition 2.1 On appelle *erreur d'observations* toute discordance entre la valeur supposée exacte et la valeur mesurée.

La recherche de la précision nous impose des erreurs petites ce qui nécessite :

- des appareils perfectionnés,
- l'étude minutieuse des causes d'erreurs et leurs manifestations,
- la rectification des résultats bruts par des corrections appropriées.

On peut classer les erreurs en deux catégories principales :

1- Erreurs se reproduisant toujours identiquement à elles-mêmes et qui proviennent principalement de la différence entre la définition théorique de la mesure effectuée et la réalisation pratique de l'appareil qui l'enregistre.

2- Erreurs d'apparence fortuites dont la valeur prise ne peut être calculée d'avance.

Les premières de causes connues sont appelées erreurs systématiques et peuvent être éliminées par la méthode d'observations.

Les secondes, de causes inconnues sont appelées erreurs accidentelles ou fortuites.

2.2 FAUTES ET ERREURS SYSTÉMATIQUES

2.2.1 Fautes

Les fautes peuvent provenir d'un oubli ou d'une maladresse de l'opérateur. Elles ne peuvent en aucun cas être classées dans la catégorie des erreurs.

Pour les éviter, il faut toujours se ménager des vérifications et pour cela on distingue deux cas :

- les vérifications directes qui consistent à répéter l'opération dans les mêmes conditions,
- les vérifications indirectes qui consistent à comparer deux séries d'opérations faites par des voies différentes et indépendantes.

2.2.2 Erreurs Systématiques

L'étude de ces erreurs résulte de la connaissance de leurs causes et réciproquement. Tout écart systématique par rapport aux prévisions révèle une cause d'erreur dont l'importance peut être grande.

Comme leur nom l'indique, ces erreurs s'ajoutent. Il est donc nécessaire pour corriger les résultats de préciser leurs modes d'action afin d'adopter en conséquence les procédés opératoires correspondants.

2.2.2.1 Elimination des Erreurs Systématiques

a. Elimination par le calcul

Soit (e_s) l'erreur systématique déterminée par la comparaison d'un étalon de mesure et l'appareil utilisé. Pour une longueur (L) mesurée avec un décimètre à partir de (n) portées, on commet une erreur totale (E_L) sur la longueur mesurée (L) donnée par :

$$\boxed{E_L = n.e_s} \quad (2.1)$$

Pour obtenir la longueur exacte, il suffit de corriger la longueur mesurée (L) de la quantité E_L affectée du signe inverse de l'erreur (e_s).

b. Application Numérique

On utilise un décimètre de longueur 10.001 m pour mesurer une longueur de 150 m.

Quel est le résultat exact de la mesure ?

$$n = 150/10 = 15 \text{ portées ;}$$

$$e_s = +1 \text{ mm ;}$$

$E_L = 1 \text{ mm} \times 15 = +15 \text{ mm}$;
 Longueur mesurée : $L_m = 15 \times 10.001 = 150.015 \text{ m}$;
 Longueur exacte : $L = L_m - E_L = 150 \text{ m}$.

Cette méthode est très utilisée dans les mesures directes et en particulier pour les corrections d'étalonnage.

c. Par la méthode de symétrie

Elle n'exige pas la connaissance numérique de la vraie valeur de l'erreur commise, mais seulement celui de son mécanisme.

Soit une mesure (x) affectée d'une erreur systématique (e_x), si l'on peut recommencer l'opération dans des conditions de symétrie, l'erreur serait alors de ($-e_x$), on aura donc :

1ère mesure : $X_1 = X + e_x$,

2ème mesure : $X_2 = X - e_x$,

d'où :

$$X_1 + X_2 = 2X \implies X = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad (2.2)$$

On fait recours à cette méthode dans les mesures indirectes. Elle intervient souvent dans les observations d'angles par le phénomène lecture directe et lecture inverse connu par les topographes par cercle à gauche et cercle à droit.

2.3 ERREURS ACCIDENTELLES

L'étude des erreurs accidentelles est étroitement liée à la surabondance de mesures par rapport aux éléments à déterminer et au choix des valeurs définitives des inconnues à partir de l'ensemble des mesures.

Cette loi des grands nombres nous amène à définir les principes généraux de la statistique et des probabilités.

2.3.1 Fréquence (f)

Définition 2.2 La fréquence f est le nombre total d'arrivée d'un événement au cours de n répétitions.

2.3.2 Fréquence relative (F)

Définition 2.3 La fréquence relative F est le quotient de la fréquence sur le nombre des répétitions :

$$F = \frac{f}{n} \text{ (exprimée en \%)} \quad (2.3)$$

Application

Si en réitérant une mesure 1000 fois, on trouve 100 fois la même valeur :

$$f = 100, \quad n = 1000 \implies F = 100/1000 = 1/10 = 0.10 = 10\%$$

La fréquence relative (F) tend à se stabiliser si le nombre de répétitions augmente.

2.3.3 Définition de la Probabilité P

Définition 2.4 La probabilité $P(E)$ d'un événement (E) est égale à la fréquence relative F si le nombre de répétitions n est assez grand.

2.3.4 Distributions de Probabilités

Les variations des mesures, au cours des répétitions, sont dues à des erreurs accidentelles qui ne peuvent, ni être calculées à l'avance, ni éliminées par la méthode opératoire. On ne peut que constater leur existence et les subir.

n ne peut être infini et l'expérience nous démontre que cette loi du hasard, prise dans un échantillon bien défini de mesures indépendantes nous conduit vers une dispersion de valeurs, tantôt croissantes, tantôt décroissantes et comprises entre deux points extrêmes dont le milieu est appelé le point d'accumulation.

Cette distribution naturelle des mesures est arrangée dans un diagramme dit histogramme.

Concept d'Estimation et Règle de Linéarisation des Erreurs Accidentelles

3.1 CONCEPT D'ESTIMATION

Une estimation d'une grandeur en soi n'est pas plus vraie qu'une autre. Elle doit être suivie d'un critère de qualité qui nous indique avec quelle probabilité on approche de la réalité.

Plusieurs mesures de position peuvent être choisies telles que :

- la valeur médiane de x_i mesures,
- la moyenne arithmétique \bar{A} de x_i mesures :

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.1)$$

- la moyenne géométrique G :

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (3.2)$$

- la moyenne harmonique H :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad (3.3)$$

3.2 MOYENNE ARITHMÉTIQUE D'OBSERVATIONS INDÉPENDANTES ET DE MÊME PRÉCISION

Soit une suite $(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$ de n mesures d'une grandeur inconnue A , on redéfinit par moyenne arithmétique \bar{A} :

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n}$$

la valeur la plus intuitive et la plus logique pour l'étude du comportement des erreurs accidentelles.

Cette moyenne arithmétique s'applique aussi bien à une fonction régulière des inconnues, en effet si $X = f(A)$ telle que :

$$\begin{aligned} X_1 &= f(A_1) \\ X_2 &= f(A_2) \\ &\vdots \\ X_n &= f(A_n) \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n f(A_i)}{n}$$

Il revient au même d'écrire $X = f(A_n)$:

- \bar{X} = est la valeur estimée de l'inconnue X .
- A_i = est la valeur mesurée i de la grandeur A .

Cette façon de procéder facilite la linéarisation en restant dans la limite de ce postulat (l'erreur sur l'erreur est négligeable).

On démontre dans la théorie des erreurs que la moyenne arithmétique est l'estimation absolument correcte qui possède la plus faible erreur.

Elle répond au principe des moindres carrés largement utilisé dans tous les domaines des sciences géographiques.

3.3 AUTRES DÉFINITIONS DE BASE

- l'erreur accidentelle d'une mesure est la différence entre la moyenne arithmétique et la mesure,
- les erreurs accidentelles les plus petites sont les plus nombreuses,

- la fréquence des très grandes erreurs est nulle,
- les erreurs ne doivent pas dépasser un maximum,
- à toute erreur positive correspond une erreur négative et la somme algébrique de ces erreurs est nulle.

En effet, désignons par :

- A_i l'observation d'une certaine grandeur A ,
- \bar{A} la moyenne arithmétique des n observations,
- \hat{A} la vraie valeur de la grandeur (toujours inconnue).

Définition 3.1 On appelle :

- *erreur vraie de l'observation i* : $e = \hat{A} - A_i$,
- *résidu ou écart apparent de l'observation i* : $v_i = \bar{A} - A_i$.

1) On a :

$$- v_i = \bar{A} - A_i \implies \sum_{i=1}^n v_i = n\bar{A} - \sum_{i=1}^n A_i = 0 \text{ donc :}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n v_i = 0}$$

$$2) v_i = \bar{A} - A_i, v_n = \bar{A} - A_n \implies v_i + v_n = 2\bar{A} - (A_i + A_n) \approx 0, \text{ d'où } v_i \approx -v_n.$$

Tout ce qui précède a été confirmé par l'expérience et répond à une distribution de probabilité. Cette distribution est obtenue à partir d'une fonction continue et différentiable.

3.4 RÈGLE DE LINÉARISATION

Théorème 3.1 (Théorème de l'Indépendance des Erreurs) *L'erreur commise sur une mesure inconnue est la différentielle totale de son expression mathématique en fonction de la quantité mesurée. Les accroissements des variables sont les erreurs vraies sur les mesures directes.*

Soit : $X = f(A, B, C)$ et dA, dB, dC les erreurs vraies des observations A, B, C . La vraie valeur de X est \hat{X} telle que :

$$\hat{X} = X + dX = f(A + dA, B + dB, C + dC)$$

ou encore : $dX = f(A + dA, B + dB, C + dC) - f(A, B, C)$. L'action de chaque erreur, fonction linéaire des erreurs de mesures, est indépendante de celles de toutes les autres : en effet en négligeant le 2ème ordre, on peut écrire :

$$dX = \frac{\partial f}{\partial A} dA + \frac{\partial f}{\partial B} dB + \frac{\partial f}{\partial C} dC$$

ou encore :

$$dX = f'_A dA + f'_B dB + f'_C dC$$

avec f'_A , f'_B et f'_C respectivement les dérivées partielles de $f(A, B, C)$.

Il est important d'homogénéiser les données préalablement à tout calcul d'erreurs par différentiation de la formule de base.

Cette relation d'observations n'est que le développement de Taylor limité aux termes du 1er degré.

Applications :

a - Cas d'une seule variable : Erreur sur la dénivelée ΔH entre 2 points A et B.

La distance D est mesurée sans erreurs et l'angle de pente α avec une erreur $d\alpha$, on peut donc écrire :

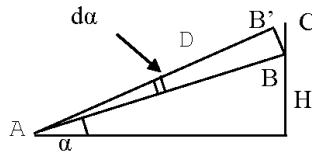


Fig. 3.1 Erreur sur la dénivelée H entre 2 points A et B

$BB' = D.d\alpha$ (Triangle ABB'), d'où :

$$dH = BC = BB' \cos\alpha = D.\cos\alpha.d\alpha$$

Cette expression peut être déduite directement par la différentiation de la relation $H = D.\sin\alpha$ avec D sans erreur :

$$dH = D.\cos\alpha.d\alpha$$

b - Cas de plusieurs variables :

Même application que a- ci-dessus, mais D et α sont mesurées avec des erreurs dD et $d\alpha$. Différentions la formule $H = D\sin\alpha$, il vient :

$$dH = dD.\sin\alpha + D.\cos\alpha.d\alpha \quad (3.4)$$

Espérance Mathématique et Ecart-Types

4.1 NOTIONS DE VALEURS PROBABLES OU ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE (E)

4.1.1 Les Principaux Théorèmes et Définitions

Définition 4.1 L'espérance mathématique $E(x)$ d'une fonction de variable aléatoire x est la moyenne des différentes valeurs de la fonction qu'intuitivement on peut s'attendre à trouver pour toutes les valeurs possibles des diverses variables.

Théorème 4.1 E vérifie les propriétés suivantes :

- E est un opérateur linéaire :

$$E(ax + by) = a.E(x) + b.E(y), \quad a, b \text{ sont des constantes}$$

$$E(a) = a$$

$$E(a.f(x)) = a.E(f(x))$$

$$E(f(x) + g(x) + h(x)) = E(f(x)) + E(g(x)) + E(h(x))$$

$$E(E(f(x))) = E(f(x))$$

Définition 4.2 On appelle moment d'une variable aléatoire ou d'une fonction de variables l'espérance mathématique des puissances de la variable ou de la fonction :

- moment d'ordre 1 : $E(x)$,
- moment d'ordre 2 : $E(x^2)$,
- moment d'ordre n : $E(x^n)$.

Théorème 4.2 L'espérance mathématique $E(e)$ d'une erreur accidentelle e est nulle :

$$E(e) = 0$$

Définition 4.3 La variance d'une variable aléatoire ou d'une fonction de plusieurs variables aléatoires est donnée par :

$$\sigma_X^2 = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X) = E(e^2) \quad (4.1)$$

La racine carrée σ_X de la variance est dite l'erreur moyenne quadratique ou écart-type de X .

La formule ci-dessus (4.1) est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E(X - E(X))^2 = E(X^2 + E^2(X) - 2X.E(X)) = E(X^2) + E(E^2(X)) - 2E(X).E(X) = \\ &E(X^2) - E^2(X) \implies \boxed{\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X)} \end{aligned}$$

4.1.2 Tableau de Variance et Erreurs Corrélées

Si 2 variables (X, Y) ont des valeurs séparées à chaque répétition, on peut écrire :

$$E(e_x.e_y) = \sigma_{XY} \quad (4.2)$$

σ_{XY} est la covariance des variables aléatoires (X, Y) avec :

$$e_x = X - E(X), \quad e_y = Y - E(Y)$$

et :

$$\sigma_{XY} = \begin{pmatrix} 0 & \text{si les observations sont indépendantes} \\ \neq 0 & \text{si les observations sont corrélées} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

La matrice de variance des inconnues X, Y est définie par :

$$\Gamma_{XY} = \begin{pmatrix} E(e_x^2) & E(e_x.e_y) \\ E(e_x.e_y) & E(e_y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Si les observations sont indépendantes, alors :

$$\Gamma_{XY} = \begin{pmatrix} E(e_x^2) & E(e_x.e_y) \\ E(e_x.e_y) & E(e_y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

4.1.3 Moyenne Arithmétique : Concept d'Estimation Utilisée en Topographie

La moyenne arithmétique A des mesures a_i est l'estimation qui possède la plus faible erreur moyenne quadratique σ_a .

En effet, partons de la définition de A :

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

On a :

$$E(A) = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \frac{1}{n} \cdot nE(a_i) = E(a_i) = E(a) \quad (4.6)$$

Comme : $\sigma_a^2 = E(a^2) - E^2(a) = E(a - E(a))^2$ et $\sigma_A^2 = E(A^2) - E^2(A) = E(A - E(A))^2$, il vient :

$$E(A^2) = \frac{1}{n^2} E(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n)$$

soit :

$$E(A^2) = \frac{1}{n^2} [nE(a^2) + n(n-1)E^2(a)]$$

d'où :

$$E(A^2) = \frac{1}{n} (E(a^2) + (n-1)E^2(a)) \quad (4.7)$$

et sachant que $E^2(A) = E^2(a)$, on peut alors écrire :

$$\sigma_A^2 = E(A^2) - E^2(A) = \frac{1}{n} [E(a^2) + (n-1)E^2(a)] - E^2(a) = \frac{E(a^2) - E^2(a)}{n} \implies$$

$$\boxed{\sigma_A^2 = \frac{\sigma_a^2}{n}} \quad (4.8)$$

C.Q.F.D

4.2 ESTIMATION DE L'ECART-TYPE

Soit A la moyenne arithmétique de n observations a_i dont la valeur inconnue est a . Soient respectivement e_i l'erreur vraie et v_i le résidu ou erreur apparente :

$$e_i = a_i - a$$

$$v_i = A - a_i$$

L'étude de l'écart-type (σ) estimé à partir de la moyenne arithmétique des n observations est obtenue à partir de l'étude de :

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n (A - a_i)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n A^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2A \sum_{i=1}^n a_i\right) \\ &= E(nA^2) + E\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) - 2E\left(A \sum_{i=1}^n a_i\right) \\ &= (1) + (2) + (3) \end{aligned}$$

Or $E(A^2) = \frac{E(a^2) + (n-1)E^2(a)}{n}$, par suite (1) = $nE(a_i^2) = E(a^2) + (n-1)E^2(a)$.
Le terme (2) = $nE(a_i^2) = nE(a^2)$. Enfin (3) = $-2nE(A^2)$, d'où :

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) &= (1) + (2) + (3) = E(a^2) + (n-1)E^2(a) + nE(a^2) - 2nE(A^2) = \\ &\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 - nA^2\right) = n(E(a^2) - E(A^2)) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.7) :

$$E\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) = n\left[E(a^2) - \frac{1}{n}[E(a^2) + (n-1)E^2(a)]\right] \quad (4.9)$$

Par suite :

$$E\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) = (n-1)(E(a^2) - E^2(a)) \quad (4.10)$$

D'où en utilisant la définition de σ_a , on obtient :

$$E\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) = (n-1)\sigma_a^2 \quad (4.11)$$

L'estimation correcte de σ_a^2 est donnée par :

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1} \quad (4.12)$$

ou

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad (4.13)$$

σ_a est l'écart-type de l'une quelconque des observations parmi un ensemble de mesures a_i de même précision.

4.3 LOI DE PROPAGATION DES ÉCARTS-TYPES

Soit $x = f(a, b, c)$ une fonction des quantités observées (a, b, c) dont les erreurs moyennes quadratiques vraies sont $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$. La vraie valeur correspondante est :

$$X = f(A, B, C)$$

En répétant n fois les mesures de (a, b, c) , la fonction X sera entachée des erreurs $(dX_1, dX_2, \dots, dX_n)$, l'erreur moyenne quadratique (σ_X) ou écart-type est donnée par :

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n dX_i^2}{n-1}}$$

dX_i n'est autre que la différentielle de X , c'est-à-dire :

$$dX_i = \frac{\partial f}{\partial A_i} dA_i + \frac{\partial f}{\partial B_i} dB_i + \frac{\partial f}{\partial C_i} dC_i \quad (4.14)$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 = & \left(\frac{\partial f}{\partial A_i} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n dA_i^2}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial B_i} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n dB_i^2}{n} + \dots + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial A_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial B_i} \right) \frac{\sum_{i=1}^n dA_i dB_i}{n} + \\ & 2 \left(\frac{\partial f}{\partial A_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial C_i} \right) \frac{\sum_{i=1}^n dA_i dC_i}{n} + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial B_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial C_i} \right) \frac{\sum_{i=1}^n dB_i dC_i}{n} + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Soit \mathbf{Y} le vecteur :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \end{pmatrix}$$

et \mathbf{F} le vecteur :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f'_A \\ f'_B \\ f'_C \end{pmatrix}$$

et \mathbf{V} la matrice de variance de (a, b, c) :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_B^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Il vient :

$$\sigma_X^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F} \quad (4.17)$$

où F^T désigne le vecteur transposé de F .

En négligeant les termes du second ordre dans le cas des observations indépendantes et comme dA_i, dB_i, dC_i sont des erreurs vraies, on a :

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n dA_i^2}{n} \\ \sigma_B^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n dB_i^2}{n} \\ \sigma_C^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n dC_i^2}{n}\end{aligned}$$

D'où :

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2 \sigma_C^2 \quad (4.18)$$

ou encore :

$$\sigma_X^2 = f_A'^2 \sigma_A^2 + f_B'^2 \sigma_B^2 + f_C'^2 \sigma_C^2$$

Notation Matricielle : il vient :

$$\boxed{\sigma_X^2 = F^T \cdot \Gamma \cdot F}$$

4.4 APPLICATIONS DE LA LOI DE PROPAGATION DES ÉCARTS-TYPES

4.4.1 Erreur Moyenne Quadratique d'une Somme

Soit :

$$X = A + B + C + \dots$$

Les différentielles partielles valent 1.

$$f_A' = f_B' = f_C' = 1$$

D'après la loi de propagation des écarts-types, on a :

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \dots \\ \sigma_X^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\end{aligned}$$

Si les variables de cette somme sont caractérisées par le même écart-type (σ), c'est-à-dire de même précision, on obtient donc :

$$\sigma_X^2 = n\sigma^2 \implies \sigma_X = \sigma\sqrt{n}$$

Application Numérique : On chaîne une longueur (L) de $90m$ avec un décimètre. A chaque portée, l'écart-type σ de la mesure est de $3cm$. Quel est l'écart-type de la longueur L ?

Nombre de portées $=N = 90/10 = 9$, d'où :

$$\sigma_L = 3\sqrt{9}cm = 9cm$$

4.4.2 Erreur Moyenne Quadratique d'une Moyenne

Soit :

$$X = \frac{A+B+C+\dots}{n} \quad (4.19)$$

Les différentielles partielles sont égales à $\frac{1}{n}$. L'écart-type σ_X est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \frac{1}{n^2}(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \dots) \\ \sigma_X^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \end{aligned}$$

Si toutes les mesures ont même précision σ , on obtient :

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 \quad (4.20)$$

et :

$$\boxed{\sigma_X = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (4.21)$$

Comme :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$$

il vient :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}}$$

Application Numérique : On a réitéré un angle a 5 fois et les valeurs obtenues sont :

$$\begin{aligned} a_1 &= 125.9766 \text{ gr} \\ a_2 &= 125.9770 \text{ gr} \\ a_3 &= 125.9772 \text{ gr} \\ a_4 &= 125.9780 \text{ gr} \\ a_5 &= 125.9750 \text{ gr} \end{aligned}$$

La moyenne arithmétique \bar{X} est $\bar{X} = 125.97674 \text{ gr.}$

L'erreur moyenne quadratique σ_a sur une mesure isolée est définie par :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad (4.22)$$

Tableau des résidus :

$$v_1 = X - a_1 = +2.4'', \quad v_1^2 = 5.8$$

$$v_2 = X - a_2 = -2.6'', \quad v_2^2 = 6.8$$

$$v_3 = X - a_3 = -4.6'', \quad v_3^2 = 21.2$$

$$v_4 = X - a_4 = -12.6'', \quad v_4^2 = 158.8$$

$$v_5 = X - a_5 = +17.4'', \quad v_5^2 = 302.8.$$

On a alors :

$$\sum_{i=1}^5 v_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 v_i^2 = 495.4$$

d'où :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{495.4}{5-1}} = \sqrt{126} = 11.2''$$

L'erreur moyenne quadratique σ_X sur la moyenne est donc :

$$\sigma_X = \frac{\sigma_a}{\sqrt{n}} = \frac{11.2''}{\sqrt{5}} = 5'' \quad (4.23)$$

4.4.2.1 Remarques importantes :

1. Les erreurs systématiques d'un ensemble de mesures de même précision se composent selon la loi $(\sigma.n)$ tandis que les erreurs accidentelles selon la loi $(\sigma\sqrt{n})$.

Les erreurs systématiques sont donc plus **dangereuses** que les erreurs accidentelles.

2. Dans la composition de deux erreurs accidentelles, dès que l'une est inférieure à la moitié de l'autre, on peut pratiquement la négliger et l'erreur compositante

estimée est égale à l'erreur supérieure.

En effet si : $X = A + B$ et que $\sigma_A = \sigma_B/2$, on a donc :

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 = \left(\frac{1}{4} + 1\right)\sigma_B^2 = \frac{5}{4}\sigma_B^2 \\ \sigma_X^2 &= 1.1\sigma_B^2\end{aligned}\quad (4.24)$$

ou encore

$$\sigma_X^2 \approx \sigma_B^2 \quad (4.25)$$

3. On appelle erreur relative quadratique le rapport de l'écart-type σ sur une mesure par la valeur de cette mesure :

$$\sigma_R = \frac{\sigma_X}{X} \quad (4.26)$$

Exemple : sur une longueur de $100m$ obtenue avec une erreur absolue $\sigma_L = \pm 10cm$, son erreur relative est :

$$\sigma_R = \pm \frac{0.10}{100} = \pm 0.001$$

4. L'erreur relative d'une expression monôme est sa dérivée logarithmique, en effet si $X = A^\alpha \cdot B \cdot C^\gamma$, alors :

$$\frac{\sigma_X}{X} = \alpha \frac{\sigma_A}{A} + \frac{\sigma_B}{B} + \gamma \frac{\sigma_C}{C} \quad (4.27)$$

5. On est amené dans certains cas à définir l'erreur graphique σ_g d'un document cartographique qui n'est autre que l'erreur moyenne quadratique de report graphique d'un point sur ce document.

Elle est pour un opérateur moyen de l'ordre de $\pm 0.2mm$ à l'échelle du document :

$$\sigma_g = \pm 0.2mm \times E$$

E = désigne dénominateur de l'échelle.

Cette limite de l'erreur graphique est obtenue par la qualité des levés topographiques qui, une fois réduits à l'échelle, nous permettent d'espérer l'utilisation de ce document pour les travaux d'études d'avants projets.

Elle permet aussi la distinction entre les levés dits 'réguliers' des levés 'semis-réguliers' ou 'expédiés'.

CHAPITRE 5

Loi Normale de Distributions de Probabilités

La distribution normale de probabilités a été développée d'abord par Moivre puis par Gauss et Laplace.

L'expérience nous a prouvé que les distributions de fréquence sont très proches de la symétrie et décroissent vers l'extrémité tout ayant un intervalle de l'infini (∞).

On démontre aisément en probabilité que la loi de Gauss est représentée par la fonction :

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (5.1)$$

telle que :

$$\forall \sigma, \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)dx = 1 \quad (5.2)$$

La probabilité pour qu'une erreur tombe dans l'intervalle $[x1, x2]$ est l'aire hachurée comprise entre les droites $x = x1$, $x = x2$ de la courbe de Gauss (figure ci-dessous), c'est-à-dire :

$$P[x1 < x < x2] = \int_{x1}^{x2} Y(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x1}^{x2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (5.3)$$

Avec :

- μ l'espérance mathématique ou dans un échantillon relativement petit, c'est la moyenne arithmétique,
- σ l'écart-type.

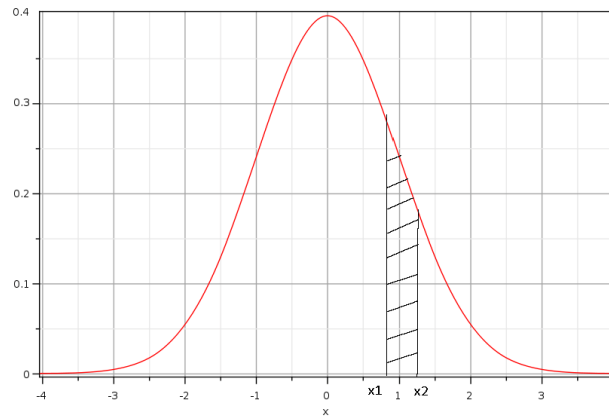


Fig. 5.1 La Probabilité $P[x_1 < x < x_2] = \text{aire de la surface hachurée}$ (source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale)

5.1 ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE LA FONCTION $Y(x)$

1. Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $Y(x) \rightarrow 0$, l'axe des x est une asymptote de la courbe.
2. Elle présente une symétrie par rapport à l'axe $x = \mu$.
3. Posons :

$$k = \frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \quad (5.4)$$

alors la dérivée Y' est égale à :

$$Y' = -k(x - \mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (5.5)$$

x	$-\infty$	μ	$+\infty$
$x - \mu$		0	
		+	-
$Y[x]$	0	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	0

Fig. 5.2 Tableau de variations

4. La dérivée seconde Y'' est égale à :

$$Y'' = ke^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \left[-1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right] \quad (5.6)$$

$Y'' = 0$ pour $(x - \mu)^2 = \sigma^2$ soit $x = \mu \pm \sigma$. Les points de la courbe d'abscisses $(x = \mu \pm \sigma)$ sont des points d'inflexion.

5. Représentation graphique

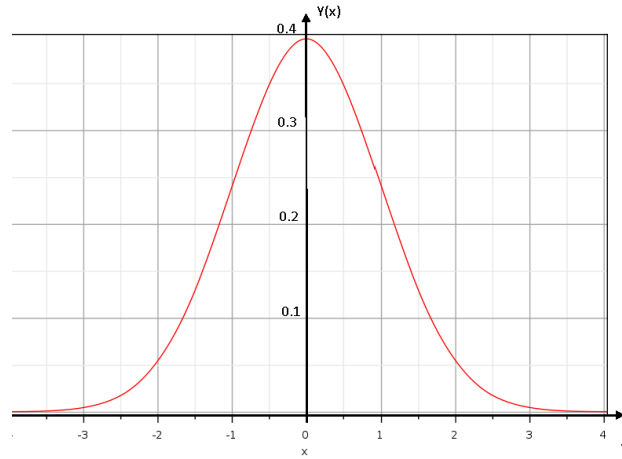


Fig. 5.3 La Courbe de Gauss (source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale)

6. Les distributions normales distinctes ne se différencient que par leur moyenne arithmétique μ et leur écart-type σ .

5.1.1 Distribution Normale Type

La comparaison entre différentes distributions normales est toujours aisée à cause des translations et des variations dues à (μ) et à (σ) . Ce problème peut être résolu en considérant $(\mu = 0)$ et en comparant les écarts-types en unité d'écart-type $(\sigma = 1)$. Cette distribution est connue sous le nom de **distribution normale type**.

Posons :

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (5.7)$$

la fonction de Gauss prend la forme :

$$Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (5.8)$$

pour $x = \mu \pm \sigma$, $t = \pm 1 \implies Y'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \implies \sigma_1 = 1$ point d'inflexion.

Pour $\sigma_T = 1 \implies Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. La surface totale comprise entre la courbe $Y(x)$ et l'axe des x est égale à 1. En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Or on montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$, on déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1 \quad (5.9)$$

la probabilité pour que $[x_1 < x < x_2]$ est donnée par l'intégrale :

$$\int_{x_1}^{x_2} Y(x) dx \quad (5.10)$$

On démontre aisément que :

$$\text{la probabilité pour que } [-1 < t < 1] \text{ est de } 68.26\% \quad (5.11)$$

Une table ci-après permet d'obtenir la probabilité pour la probabilité d'une mesure tombe dans l'intervalle $] -\infty, t]$ pour $t \geq 0$ et $t \leq 0$. Elle est donnée par la fonction $\Pi(t)$. Pour avoir $P[x \in [0, t]]$, elle vaut $\Pi(t) - \Pi(0)$.

Exemple : On veut calculer la probabilité P pour que $[-1 < t < 1]$. D'après le tableau (**Fig. 5.4**), on a donc $P = \Pi(1) - \Pi(-1)$, mais $\Pi(-1) = 1 - \Pi(1)$ car -1 est négatif, par suite on obtient : $P = \Pi(1) - \Pi(-1) = \Pi(1) - (1 - \Pi(1)) = 2\Pi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = 0.6826$ soit $P = 68.26\%$ valeur donnée ci-dessus (5.11).

Définition 5.1 (*Erreur Probable* (e_p)) On appelle *erreur probable* l'erreur (e_p) telle que la probabilité pour $(X - e_p) < x < (X + e_p)$ soit égale à 0.5.

Elle est égale à $2/3$ de l'erreur moyenne quadratique σ :

$$e_p = 0.6745 \times \sigma = 0.68 \times \sigma$$

Si on viendrait à classer toutes les erreurs accidentelles de même expression par ordre de grandeur croissante, en valeurs absolues, l'erreur probable occupe le rang médian, c'est-à-dire qu'il existe $(n/2)$ valeurs à droite et $(n/2)$ valeurs à gauche de l'erreur probable.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fig. 5.4 Tableau donnant $P[x \leq t]$ (source : <http://jm.davalan.org/proba/gauss/index.html>)

5.2 TOLÉRANCE OU ERREUR MAXIMUM (T)

On constate dans la distribution type de Gauss que 99 des erreurs se répartissent entre $[-4e_p, 4e_p]$; on peut donc énoncer que toute erreur supérieur à $4e_p$ est considérée comme fautive.

L'erreur maximum e_m ou T est donc égale à $4e_p$:

$$T = e_m = 4e_p = 4 \times \frac{2}{3}\sigma = \frac{8}{3}\sigma = 2.66\sigma \approx 2.7\sigma \quad (5.12)$$

Elle fixe la tolérance T qu'on accorde aux erreurs et constitue le critère de rejet ou d'adoption des mesures.

Remarques importantes :

- Le cahier de charges des travaux de géomètre indique la tolérance autorisée.
- On constate malheureusement une lacune de ces cahiers, celle de ne pas préciser le pourcentage maximum des erreurs au voisinage de cette tolérance.
- C'est ainsi qu'un travail où (20%) des résultats avoisinent la limite est juridiquement correct mais théoriquement faux car la répartition gaussienne ne permet que 4%.

IL FAUT DONC PRÉCISER UNE TOLÉRANCE ET FIXER LE TAUX MAXIMUM DES GROS ECARTS.

Application Numérique : Déterminer (e_p, T) sachant qu'on a mesuré une longueur L 10 fois et dont les résultats sont les suivants :

longueur mesurée (m)	$v_i = l_m - l_i$ (mm)	v_i^2
32.422	8	64
32.434	-4	16
32.427	3	9
32.421	9	81
32.440	-10	100
32.436	-5	25
32.432	-2	4
32.425	5	25
32.426	4	16
32.437	-7	49

Moyenne arithmétique $l_m = 32.430\text{mm}$. $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^{10} v_i^2}{10}} \implies \sum_i v_i^2 = 389 \implies \sigma =$

$\sqrt{\frac{389}{10}} = 6.24\text{mm}$. On obtient : $e_p = 0.68\sigma = 0.68 \times 6.24 = 4.24\text{mm}$; $T = 2.7\sigma = 2.7 \times 4.24 = 11.45\text{mm}$. Donc, on accepte les v_i tels que $|v_i| < 11.45\text{mm}$.

Observations d'Inégale Précision- Moyenne Pondérée

Il est anormal d'attribuer la même influence, dans le calcul du résultat final, à des mesures d'une grandeur faite dans des conditions différentes et d'inégales précisions.

L'attribution des poids va nous permettre de combler cette anomalie. Soit n mesures directes $[a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n]$ d'une grandeur $[a]$.

Définition 6.1 On appelle *moyenne pondérée* de ces mesures l'expression :

$$\bar{a}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (6.1)$$

Théorème 6.1 - Les poids p_i sont déterminés à une constante multiplicative K près.
 - Les mesures les plus précises ont les forts poids.

En effet, de (6.1), on a $\bar{a}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$, on peut écrire $p_i = p'_i \cdot K$, alors l'expression précédente devient :

$$\bar{a}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n p'_i K a_i}{\sum_{i=1}^n K p'_i} = \frac{\sum_{i=1}^n p'_i a_i}{\sum_{i=1}^n p'_i}$$

Donc $\bar{a}_p = \bar{a}'_p$ est invariant à une constante près (K dans notre exemple).

6.1 CHOIX DES POIDS

Soit A la moyenne arithmétique des n mesures d'inégales précisions, on peut écrire :

- $A - a_1 = v_1$ avec un écart-type σ_1 ,
- $A - a_2 = v_2$ avec un écart-type σ_2 ,
- $A - a_n = v_n$ avec un écart-type σ_n .

Réduisons ces relations d'observations à la même unité de poids par les transformations des variables (v_i) en (v_i/σ) , on obtient donc une série homogène de mesures pour laquelle ($\sigma = 1$) par définition, soit $(A - a_j) \cdot \frac{1}{\sigma}$.

Pour un ensemble d'observations non corrélées, une mesure avec une grande précision aura une petite variance, implique qu'une bonne observation devrait recevoir dans la compensation (correction des mesures) une petite partie de la correction globale. A l'inverse, une mesure de moindre précision aura une plus grande variance, par suite une observation avec une plus grande erreur reçoit donc une plus grande partie de la correction.

Le poids d'une observation est une mesure de la valeur relative de l'observation par rapport à d'autres observations. Les poids sont donc utilisés pour contrôler les tailles des corrections appliquées aux observations dans une compensation. Plus une observation est précise, plus son poids est élevé; en d'autres termes, plus la variance est faible, plus le poids est élevé. A partir de cette analyse, on peut affirmer intuitivement que les poids sont inversement proportionnel aux écarts. Ainsi, il s'ensuit également que les tailles de correction doit être inversement proportionnel aux poids. D'où le théorème :

Théorème 6.2 *Les poids p_i sont inversement proportionnels aux carrés des erreurs moyennes quadratiques respectives à chaque détermination.*

$$\boxed{p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.2)$$

6.2 APPLICATIONS

1. Les valeurs moyennes d'un angle α sont :

- $\alpha_1 = 65.2638 \text{ gr}$ après 4 itérations,
- $\alpha_2 = 65.2636 \text{ gr}$ après 9 répétitions.

Les poids p_1 et p_2 doivent tenir compte des 5 répétitions supplémentaires faites au cours de la 2^{ème} série. On peut donc estimer que : $p_1 = 4$; $p_2 = 9$. La moyenne pondérée α_p est :

$$\bar{\alpha}_p = \frac{p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2}{p_1 + p_2} = \frac{848.4276}{13} = 65,263661 \text{ gr}$$

Le résultat s'approche des premières mesures qui avec leurs 9 répétitions sont plus précises.

2. Si dans l'exemple précédant, les 9 premières mesures sont faites chacune avec un écart-type $\sigma_1 = 6''$ et les 4 autres avec un écart-type $\sigma_2 = 8''$. On obtiendra alors :

- écart-type résultant des 9 premières mesures : $\sigma_1 = 6''$
- écart-type résultant des 4 autres mesures : $\sigma_2 = 8''$

Les poids p_1 et p_2 sont : $p_1 = 1/36$ et $p_2 = 1/64$. La moyenne pondérée est :

$$\alpha_p = \frac{65.2636/36 + 65.2638/64}{1/36 + 1/64} = 65.26367 \text{ gr}$$

La première série σ_1 obtenue avec 9 répétitions est plus précise que la seconde.

6.3 ERREUR MOYENNE QUADRATIQUE DE LA MOYENNE PONDÉRÉE

Soit n observations d'un paramètre a , chaque observation a_i est de poids p_i , a_p la moyenne pondérée. Nous avons :

$$a_p = \frac{\sum_i p_i a_i}{\sum_i p_i}$$

L'erreur moyenne quadratique σ_a de la moyenne sans pondération est :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_i v_i^2}{n-1}}$$

On montre que pour la moyenne pondérée a_p , l'erreur moyenne quadratique est donnée par la formule :

$$\sigma_{a_p} = \sqrt{\frac{\sum_i^n p_i v_i^2}{(n-1) \sum_i^n p_i}} \quad (6.3)$$

7.1 MATRICE DES COFACTEURS ET MATRICE DES POIDS

Nous avons vu dans la théorie classique que le poids est inversement proportionnel à la variance à un coefficient constant près : c'est-à-dire :

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

avec σ_0^2 un coefficient constant appelé facteur de variance unitaire.

Si nous divisons la matrice des variances par ce coefficient de variance σ_0^2 , on obtient une nouvelle matrice appelée matrice des cofacteurs ou coefficients des poids (G), donc :

$$G_X = \frac{1}{\sigma_0^2} \Gamma_X$$

or la loi de propagation des variances dans les transformations linéaires nous indique que :

$$\sigma_Y = A \cdot \Gamma_X \cdot A^T \quad (7.6)$$

D'où :

$$\sigma_Y = \sigma_0^2 \cdot A \cdot G_X \cdot A^T \quad (7.7)$$

D'où le résultat :

Théorème 7.1 *La loi de propagation des cofacteurs s'effectue de la même façon que la loi de propagation des variances.*

Le choix des facteurs de variance (σ_0^2) est libre.

Définition 7.1 *On appelle matrice des poids la matrice inverse G^{-1} de la matrice des coefficients des poids (ou des cofacteurs).*

7.2 COEFFICIENT DE CORRÉLATION (r) OU INDICE DE DÉPENDANCE

Dans la théorie classique des erreurs, la notion de corrélation est négligée. Si les variables sont dépendantes, on devrait déterminer la matrice de variance ou la matrice de cofacteurs. On appelle corrélation entre 2 variables, la relation fonctionnelle entre elles. Le coefficient de corrélations r est donné pour 2 variables X et Y par :

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (7.8)$$

avec $-1 < r < 1$ et σ_X, σ_Y sont les écart-types respectivement de X et Y , σ_{XY} la covariance de XY .

Applications de la Théorie des Erreurs à des Problèmes Topographiques

8.1 1 ÈRE APPLICATION

Soit σ_S l'écart-type de la somme des angles d'un triangle mesurés indépendamment avec un écart-type $\sigma_\alpha = 20 \text{ dmgr}$.

Solution A :

$$S = A + B + C$$

On peut écrire d'après la loi de propagation des erreurs :

$$\sigma_S^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 \quad (8.1)$$

Comme :

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma_\alpha^2 \quad (8.2)$$

Il vient : $\sigma_S^2 = 3\sigma_A^2$ or $\sigma_A = 20 \text{ dmgr} \implies \sigma_S = \sqrt{3}\sigma_A = 1.732 \times 20 = 34.64 \text{ dmgr}$.
Soit :

$$\sigma_S = 34.64 \text{ dmgr}$$

Solution B :

La loi de propagation en notation matricielle est donnée par :

$$\Gamma_S = M \cdot \Gamma_V \cdot M^T$$

Comme :

$$S = (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = (1, 1, 1) \cdot V = M \cdot V$$

Il vient :

$$\Gamma_S = M \cdot \Gamma_V \cdot M^T = (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_A^2 \\ \sigma_B^2 \\ \sigma_C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma_\alpha^2 \cdot (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\sigma_\alpha^2$$

soit : d'où : $\sigma_S = 20 \cdot \sqrt{3} = 34.64 \text{ dmgr}$.

8.2 2 ÈME APPLICATION

Soit à mesurer une base de longueur $L = 250 \text{ m}$ un décamètre sachant que l'écart-type σ sur une portée est de 2 cm. Quel sera l'écart-type relatif du résultat ?

Solution A : nombre de portée = $250/10 = 25$ $\sigma_L = 2 \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10 \text{ cm}$. L'erreur relative du résultat est :

$$E_R = \Delta L / L = 0.1 / 250 = 1 / 2500$$

Solution B : soit l_i la longueur d'une portée, alors $L = \sum_1^{25} l_i$ qu'on écrit sous forme matricielle :

$$L = (1, 1, \dots, 1) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \end{pmatrix} = A \cdot l$$

où la matrice $A = {}_1A_{25} = (a_{ii} = 1, a_{ij} = 0, i \neq j)$ et l est vecteur 25×1 . La matrice de variance V_L est donnée par :

$$V_L = A \cdot V_l \cdot A^T$$

mais dans notre cas V_L est un scalaire égal σ_l^2 , par suite :

$$V_L = A \cdot V_l \cdot A^T = \sum_{i=1}^{i=25} 1 \cdot \sigma_l^2 = 25 \cdot \sigma_l^2 \implies \sigma_L = \sqrt{25} \sigma_l = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}$$

et l'écart-type relatif : $ER = (\Delta L) / L = 0.1 / 250 = 1 / 2500$.

8.3 APPLICATION : PROCÉDÉ DE LA BASE AUXILIAIRE

Pour obtenir $D = AC$ impossible à mesurer directement, on choisit une base AB perpendiculaire à AC en A dont on a mesuré la longueur l . On stationne C et on mesure l'angle $\alpha = \widehat{ACB}$ sous lequel on voit A et B .

1. Calculer la distance $D = AC$.
2. Sachant qu'on commet sur l un écart-type σ_l et sur l'angle α un écart-type σ_α . Quel est l'écart-type résultant σ_D sur la distance $D = AC$?

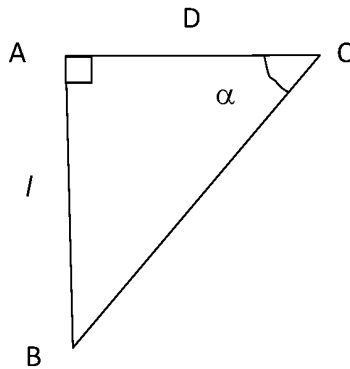


Fig. 8.1 Procédé de la base auxiliaire

1 - Solution A :

- 1 - $\operatorname{tg}\alpha = AB/AC = l/AC = l/D \implies \boxed{D = l \cdot \operatorname{cotg}\alpha}$
- 2 - Différentions la formule précédente, on obtient :

$$dD = \operatorname{cotg}\alpha \cdot dl - \frac{l}{\sin^2\alpha} d\alpha$$

Si les observations ne sont pas indépendantes, on aura d'après la loi de composition des écart-types (4.18) :

$$\sigma_D^2 = \operatorname{cotg}^2\alpha \sigma_l^2 + \frac{l^2}{\sin^4\alpha} \sigma_\alpha^2 - 2 \frac{l \cos\alpha}{\sin^3\alpha} \sigma_{l\alpha}$$

2 - Solution B :

Pour la question 2 : les observations sont indépendantes donc $\sigma_{l\alpha} = 0$. Nous avons :

$$dD = \left(\cotg\alpha, -\frac{l}{\sin^2\alpha} \right) \cdot \begin{pmatrix} dl \\ d\alpha \end{pmatrix} = A.X$$

où $A = \left(\cotg\alpha, -\frac{l}{\sin^2\alpha} \right)$ et $X^T = (dl, d\alpha)$. D'après la loi de propagation des variances, on obtient : $\sigma_D^2 = A.\Gamma_X.A^T$ avec Γ la matrice covariance de X , soit :

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} \sigma_l^2 & \sigma_{l\alpha} \\ \sigma_{l\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_l^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Par suite, on obtient :

$$\sigma_D^2 = A.\Gamma_X.A^T = \cotg^2\alpha\sigma_l^2 + \frac{l^2}{\sin^4\alpha}\sigma_\alpha^2$$

Application numérique :

$l = 30.02$, m , $\sigma_l = 0.02m$; $\alpha = 0.6370gr$, $\sigma_\alpha = 3.2dmgr$. α est petit donc $\sin\alpha = tg\alpha = \alpha$ avec α en radians. $\sigma_{al} = 3.2dmgr = 0.00032gr = 0.00032 \times \pi/200 = 5,0265 \times 10^{-6}rd$.

$$1 - D = l.\cotg\alpha = 30.02 \times 99,9369 = 3028.08m.$$

$$2 - \sigma_D^2 = \cotg^2\alpha\sigma_l^2 + \frac{l^2}{\sin^4\alpha}\sigma_\alpha^2 = 3,9949 + 1,1358 = 5.1307 \implies \sigma_D = 2.265m.$$

3ème Application :

Erreur sur la surface $S = L.l$ d'un rectangle sachant que L et l sont mesurées avec un écart-type $\sigma_L = 0.04m$ pour $L = 30m$ et $\sigma_l = 0.03m$ pour $l = 20m$.

Différentions la relation $S = L.l$, on obtient :

$$dS = l.dL + L.dl$$

on aura donc :

1ère Solution :

$$\sigma_S^2 = l^2.\sigma_L^2 + L^2.\sigma_l^2 \quad (8.4)$$

D'où :

$$\sigma_S^2 = 20^2 \times 16 \times 0.0001 + 30^2 \times 9 \times 0.0001 = 1.45m^4 \implies \sigma_S = 1.20m^2$$

2ème Solution :

On écrit que $dS = A.X$ avec A la matrice 1×2 définie par $A = (l, L)$ et X le vecteur 2×1 , soit $X^T = (dL, dl)^T$. La loi de propagation de variance d'une relation linéaire est donnée par :

$$\Gamma_S = A.\Gamma_X.A^T$$

Comme :

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} \sigma_L^2 & \sigma_{Ll} \\ \sigma_{lL} & \sigma_l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_L^2 & 0 \\ 0 & \sigma_l^2 \end{pmatrix}$$

car les mesures de L et l sont indépendantes. Par suite, on obtient :

$$\Gamma_S = A \cdot \Gamma_X \cdot A^T = (l, L) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_L^2 & 0 \\ 0 & \sigma_l^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ L \end{pmatrix} = l^2 \sigma_L^2 + L^2 \sigma_l^2 = 1.45 m^4 \Rightarrow \sqrt{\Gamma_S} = 1.20 m^2$$

4ème Application :

En un point S , on effectue un tour d'horizon sur les directions des points A, B, C et D dont les valeurs angulaires sont t_1, t_2, t_3 , et t_4 . Ces directions sont indépendantes et d'égales précision ayant pour écart-type $\sigma_t = 10 \text{ dmgr}$.

Déterminer la matrice de variance et covariance des angles S_1, S_2, S_3, S_4 .

Les angles S_1 à S_4 sont exprimés en fonction des lectures de directions par :

$$S_1 = t_2 - t_1,$$

$$S_2 = t_3 - t_2,$$

$$S_3 = t_4 - t_3,$$

$$S_4 = t_1 - t_4.$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

La loi de propagation de variance nous conduit à :

$$\Gamma_S = A \cdot \Gamma_t \cdot A^T \quad (8.6)$$

d'où :

$$\Gamma_S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Gamma_S = \begin{pmatrix} 200 & -100 & 0 & -100 \\ -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 \\ -100 & 0 & -100 & 200 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

d'où :

$$\sigma_{S_1}^2 = 100 \times 2(\text{dmgr})^2 \Rightarrow \sigma_{S_1} = \pm 10'' \cdot \sqrt{2}.$$

$$\sigma_{S_2}^2 = 100 \times 2(\text{dmgr})^2 \Rightarrow \sigma_{S_2} = \pm 10'' \cdot \sqrt{2}.$$

40 8. APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES ERREURS À DES PROBLÈMES TOPOGRAPHIQUES

$$\sigma_{S_3}^2 = 100 \times 2(dmgr)^2 \implies \sigma_{S_3} = \pm 10''\sqrt{2}.$$

$$\sigma_{S_4}^2 = 100 \times 2(dmgr)^2 \implies \sigma_{S_4} = \pm 10''\sqrt{2}.$$

$$\sigma_{S_1 S_2}^2 = -100 \text{ corrélation entre } S_1 \text{ et } S_2 \text{ par } t_2 : r_1 = \frac{-1}{2}$$

$$\sigma_{S_1 S_3} = 0 \text{ pas de corrélation } r_2 = 0.$$

$$\sigma_{S_1 S_4} = -100 \text{ corrélation entre } S_1 \text{ et } S_4 \text{ par } t_1 : r_3 = \frac{-1}{2}.$$

$$\sigma_{S_2 S_3} = -100 \text{ corrélation entre } S_2 \text{ et } S_3 \text{ par } t_3 : r_4 = \frac{-1}{2}.$$

$$\sigma_{S_2 S_4} = 0 \text{ pas de corrélation } r_5 = 0.$$

$$\sigma_{S_3 S_4} = -100 \text{ corrélation entre } S_3 \text{ et } S_4 \text{ par } t_4 : r_6 = \frac{-1}{2}.$$

Partie II
Notions de la Méthode des Moindres Carrés

Éléments de la Méthode des Moindres Carrés

9.1 INTRODUCTION

9.1.1 Définition du Problème

On veut déterminer r grandeurs scalaires inconnues G_1, G_2, \dots, G_r à l'aide de n grandeurs observées distinctes ou non des précédentes mais qui leur sont liées géométriquement. Les grandeurs G_i peuvent être des coordonnées de points, des altitudes ou des constantes d'orientation.

On dispose de n mesures ou observations : l_1, l_2, \dots, l_n . Le nombre des mesures est généralement surabondant par rapport au nombre r des inconnues à déterminer. Le but est de faire la compensation ou ajustement des mesures (en anglais : adjustment) et d'estimer au mieux les inconnues.

Les grandeurs G_i à déterminer peuvent être ou non liées entre elles ; s'il y a p relations entre les grandeurs, on dit que le nombre de degrés de liberté de l'ensemble est $r - p$. Par suite, il y aura à déterminer $r - p$ inconnues G_k . Si le nombre des observations n est supérieur à $r - p$, c'est une condition nécessaire pour déterminer les $r - p$ inconnues, mais elle n'est pas suffisante. Il faut trouver parmi les n observations un groupe de mesures qui permet de calculer les inconnues.

9.2 LES MESURES

Les mesures l_1, l_2, \dots, l_n écrites sous forme matricielle :

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

- peuvent être directes, dans ce cas, indépendantes, outre leur valeur, on connaît leur exactitude donnée par leur moyenne quadratique σ_i , dans ce cas, la matrice variance du vecteur l est alors diagonale.

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

et les $l_i \in \mathcal{N}(E(l), \sigma)$: \mathcal{N} loi normale $l \in \mathcal{N}(\dot{L}_i, \sqrt{\Gamma_l})$, où \dot{L} désigne la valeur réelle inconnue avec $E(l) = \dot{L}$.

- peuvent être indirectes, alors en général corrélées donc la matrice Γ_l n'est pas diagonale :

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{n1} & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

Le vecteur l sera considéré comme normal et sa densité de probabilité sera la fonction :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(l) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\text{Dét}(\Gamma_l)|}} e^{-\frac{1}{2}(l - \dot{L})^T \Gamma_l^{-1} (l - \dot{L})} \quad (9.4)$$

où $\text{Dét}(\Gamma)$ désigne le déterminant de la matrice Γ . Quand l est une variable scalaire, le graphique de $\mathcal{P}(l)$ est donné par la courbe de Gauss (**Fig. 9.1**).

Le but qu'on se propose est alors :

* d'estimer au mieux à partir de la donnée de n mesures la valeur des r grandeurs inconnues.

On appelle :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_r \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

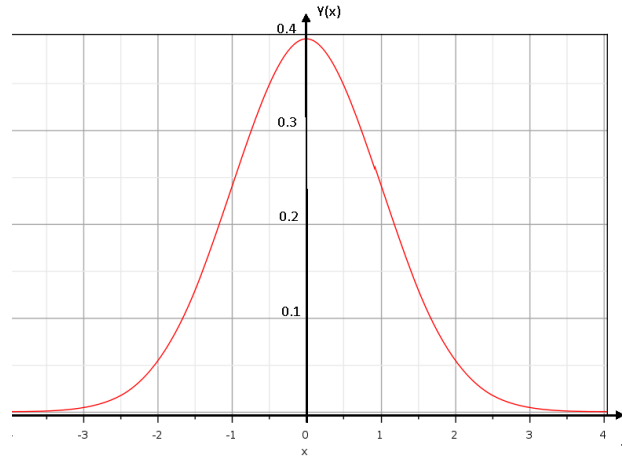


Fig. 9.1 La courbe de Gauss

le vecteur des estimateurs correspondants.

* de trouver le meilleur estimateur de la matrice variance $\Gamma_{\bar{X}}$ de \bar{X} qui chiffrera la précision de \bar{X} et d'évaluer l'exactitude de \bar{X} .

9.3 POIDS - MATRICE DE POIDS - VARIANCE DE LA MESURE DE POIDS UNITAIRE

Deux cas se posent :

- on connaît Γ_l : mesures directes et indépendantes ;
- on connaît Γ_l à un facteur près que la théorie permettra de déterminer.

On pose alors :

$$\Gamma_l = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (9.6)$$

avec :

- P matrice de poids (fixée avant les calculs) ;
- σ_0^2 variance unitaire scalaire inconnue à déterminer.

La matrice des poids doit être choisie comme inversement proportionnelle à la matrice variance des erreurs de mesures. En effet de (9.6), on a :

$$P = \sigma_0^2 \Gamma_l^{-1} = \left(\frac{\Gamma_l}{\sigma_0^2} \right)^{-1} \quad (9.7)$$

En particulier, si les mesures sont indépendantes, les poids doivent être choisis comme inversement proportionnels aux carrés des erreurs moyennes quadratiques.

Généralement si Γ_l est connue, alors $P = \Gamma_l^{-1}$, donc on considère que $\sigma_0^2 = 1$. Dans le cas de mesures directes, la matrice $P = (p_i)$ est diagonale avec :

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (9.8)$$

Une comparaison de la variance unitaire *a priori* σ_0^2 et la valeur estimée s_0^2 permettra de déceler les incohérences dans les données relatives à l'exactitude des mesures.

9.4 MODÈLES FONCTIONNEL ET STOCHASTIQUE

Ces modèles décrivent les phénomènes physiques.

9.4.1 Le Modèle Fonctionnel

Le modèle fonctionnel décrit la relation entre les observables, les paramètres et les relations à utiliser. Qu'est-ce qu'il faut choisir comme modèle fonctionnel pour décrire un phénomène physique ?

Hypothèse : à une grandeur, on peut associer sa valeur maximale vraie. Soit :

$$l \Rightarrow \dot{l}$$

Soit ${}_n\dot{L}_1$ le vecteur des valeurs nominales des observables. S'il y a $n - r$ relations indépendantes données par l'expérience, alors r est appelé le nombre de degrés de liberté du modèle fonctionnel.

Exemple 1 : déterminer les angles A, B, C d'un triangle plan. On a :

$$\dot{A} + \dot{B} + \dot{C} = \pi$$

Donc $r = 3 - 1 = 2$.

Exemple 2 : déterminer un côté d'un triangle. On a 4 observations (3 angles et un côté) et une relation indépendante (la somme des angles d'un triangle plan vaut π) d'où $r = 4 - 1 = 3$.

Exemple 3 : déterminer les 3 angles et les 3 côtés d'un triangle plan. On a 3 relations indépendantes :

$$\begin{aligned} \dot{A} + \dot{B} + \dot{C} &= \pi \\ \dot{a}^2 &= \dot{b}^2 + \dot{c}^2 - 2\dot{b}\dot{c}\cos\dot{A} \\ \dot{b}^2 &= \dot{a}^2 + \dot{c}^2 - 2\dot{a}\dot{c}\cos\dot{B} \end{aligned}$$

Le vecteur des observables est :

$${}_6\dot{L}_1 = \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \\ \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

La détermination de l'équation (9.9) se fait par la méthode des équations de condition c'est-à-dire que le vecteur \dot{L} vérifie :

$$\Phi(\dot{L}) = 0 \quad (9.10)$$

avec $n - r$ relations indépendantes et Φ une certaine fonction.

9.4.2 La Méthode des Equations d'observations

Avec cette méthode, on décrit le modèle fonctionnel par des paramètres commodes. Soit ${}_p\dot{X}_1$ le vecteur des paramètres avec $p \geq r$ où r est le degré de liberté du modèle. On cherche alors à exprimer les observables \dot{L} en fonction des paramètres du modèle, soit :

$${}_n\dot{L}_1 = \Phi(\dot{X}) \iff \Psi(\dot{X}, \dot{L}) = 0 \quad (9.11)$$

Les équations d'observations sont si $p \geq r$:

$${}_n\dot{L}_1 = \Phi(\dot{X}) \quad (9.12)$$

$$\Xi(\dot{X}) = 0 \quad (9.13)$$

L'équation (9.13) représente les $(p - r)$ relations indépendantes dites **équations de condition**.

Exemple : Détermination des coordonnées des sommets d'un triangle plan $A_1A_2A_3$ à partir de l'observation des trois angles aux sommets A_1, A_2, A_3 . On choisit comme paramètres $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3$, donc $\dot{X} = {}_6\dot{X}_1$ s'écrit :

$$\dot{X} = {}_6\dot{X}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

Les observables sont les angles $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3$, on a alors :

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \varphi_1(\dot{X}) \\ \dot{A}_2 &= \varphi_2(\dot{X}) \\ \dot{A}_3 &= \varphi_3(\dot{X}) \end{aligned}$$

et :

$${}_3\dot{L}_1 = \dot{L} = \begin{pmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{pmatrix} = \Phi(\dot{X}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

Les équations de condition sont quatre à savoir :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{y}_3 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= 100m \end{aligned}$$

Il reste à déterminer (\dot{x}_2, \dot{y}_2) . Comme $n = 6$, on a $6 - r = 4 \implies r = 2$ degrés de liberté. Alors :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

On laisse à titre d'exercice la détermination de la fonctionnelle Φ .

9.4.3 Le Modèle Stochastique

C'est le modèle qui décrit les lois qui réagissent les erreurs des mesures des observables.

Définition 9.1 On appelle erreur la quantité e telle que :

$$e = l - \dot{l} = \text{"Faux"} - \text{"Vrai"} \quad (9.17)$$

et correction la quantité $-e$.

Donc $\dot{l} = l + (-e)$. On corrige la valeur observée pour avoir la valeur réelle.

On utilise un modèle des erreurs centrées avec une variance. En répétant les mesures, les erreurs de ces mesures sont la réalisation d'une variable aléatoire centrée (e). Soit : $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$. On a alors :

$$E(e) = 0 \text{ ou encore } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_i^n e_i}{n} = 0 \quad (9.18)$$

Le vecteur erreur est :

$$e = {}_n e_1 = L - \dot{L} \quad (9.19)$$

La matrice variance est définie par :

$${}_n \sigma_n^2 = \sigma^2 = E(ee^T) \quad (9.20)$$

C'est une matrice symétrique $n \times n$ et elle est positive c'est-à-dire :

$$\forall U, U^T \sigma^2 U \geq 0 \quad (9.21)$$

où U est un vecteur à n composantes. En effet :

$$U^T \sigma^2 U = U^T E(ee^T) U = E(U^T ee^T U) = E((U^T \cdot e) \cdot (e^T \cdot U))$$

Or $U^T \cdot e = w \in \mathbb{R}$ et $(e^T \cdot U) = U^T \cdot e = w$, par suite :

$$\forall U, U^T \sigma^2 U = E((U^T \cdot e) \cdot (e^T \cdot U)) = E(w \cdot w) = E(w^2) \geq 0 \quad (9.22)$$

Si on pose $S = \sigma^2$, on a $U^T S U \geq 0$. S est positive et on démontre que les valeurs propres de S sont positives et qu'on peut écrire S sous la forme :

$$S = V \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} V^T = V \Lambda^2 V^T \implies \sqrt{S} = V \Lambda V^T \quad (9.23)$$

avec V une matrice orthogonale normale c'est-à-dire : $V^{-1} = V^T$. Alors :

$$\sigma = \sqrt{S} = \text{la matrice écart-type du vecteur erreur } e \quad (9.24)$$

En multipliant les mesures, on a un accroissement mécanique de la précision. Seulement la première hypothèse est très fragile : le centrage des erreurs $E(e) = 0$ est-il toujours vérifié ?

Les erreurs systématiques subsistent encore vue l'insuffisance de définition des valeurs nominales \dot{L} ainsi que les erreurs dues aux instruments. Ces effets montrent les limites de la méthode des moindres carrés.

Le modèle des erreurs des mesures est la loi normale centrée, c'est-à-dire que $e \in \mathcal{N}(0, \sigma)$ où σ est la matrice écart-type. En utilisant le modèle stochastique $\mathcal{N}(0, \sigma)$ avec :

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

et soit la i ème équation d'observation :

$$\sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}x_j = l_i - e_i \quad (9.26)$$

La règle qu'il faut utiliser c'est qu'il faut diviser chaque équation par l'écart-type correspondant :

$$\boxed{\frac{\sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}x_j}{\sigma_i} = \frac{l_i}{\sigma_i} - \frac{e_i}{\sigma_i}} \quad (9.27)$$

On obtient les estimations optimales, soit σ petit, l'observation est précise et le poids $p_i = \frac{1}{\sigma_i}$ est grand.

9.5 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS D'OBSERVATIONS

Pour la méthode des équations d'observations, on a :

$$\dot{L} = \Phi(\dot{X}) \quad (9.28)$$

On pose :

$$\begin{cases} \dot{X} = X_0 + \dot{x} \\ \dot{L} = L_0 + \dot{l} \\ L = L_0 + l = \text{"observé"} \\ L_0 = \Phi(X_0) = \text{"calculé"} \\ e = L - \dot{L} = l - \dot{l} = \text{"l'erreur"} \end{cases} \quad (9.29)$$

En développant l'équation (9.28), on obtient :

$$L_0 + \dot{l} = \Phi(\dot{X}) = \Phi(X_0 + \dot{x}) = \Phi(X_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{X_0} \cdot \dot{x} + \varepsilon(\dot{x}) \|\dot{x}\| \quad (9.30)$$

avec $\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \varepsilon(\dot{x}) \rightarrow 0$

On appelle :

$$A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{X_0} \quad (9.31)$$

A est une matrice $m \times n$ où m est le nombre des relations d'observations et n le nombre des paramètres inconnus. On obtient alors :

$$A\dot{x} = \dot{l} - \varepsilon(\dot{x}) \quad (9.32)$$

On substitue à l'équation précédente l'équation :

$$A\dot{x} = \dot{l} \quad (9.33)$$

sachant que $\lim \varepsilon(\dot{x}) \rightarrow 0$ quand $\dot{x} \rightarrow 0 \implies |\varepsilon(\dot{x})| \ll 1$ et $|\varepsilon(\dot{x})| \|\dot{x}\| \leq |l_i| \implies |\varepsilon(\dot{x})| \|\dot{x}\| \leq \|e\|$. On utilise une procédure d'itération en prenant X_0 une valeur estimée de l'inconnue.

Exemple : Observation d'une distance entre deux points 1 et 2. On a les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_{10} + \Delta\dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 &= y_{10} + \Delta\dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 &= x_{20} + \Delta\dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 &= y_{20} + \Delta\dot{y}_2 \\ \dot{d} &= d_0 + \Delta\dot{d} \\ d &= d_0 + \Delta d \\ d_0^2 &= (x_{10} - x_{20})^2 + (y_{10} - y_{20})^2 \end{aligned} \quad (9.34)$$

A partir de (9.34), on a :

$$\begin{aligned} d^2 &= (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 = (d_0 + \Delta\dot{d})^2 \\ (d_0 + \Delta\dot{d})^2 &= (x_{10} + \Delta\dot{x}_1 - x_{20} - \Delta\dot{x}_2)^2 + (y_{10} + \Delta\dot{y}_1 - y_{20} - \Delta\dot{y}_2)^2 \\ d_0^2 + 2d_0\Delta\dot{d} + \Delta\dot{d}^2 &= (x_{10} - x_{20})^2 + (\Delta\dot{x}_1 - \Delta\dot{x}_2)^2 + 2(x_{10} - x_{20})(\Delta\dot{x}_1 - \Delta\dot{x}_2) + \\ &\quad (y_{10} - y_{20})^2 + (\Delta\dot{y}_1 - \Delta\dot{y}_2)^2 + 2(y_{10} - y_{20})(\Delta\dot{y}_1 - \Delta\dot{y}_2) \end{aligned}$$

Soit :

$$\Delta\dot{d} = \frac{x_{10} - x_{20}}{d_0} (\Delta\dot{x}_1 - \Delta\dot{x}_2) + \frac{y_{10} - y_{20}}{d_0} (\Delta\dot{y}_1 - \Delta\dot{y}_2) = d - d_0 - e_d \quad (9.35)$$

L'équation (9.35) représente l'équation d'observation d'une distance. On montre de même que l'équation d'un tour d'horizon s'écrit sous la forme :

$$\frac{y_{10} - y_{20}}{d_0^2} (\Delta\dot{x}_1 - \Delta\dot{x}_2) - \frac{x_{10} - x_{20}}{d_0^2} (\Delta\dot{y}_1 - \Delta\dot{y}_2) + dv_0 = \alpha - \alpha_0 - e_\alpha \quad (9.36)$$

9.6 LA SOLUTION DES MOINDRES CARRÉS

Le système (9.33) s'écrit en prenant en compte de la matrice des poids $P = \sigma^{-2}$:

$$\sigma^{-1}A\dot{x} = \sigma^{-1}l \iff \sqrt{P}A\dot{x} = \sqrt{P}l \quad (9.37)$$

La solution du système précédent vient en minimisant en norme euclidienne l'expression $\|\sqrt{P}A\dot{x} - \sqrt{P}l\|$ ou encore :

$$U(x) = (\sqrt{P}A\dot{x} - \sqrt{P}l)^T (\sqrt{P}A\dot{x} - \sqrt{P}l) = x^T (A^T P A)x - 2x^T A^T P l + l^T P l \quad (9.38)$$

On obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \text{grad}U(x) = 2A^T P A x - 2A^T P l$$

Si le minimum existe, x est solution si :

$$2A^T P A x - 2A^T P l = 0 \Rightarrow A^T P A x = A^T P l$$

$A^T P A$ est symétrique, régulière et inversible car elle est carrée de rang n . Donc la solution des moindres carrés est :

$$\boxed{\bar{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \Rightarrow \bar{X} = X_0 + \bar{x}} \quad (9.39)$$

Les observations compensées :

$$\boxed{\bar{L} = L_0 + \bar{l} = L_0 + A\bar{x}} \quad (9.40)$$

9.7 PROPRIÉTÉS DES ESTIMATEURS

Propriété *L'estimateur des moindres carrés \bar{X} est centré et sans biais c'est-à-dire :*

$$\boxed{E(\bar{X}) = \dot{X} \quad \text{ou} \quad E(\bar{X}) = \dot{x}} \quad (9.41)$$

Ainsi à des jeux différents d'observations, on fait correspondre des valeurs \bar{X} différentes dont on peut estimer l'espérance mathématique ou moyenne. Cet estimateur est un vecteur aléatoire. Comme :

$$l = \dot{l} + e \implies E(l) = E(\dot{l}) + E(e) = \dot{l} + 0 = \dot{l}$$

alors :

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E((A^T P A)^{-1} A^T P l) = (A^T P A)^{-1} A^T P E(l) = \\ &= (A^T P A)^{-1} A^T P \dot{l} = (A^T P A)^{-1} A^T P A \dot{x} \end{aligned}$$

Soit :

$$E(\bar{X}) = \dot{x} \quad (9.42)$$

Parmi les estimateurs sans biais qui est le plus précis est \bar{X} (celui dont l'écart-type est le plus petit), soit :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} \quad (9.43)$$

\bar{X} est le plus précis pour chaque composante. On obtient l'estimation la plus précise (la matrice $\sigma_{\bar{X}}$ est minimale). On détermine cette matrice :

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = E \left\{ (\bar{X} - E(\bar{X})) (\bar{X} - E(\bar{X}))^T \right\} = E \left\{ (\bar{X} - \dot{x}) (\bar{X} - \dot{x})^T \right\} \quad (9.44)$$

Or :

$$\bar{X} - \dot{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P (l - \dot{l}) = (A^T P A)^{-1} A^T P e \quad (9.45)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{X}}^2 &= (A^T P A)^{-1} A^T P E(e e^T) P A (A^T P A)^{-1} = \\ &= (A^T P A)^{-1} A^T P \sigma_0^2 P^{-1} P A (A^T P A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}} \quad (9.46)$$

car $E(e e^T) = \sigma_0^2 P^{-1}$ avec σ_0^2 un facteur scalaire.

Un estimateur est défini en fonction d'un échantillon l_1, l_2, \dots, l_n aléatoire, soit :

$$\tilde{x} = \varphi(l_1, l_2, \dots, l_n) \quad (9.47)$$

\tilde{x} est proche de \dot{x} . On cherche les estimateurs sans biais, c'est-à-dire :

$$E(\tilde{x}) = \dot{x} \quad (9.48)$$

Exemple : soient une quantité \dot{x} et l_1, l_2, \dots, l_n les observables indépendants d'une même variable aléatoire de x , alors un estimateur de \dot{x} est donné par :

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \quad (9.49)$$

Alors cet estimateur est symétrique, sans biais (les erreurs de mesures sont centrées), de précision maximale parmi les estimateurs linéaires et sans biais, estimateur des moindres carrés et asymptotiquement normal (si $n \rightarrow +\infty$), la fonction de répartition de \bar{m} comme variable aléatoire converge uniformément vers une fonction de répartition de la loi normale.

9.8 LES RÉSIDUS

Le vecteur résidu est défini par :

$$V = \bar{L} - L = \bar{l} - l = \text{"compensé"} - \text{"observé"} \quad (9.50)$$

Pourquoi calculer les résidus v :

1- Les composantes de V sont de l'ordre des erreurs de mesures. La redondance des mesures est donnée par $n - r$, avec taux de redondance est égale à $(n - r)/n$. L'accroissement des mesures implique la précision mais ce n'est pas toujours vrai.

2- Possibilité de vérifier la normalisation de la résolution :

$$A^T P V = 0 \quad (9.51)$$

On a en effet :

$$A^T P V = A^T P (\bar{l} - l) = A^T P (A \bar{X} - l) = A^T P A \bar{X} - A^T P l = 0$$

Soit \bar{x} une solution, $V' = A \bar{x} - l \implies A^T P V' = 0 \implies \bar{x} = \bar{X}$.

9.8.1 Expression du vecteur résidu

Le vecteur résidu s'exprime par :

$$V = (A(A^T P A)^{-1} A^T P - I)(l - \hat{l}) = (A(A^T P A)^{-1} A^T P - I)e = B.e \quad (9.52)$$

où $B = (A(A^T P A)^{-1} A^T P - I)$ est une matrice singulière (non inversible). Utilisant l'équation (9.46), V s'écrit :

$$V = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} A \sigma_X^2 A^T P - I \right) e \quad (9.53)$$

Comme $\bar{l} = A \bar{X} \implies \bar{l} - \hat{l} = A(\bar{X} - \hat{x})$, d'où la variance des observations compensées :

$$\sigma_l^2 = E \{ (l - \hat{l})(l - \hat{l})^T \} = A \sigma_X^2 A^T \quad (9.54)$$

Utilisant l'équation (9.53), on obtient :

$$V = \left(\frac{\sigma_l^2}{\sigma_0^2} P - I \right) e \quad (9.55)$$

9.9 LA VARIANCE DES MESURES

Par définition, la variance des mesures l_i est :

$$\tilde{\sigma}^2 = E[(l_i - E(l_i))^2] \quad (9.56)$$

or :

$$E(l_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \bar{m}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i - E(l_i))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i^2 - 2l_i E(l_i) + E(l_i)^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i^2 - 2l_i \bar{m} + \bar{m}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^2 - 2\bar{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i + \bar{m}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^2 - \bar{m}^2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} \bar{m} = E(l_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \\ \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^2 - \bar{m}^2 \end{cases}} \quad (9.57)$$

Pour une variable centrée, on a :

$$\sigma^2 = E(l^2) - E(l)^2 = E(l^2) - \bar{x}^2 \implies E(l^2) = \sigma^2 + \bar{x}^2 \quad (9.58)$$

Comme :

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \longrightarrow \sigma_{\bar{m}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_l = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

et :

$$\sigma_{\bar{m}}^2 = E(\bar{m}^2) - E(\bar{m})^2 = E(\bar{m}^2) - \bar{x}^2 \implies E(\bar{m}^2) = \bar{x}^2 + \sigma_{\bar{m}}^2 = \bar{x}^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(\tilde{\sigma}^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^2 - \bar{m}^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(l_i^2) - E(\bar{m}^2) = E(l_i^2) - E(\bar{m}^2) \\ &= \sigma^2 + \bar{x}^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2 \end{aligned} \quad (9.59)$$

Alors, l'estimateur $\tilde{\sigma}^2$ est biaisé. Si on adopte comme formule de l'estimateur de la variance :

$$\boxed{\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{m})^2} \quad (9.60)$$

on obtient :

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2 \implies \text{l'estimateur est sans biais} \quad (9.61)$$

(A vérifier à titre d'exercice !). De même, pour :

$$\tilde{\sigma}' = \sqrt{\tilde{\sigma}^2} \implies E(\tilde{\sigma}') \neq \sigma$$

9.10 L'ÉCRITURE MATRICIELLE DES ÉQUATIONS D'OBSERVATIONS

Les équations d'observations peuvent s'écrire matriciellement :

$$AX + K = V \quad (9.62)$$

où :

- A est la matrice des coefficients ;
- V le vecteur des résidus ;
- K est le vecteur : $K = \text{"calculé"} - \text{"observé"}$;
- X est le vecteur des inconnues (les corrections dx_i, dy_i, \dots aux valeurs approchées x_i^0, y_i^0, \dots).

Pour n équations d'observations et r le nombre des inconnues, on a :

$${}_n A_{r \cdot r} X_1 + {}_n K_1 = {}_n V_1, \quad n > r \quad (9.63)$$

La solution de (9.63) par la méthode des moindres carrés est obtenue en minimisant la forme quadratique :

$$\sum_{i=1}^{i=n} V_i^2 = V^T V = (AX + K)^T (AX + K) \quad (9.64)$$

où V^T désigne la matrice transposée de V .

Sachant que :

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= A^T + B^T \\ (AB)^T &= B^T A^T \end{aligned}$$

L'équation (9.64) s'écrit :

$$V^T V = X^T (A^T A) X + X^T A^T K + K^T A X + K^T K$$

Comme $X^T A^T K$ et $K^T A X$ sont des scalaires, alors :

$$X^T A^T K = K^T A X$$

Par suite :

$$V^T V = X^T (A^T A) X + 2X^T A^T K + K^T K$$

On pose :

$$N = A^T A \quad (9.65)$$

Alors la matrice N est symétrique ($N^T = N$) et inversible c'est-à-dire régulière et de rang r . En effet la matrice ${}_n A_r$ est de rang r c'est-à-dire on peut extraire une sous matrice ${}_r A'_r$ de A telle que son déterminant est différent de zéro :

$$\text{Dét}({}_r A'_r) \neq 0$$

La matrice N est définie positive, on entend par là que :

$$\forall X \neq 0 \quad X^T N X > 0 \quad (9.66)$$

car :

$$X^T N X = X^T A^T A X = (A X)^T (A X) = \|A X\|^2 \geq 0$$

le carré de la norme du vecteur $A.X$ et pour $X \neq 0$ on a $A.X \neq 0$ sinon la matrice A serait de rang $< r$, par suite (9.66) est vérifiée.

La matrice N est dite *la matrice normale*.

En posant :

$$\begin{aligned} F(X) &= X^T (A^T A) X + 2X^T A^T K + K^T K \\ \text{ou } F(X) &= V^T V = X^T N X + 2X^T A^T K + K^T K \end{aligned} \quad (9.67)$$

c'est une fonction scalaire du vecteur X . La solution de (9.67) avec $F(X)$ minimum est telle que :

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 0$$

La dérivée de (9.67) par rapport au vecteur des inconnues est telle que :

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 2N.X + 2A^T.K = 0 \Rightarrow N.X + A^T.K = 0 \quad (9.68)$$

Soit :

$$\boxed{\bar{X} = -N^{-1} A^T K} \quad (9.69)$$

où \bar{X} est le vecteur déterminé des inconnues. Si X_0 est le vecteur approché des inconnues, on a :

$$\tilde{X} = X_0 + \bar{X} \quad (9.70)$$

où \tilde{X} est le vecteur des valeurs définitives des inconnues.

Le vecteur \tilde{V} se détermine par :

$$\tilde{V} = A\bar{X} + K = -AN^{-1}A^T K + K = (I - AN^{-1}A^T)K \quad (9.71)$$

Le vecteur des observations compensées est donné par :

$$\tilde{L} = I + \tilde{V} \quad (9.72)$$

Notons que :

$$\boxed{A^T \tilde{V} = 0} \quad (9.73)$$

En effet, $A^T \tilde{V} = A^T (I - AN^{-1}A^T)K = A^T (K - AN^{-1}A^T K) = A^T K - A^T AN^{-1}A^T K$, soit $A^T \tilde{V} = 0$ en tenant compte que $N = A^T A$. La condition (9.73) est appelé renormalisation. Elle est importante car elle garantit que le résultat obtenu \bar{X} est bien celui des moindres carrés.

Dans ce chapitre, on a considéré le système :

$$AX + K = V$$

sans parler de la matrice P . Si on considère la matrice de poids P et la matrice de variance des observations :

$$\Gamma_i = \sigma_0^2 P^{-1}$$

La solution de (9.62) des moindres carrés est obtenue à partir du système normal :

$$(A^T PA)\bar{X} + A^T PK = 0$$

en minimisant $V^T P V$ ou encore si la matrice P est diagonale $P = (p_{ii} = p_i)$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i^2 \text{ minimum}} \quad (9.74)$$

Posant encore $N = A^T PA$ la matrice normale, la solution de (9.74) est :

$$\boxed{\bar{X} = -(A^T PA)^{-1} A^T PK = -N^{-1} A^T PK} \quad (9.75)$$

La condition de la renormalisation devient :

$$\boxed{A^T P \tilde{V} = 0} \quad (9.76)$$

Pour l'estimation du facteur de la variance unitaire, on admet que l'estimateur de σ_0^2 est donné par :

$$\boxed{s^2 = \frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{n - r}} \quad (9.77)$$

Pour l'estimateur de la variance de \bar{X} , on va utiliser la propriété suivante :

$$\boxed{\text{si } Y = A.Z \implies \Gamma_Y = A.\Gamma_Z.A^T} \quad (9.78)$$

avec Γ_Y la matrice variance de Y et Γ_Z celle de Z . En effet :

$$\begin{aligned}\Gamma_Y &= E \{ (E(Y) - Y)(E(Y) - Y)^T \} \\ E(Y) &= E(AZ) = AE(Z)\end{aligned}$$

avec E l'opérateur espérance mathématique. D'où :

$$\begin{aligned}\Gamma_Y &= E \{ (AE(Z) - AZ)(AE(Z) - AZ)^T \} = E \{ A(E(Z) - Z)(A(E(Z) - Z))^T \} \\ &= AE \{ (E(Z) - Z)(E(Z) - Z)^T A^T \} \\ &= AE \{ (E(Z) - Z)(E(Z) - Z)^T \} A^T\end{aligned}\quad (9.79)$$

Or :

$$\Gamma_Z = E \{ (E(Z) - Z)(E(Z) - Z)^T \}$$

Par suite :

$$\Gamma_Y = A\Gamma_Z A^T \quad (9.80)$$

Comme :

$$\bar{X} = -N^{-1}A^T P K$$

d'où :

$$\text{Var}(\bar{X}) = -N^{-1}A^T P \text{Var}(K) \cdot (-N^{-1}A^T P)^T = N^{-1} \cdot A^T \cdot P \text{Var}(K) \cdot P \cdot A \cdot N^{-1} \quad (9.81)$$

Comme $K = L_0 - l \Rightarrow \text{Var}(K) = \text{Var}(l) = \Gamma_l = \sigma_0^2 P^{-1}$, d'où :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\bar{X}} &= N^{-1}A^T P \cdot \sigma_0^2 \cdot P^{-1} P A N^{-1} = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} A^T P A N^{-1} = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} \\ &\boxed{\Gamma_{\bar{X}} = \sigma_0^2 \cdot N^{-1}}\end{aligned}\quad (9.82)$$

D'où l'estimateur de la variance de \bar{X} :

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\bar{X}} = s^2 \cdot N^{-1}} \quad (9.83)$$

La matrice $\bar{\Gamma}_{\bar{X}}$ permet de déterminer la précision des inconnues déterminées par la méthode des moindres carrés.

CHAPITRE 10

Méthode des Equations d'Observations avec Equations de condition

10.1 CAS OÙ LES r GRANDEURS À DÉTERMINER SONT LIÉS PAR p RELATIONS

On suppose qu'il existe parmi les n grandeurs observées l_i un ensemble au moins de r grandeurs observées permettant de déterminer les r grandeurs inconnues, c'est-à-dire que la matrice A de $AX + K = V$ est de rang r .

Après linéarisation (si nécessaire), les liaisons entre les r grandeurs inconnues donneront bien à un système de p équations de condition :

$$\left. \begin{array}{l} BX = M \\ \text{ou } {}_p B_{r \cdot r} X_1 = {}_p M_1 \end{array} \right\} \quad (10.1)$$

avec rang $B = p$ et B et M ne dépendent que de X .

Pour estimer X , on a considéré l'ensemble des relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} AX + K = V \\ BX = M \end{array} \right. \quad (10.2)$$

avec rang $A = r$ et rang $B = p$. Après compensation, on aura le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} A\bar{X} + K = \bar{V} \\ B\bar{X} = M \end{array} \right. \quad (10.3)$$

On remarque qu'une équation de condition est équivalente à une équation d'observations dont le poids est infini : en effet M peut être considéré comme un vecteur d'observations fictives certaines dont les erreurs moyennes quadratiques (emq) sont

nulles et par suite les poids infinis.

On se ramène au cas plus haut, à partir de $BX = M$ exprimer p inconnues en fonction des $r - p$ autres et les reporter dans $AX + K = V$.

10.2 APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

On a le modèle fonctionnel linéaire (10.3) qu'on écrit sous la forme :

$$\begin{cases} A\dot{x} = l - \dot{e} \\ B\dot{x} = k \end{cases} \quad (10.4)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_p \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}; \quad \dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } n \geq p$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix}, \quad \text{et } k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{pmatrix}$$

On suppose que les erreurs \dot{e} suivent la loi normale $\iff \dot{e} \in \mathcal{N}(0, \sqrt{P^{-1}}\sigma_0)$, P est le poids et $\sigma^2 = P^{-1}\sigma_0^2$. Ecrivons la fonction de densité de probabilité, soit :

$$\mathcal{P}(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{(\sigma_0^2)^{n/2} \det \sqrt{P^{-1}}} e^{-\frac{1}{2}(l - A\dot{x})^T \frac{P}{\sigma_0^2} (l - A\dot{x})}$$

Les inconnues sont \dot{x} et σ_0^2 . On considère la fonction scalaire :

$$U = \text{Log } \mathcal{P} + \Lambda^T \cdot (B\dot{x} - k)$$

avec Λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

Les inconnues sont obtenues en cherchant les extrémums de U . U s'écrit :

$$U = Cte - \frac{n}{2} \text{Log} \sigma_0^2 - \frac{1}{2} (l - A\hat{x})^T \frac{P}{\sigma_0^2} (l - A\hat{x}) + \Lambda^T \cdot (B\hat{x} - k) \quad (10.6)$$

Les extrémums de U sont obtenus par la solution de :

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{n}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^4} (l - A\hat{x})^T P (l - A\hat{x}) = 0 \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{x}} = -\frac{A^T P A}{\sigma_0^2} \hat{x} + \frac{A^T P l}{\sigma_0^2} + B^T \Lambda = 0 \quad (10.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Lambda} = B\hat{x} - k = 0 \quad (10.9)$$

En notant que :

$$A\hat{x} - l = v = \text{le vecteur résidu}$$

L'équation (10.7) donne :

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{n} \quad (10.10)$$

(10.8) et (10.9) donnent le système :

$$\begin{pmatrix} A^T P A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ -\Lambda \sigma_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P l \\ k \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

La solution du système précédent donne la solution des moindres carrés. L'estimateur \tilde{x} est un estimateur sans biais, asymptotiquement normal, alors que l'estimateur :

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{n} \quad (10.12)$$

est biaisé mais asymptotiquement sans biais. Par contre, si on prend :

$$\tilde{\sigma}_0'^2 = \frac{v^T P v}{n - r} \quad (10.13)$$

$\tilde{\sigma}_0'^2$ est sans biais.

Une question se pose : le choix des paramètres influence-t-il sur les solutions. Pour la méthode des moindres carrés, la solution est indépendante. En effet, soit le système :

$$A\dot{x} = l - \dot{e} \implies \text{la solution } \tilde{x}$$

Soit le système avec d'autres paramètres :

$$\dot{y} = C\dot{x} + k \implies \tilde{y} = C\tilde{x} + k \quad (10.14)$$

Soit $\tilde{y} = C\tilde{x}' + k$ une autre solution, on a alors :

$$\sigma_{\tilde{y}}^2 = C\sigma_{\tilde{x}'}^2 C^T \quad (10.15)$$

En utilisant l'inégalité de Rao-Cramér :

$$u^T \sigma_{\tilde{y}}^2 u = u^T C\sigma_{\tilde{x}'}^2 C^T u = (C^T u)^T \sigma_{\tilde{x}'}^2 (C^T u) \text{ minimum si } \sigma_{\tilde{x}'}^2 \text{ est minimum} \implies \tilde{x}' = \tilde{x} \quad (10.16)$$

10.3 EXEMPLES DE POSE D'EQUATIONS D'OBSERVATIONS

On a les éléments de base :

$$\begin{aligned} \dot{L} &= l + \dot{v} \\ \sum v^2 &= \text{minimum} \\ \Phi(\dot{X}, \dot{L}) &= 0 \end{aligned} \quad (10.17)$$

où \dot{X}, \dot{L} sont respectivement les vecteurs des valeurs nominales des paramètres inconnus et de l'observable. \dot{v} le vecteur des résidus réels et Φ une fonction liant les inconnues et l'observable.

A partir de la relation :

$$dL + L_0 - l = v \quad (10.18)$$

soit :

$$\boxed{\text{Compensé} + \text{Calculé} - \text{Observé} = \text{Résidu}}$$

On va écrire la relation (10.18) pour différents types d'observations.

10.4 LA GÉODÉSIE BIDIMENSIONNELLE

10.4.1 Observation d'une distance

Soient deux points M_1 et M_2 de coordonnées approximatives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . La distance calculée est :

$$D_0 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (10.19)$$

La fonction Φ est :

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = D - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0 \quad (10.20)$$

Soit :

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (10.21)$$

D'où :

$$dD = \frac{x_1 - x_2}{D} (dx_1 - dx_2) + \frac{y_1 - y_2}{D} (dy_1 - dy_2) \quad (10.22)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \Delta X &= x_1 - x_2 \\ \Delta Y &= y_1 - y_2 \end{aligned} \quad (10.23)$$

On a alors la relation d'observations d'une distance entre les points 1 et 2 :

$$\boxed{\frac{\Delta X}{D_0} dx_1 + \frac{\Delta Y}{D_0} dy_1 - \frac{\Delta X}{D_0} dx_2 - \frac{\Delta Y}{D_0} dy_2 + D_0 - D_{obs} = v_{12}} \quad (10.24)$$

Si le point 1 est connu, on a alors :

$$-\frac{\Delta X}{D_0} dx_2 - \frac{\Delta Y}{D_0} dy_2 + D_0 - D_{obs} = v_{12} \quad (10.25)$$

10.4.1.1 Observation Angulaire

Ecrivons la relation (10.18) pour la direction M_1M_2 :

$$g = \lambda + \vartheta_A \quad (10.26)$$

$$\text{Gisement réel} = \text{Lecture réelle} + \text{Constante de désorientation du limbe} \quad (10.27)$$

Cette relation est remplacée par une relation d'estimation :

$$G = L + V_A \quad (10.28)$$

Comme $L = l + v =$ lecture faite + correction de compensation, d'où :

$$G = L + V_A = l + v + V_1 \quad (10.29)$$

On introduit un réseau géométrique approché $(x_1, y_1, x_2, y_2, G_0)$ et une valeur approchée du calage du limbe V_{01} au point M_1 d'où :

$$\begin{aligned} G_0 + dG &= l + v + V_{01} + dV_1 \\ \text{ou encore } dG - dV_1 + G_0 - l - V_{01} &= v \end{aligned}$$

dG est la différentielle de G :

$$tgG = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$(1 + tg^2 G)dG = \frac{(y_2 - y_1)(dx_2 - dx_1) - (x_2 - x_1)(dy_2 - dy_1)}{(y_2 - y_1)^2}$$

dG est calculée à partir du réseau approché et on a :

$$x_2 - x_1 = D \sin G_0$$

$$y_2 - y_1 = D \cos G_0$$

Il vient :

$$dG = \frac{\cos G_0(dx_2 - dx_1)}{D} - \frac{\sin G_0(dy_2 - dy_1)}{D}$$

D'où la relation d'observations angulaires au point M_1 vers le point M_2 :

$$\boxed{-\frac{\cos G_0}{D} dx_1 + \frac{\sin G_0}{D} dy_1 + \frac{\cos G_0}{D} dx_2 - \frac{\sin G_0}{D} dy_2 - dV_1 + G_0 - l - V_{01} = v_{12}} \quad (10.30)$$

Si le point M_1 est connu et qu'il y'a une inconnue d'orientation, alors l'équation précédente devient :

$$-dV_1 + \frac{\cos G_0}{D} dx_2 - \frac{\sin G_0}{D} dy_2 + G_0 - l - V_{01} = v_{12} \quad (10.31)$$

Dans le cas d'un relèvement sur un point M_2 connu, alors on a $dx_2 = dy_2 = 0$ et :

$$-dV_1 - \frac{\cos G_0}{D} dx_1 + \frac{\sin G_0}{D} dy_1 + (G_0 - l - V_{01}) = v_{12} \quad (10.32)$$

Pour les équations (10.30), (10.31), et (10.32) les résidus v_{12} sont exprimés en radians. Pour avoir la même unité (c-a-d le m) que les résidus des équations (10.24) et (10.25), on multiplie les équations (10.30), (10.31) et (10.32) par la distance D . On aura pour l'équation (10.32), l'équation :

$$\boxed{-DdV_1 - \cos G_0 dx_1 + \sin G_0 dy_1 + D(G_0 - l - V_{01}) = v'_{12}} \quad (10.33)$$

10.5 LA GÉODÉSIE TRIDIMENSIONNELLE

10.5.1 Observation d'une distance

Soient (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées tridimensionnelles approchées des points M_1 et M_2 . La distance spatiale M_1M_2 est calculée par :

$$D^{cal} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

D'où l'équation d'observations d'une distance spatiale en géodésie 3D :

$$dD + D^{cal} - D^{obs} = v \quad (10.34)$$

avec :

$$dD = \frac{(X_2 - X_1)(dX_2 - dX_1) + (Y_2 - Y_1)(dY_2 - dY_1) + (Z_2 - Z_1)(dZ_2 - dZ_1)}{D^{cal}}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 \\ \Delta Y &= Y_2 - Y_1 \\ \Delta Z &= Z_2 - Z_1 \end{aligned} \quad (10.35)$$

La relation (10.34) devient :

$$\boxed{-\frac{\Delta X}{D^{cal}} dX_1 - \frac{\Delta Y}{D^{cal}} dY_1 - \frac{\Delta Z}{D^{cal}} dZ_1 + \frac{\Delta X}{D^{cal}} dX_2 + \frac{\Delta Y}{D^{cal}} dY_2 + \frac{\Delta Z}{D^{cal}} dZ_2 + D^{cal} - D^{obs} = v_{12}} \quad (10.36)$$

Si le point M_1 est connu, alors $dX_1 = dY_1 = dZ_1 = 0$ et :

$$\frac{\Delta X}{D^{cal}} dX_2 + \frac{\Delta Y}{D^{cal}} dY_2 + \frac{\Delta Z}{D^{cal}} dZ_2 + D^{cal} - D^{obs} = v_{12} \quad (10.37)$$

Note Historique : La méthode des moindres carrés fut publiée par la première fois par Adrien-Marie Legendre¹ en 1809. La justification comme procédure statistique de la méthode des moindres carrés fut donnée par Carl Friedrich Gauss en 1809, puis en 1810 dans son mémoire sur l'astéroïde Pallas découvert par Heinrich Wilhelm Olbers² le 28 mars 1802. Selon Gauss, la méthode des moindres carrés conduit à la meilleure combinaison possible des observations quelle que soit la loi de probabilité des erreurs. Elle fut immédiatement reconnue comme une contribution majeure. Gauss affirma l'avoir déjà utilisée dès 1795. Il est certain qu'il s'en servit en 1801 pour déterminer l'orbite de la comète Cérès découverte par Giuseppe Piazzi³ le 1er janvier 1801.

Le mathématicien américain d'origine irlandaise Robert Adrain⁴ avait, à l'occasion d'une question de topographie, publié un article daté de 1808 (mais paru en 1809) dans lequel il exposait également la méthode des moindres carrés. Ce travail passa totalement inaperçu en Europe. En 1818, Adrain appliqua encore cette méthode à la détermination de l'aplatissement de la Terre à partir de mesures du méridien et en tira une estimation des axes de l'ellipsoïde terrestre.

-
1. **Adrien-Marie Legendre** (1752-1833) : mathématicien et géodésien français.
 2. **Heinrich Wilhelm Olbers** (1758-1840) : astronome et physicien allemand.
 3. **Giuseppe Piazzi** (1746-1826) : astronome et mathématicien italien.
 4. **Robert Adrain** (1775-1843) : mathématicien américain.

Parmi les méthodes de calcul de l'inversion de la matrice normale, on cite la méthode dite de Cholesky⁵. Ce dernier a été le Chef du Service Topographique Tunisien entre mai 1913 et août 1914. (C. Brezinski, 2005, voir [3])

5. **André-Louis Cholesky** (1875-1918) : ingénieur polytechnicien et géodésien militaire français.

Partie III
Compléments Techniques et Pratiques

CHAPITRE 11

Rappels des Notions Essentielles de Calculs Numériques

11.1 UNITÉS DE MESURE

Les grandeurs qui interviennent le plus fréquemment en sciences géographiques sont les longueurs, les angles et les temps.

En analyse, l'unité d'angle proprement dite est le radian, angle qui intercepte entre ses côtés un arc de longueur égale au rayon. Il résulte donc que la valeur d'angle en radians est le rapport de la longueur de l'arc au rayon, ou encore la longueur de l'arc quand le rayon est pris pour unité.

Toutes les formules théoriques qui introduisent à la fois les lignes trigonométriques et les angles eux-mêmes, supposent implicitement que ces angles sont exprimés en radians.

Le radian n'est pas une division ronde de la circonférence : on a dû adapter d'autres unités qu'il importe de savoir rattacher au radian (une circonférence vaut 2π radians = 6.283 185 rd).

Les angles sont couramment exprimés en degrés, grades ou heures.

Un degré est la 90^{ème} partie de l'angle droit. Ses sous multiples sont :

- la minute $1'$: $1^\circ = 60'$ sexagésimales,

- la seconde $1''$: $1' = 60''$ sexagésimales $\Rightarrow 1^\circ = 3600''$ sexagésimales.

La division sexagésimale reste très utilisée par la navigation et par les astronomes. Les géodésiens et les topographes utilisent pour leurs travaux et aussi pour le carroyage des cartes géographiques une unité décimale : le grade.

Le grade est 100^{ème} partie de l'angle droit. Les sous multiples sont :

- la minute centésimale ou le centigrade ($1' \text{ cent}$ ou $1c$) : $1c = 1' = 1/100 \text{ gr}$;
 $1 \text{ gr} = 100' = 100c$,
 - la seconde centésimale ou décimiligrade ($1'' = 1cc = 1dmgr$) : $1c = 100cc = 100'' = 100dmgr$.

On exprime en astronomie, les angles en heures.

L'heure est aussi la 24^{ème} partie de la circonférence.

$1h = 60 \text{ minutes} = 60mn$,
 $1mn = 60 \text{ secondes} = 60s$,

Changement d'unités d'angles :

On a assez souvent à effectuer des changements d'unités. La correspondance de base est :

$$2\pi \text{ radians} = 24h = 360^\circ = 400 \text{ gr} = 6.283185 \text{ rd}$$

Dans la pratique, il faut se rappeler qu'un radian vaut presque 57° et 64 gr ou exactement :

$$1 \text{ rd} = 57^\circ 17' 44'' 806 = 63.66198 \text{ gr}$$

ou encore :

$1 \text{ rd} \cong 3438' \cong 205245''$,
 $1 \text{ rd} \cong 6366c \cong 636620cc \cong 636620''$,
 $1' \cong 1/3438 \text{ rd}$; $1c = 1/6366 \text{ rd}$
 $1'' \cong 1/205245 \text{ rd}$; $1'' = 1/636620 \text{ rd}$ soit $1'' = 3''$, $1017 \implies 1'' \cong 3''$.
 - 1 m est vu à 57 m sous un angle de 1° ,
 - 1 m est vu à 64 m sous l'angle de 1 gr ,
 - 1 m est vu à 3.4 km sous l'angle de $1'$,
 - 1 m est vu à 6.366 km sous l'angle de $1c$,
 - 1 m est vu à 200 km sous l'angle de $1''$,
 - 1 m est vu à 636.6 km sous l'angle de $1''$.

Comme l'arc peut être assimilé à la valeur de l'angle exprimé en rd pour les angles petits (max 2 à 3 gr).

$\sin\theta = \text{tg}\theta = \theta \text{ rd}$ pour $\theta = 2 \text{ à } 3 \text{ gr}$.

$1'' = (\sin 1'') \text{ rd}$; $1'' = (\sin 1'') \text{ rd}$.

Pour transformer en *rd* un angle donné en *gr* ou en degrés, il suffit de diviser l'angle en *gr* ou en $^{\circ}$ respectivement par 63.662 *gr* ou 57.291 *rd*.

$$\begin{aligned}1 \text{ gr} &= 0.9^{\circ} = 54' \\1 \text{ c} &= 0.54' \text{ sex.} \\1'' &= 1/3'' \text{ sex.}\end{aligned}$$

L'unité de longueurs adoptée par l'assemblée constituante française en 1795 est une unité physique reproductible en tout temps et tout lieu. Les recherches de l'époque ont permis de choisir le mètre qui est la 10 000 000^{ème} partie du quart du méridien terrestre passant par l'observatoire de Paris.

Plus tard, les recherches ont démontré que cette unité est une utopie.

Lors de la conférence du BIPM 1960 (Bureau International des Poids et Mesures), les savants ont adopté une nouvelle définition du mètre fondée sur l'atome de krypton 86.

En 1983, une nouvelle définition du mètre était entrée en vigueur. Le mètre, unité de longueur du Système International, est défini par la 17^{ème} conférence CGPM (BIMP) comme étant la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299\,792\,458$ de seconde [4].

Les sous multiples du mètre sont :

- le décimètre (*dm*) = 0.1 *m*,
- le centimètre (*cm*) = 0.01 *m*,
- le millimètre (*mm*) = 0.001 *m*,
- le micron (μ) = 0.000 001 *m*.

Les multiples du mètre sont :

- le kilomètre (*km*) = 1 000 *m*,
- l'hectomètre (*hm*) = 100 *m*,
- le décamètre (*dam*) = 10 *m*.

D'autres systèmes ont été définis ou après le mètre et qui sont en vigueur surtout dans certains pays anglophones.

L'ancien système français est :

- la toise = 1.95 *m* qui se subdivise en 6 pieds,
- le pied = 0.32 *m*,
- le pied en 12 pouces dont le pouce mesure 0.027 *m* = 27 *mm*,
- la pouce en 12 lignes de 2.25 *mm* chacune,
- la ligne en 12 points de 0.19 *mm* chacun.

En topographie, on utilise jusqu'à nos jours ces anciennes mesures et notamment le cicéro et le point Didot.

Sur mer, on utilise le mille marin = 1852m, c'est approximativement la longueur de la minute sexagésimale à la latitude de 45°.

En astronomie, d'autres unités sont adaptées aux énormes distances rencontrées.

En évaluant le rayon de la terre R à 6378km dans le système terre-lune, on définit par :

- Unité Astronomique au la distance moyenne de la terre au soleil, soit :

$$1 au = 149\,597\,870\,700 m$$

- Année lumière (al) la distance parcourue par la lumière pendant une année à la vitesse de 300000km/s soit 63241 au .

- Le diamètre maximum de notre galaxie est de 100000 al .

- Parsec (ps) = la distance d'une étoile telle que le rayon de l'orbite terrestre 1 au soit vu sous l'angle de 1''sex (parallaxe de 1 seconde) soit :

$$1 ps.(1'' \text{ en radian}) = 1 au \implies 1 ps = \frac{64800}{\pi} .au$$

soit :

$$1 ps = 3.085\,677\,581 \times 10^{16} m$$

On a aussi :

$$1 ps = 3.261\,6 al$$

- Le megaparsec $Mps = 10^6 ps = 3\,261\,600 al$, c'est la distance galactique.

En effet, les galaxies les plus lointaines observées sont à 1 milliard d'années lumières $\approx 300 Mps$.

11.2 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Pour les calculs numériques, on utilise souvent, non la formule rigoureuse, mais des développements en séries. Cet usage se présente dans les formules des angles et des lignes trigonométriques assez petites pour que leurs puissances deviennent rapidement négligeables. Les développements sont limités à leurs premiers termes tels que les termes négligés sont, dans le cas le plus défavorable, inférieurs à l'approximation admise.

Le procédé général de développement consiste dans l'emploi de la formule de Taylor :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (11.1)$$

ou de sa variante, la formule de Mac-Laurin ($x_0 = 0, h = x$) :

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(0) + \frac{x^3}{3!} \cdot f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (11.2)$$

Applications :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (11.3)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (11.4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \quad (11.5)$$

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^3 + \dots \quad |x| < 1 \quad (11.6)$$

L'erreur commise est de l'ordre du 1er terme négligé, cette erreur n'est acceptable qu'entre certaines limites.

- Exemple : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

Si nous limitons au 1^{er} ordre, l'erreur est de l'ordre $x^3/6$, pour que cette erreur soit inférieure à 1'' sex, il faut donc :

$$x^3/6 < 1/200000 \text{ rd} \text{ soit } x < 1/32.5 \text{ rd} \implies x < 1^\circ 46'$$

Si on veut que cette erreur soit inférieure à 1' sex, alors :

$$x^3/6 < 1/3400 \text{ rd} \text{ soit } x < 1/3.28 \text{ rd} \implies x < 6^\circ 55'$$

CHAPITRE 12

Les Interpolations

Les tables de valeurs naturelles des lignes trigonométriques ou de logarithmes utilisées pour les calculs fournissent les valeurs de fonctions pour des valeurs rondes et équidistantes de la variable. Une table de la fonction $y = f(x)$ fournit les valeurs de y pour des valeurs équidistantes de x telles que : $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, \dots$

Interpoler c'est déterminer la valeur de y pour une valeur de x différente des valeurs tabulaires. On utilise pour cette détermination les différences tabulaires.

On appelle différences premières les différences tabulaires proprement dites et différences secondes les différences entre deux valeurs consécutives des différences premières etc...

12.1 INTERPOLATION LINÉAIRE

La courbe représentative de la fonction y est une droite. Dans ce cas, les différences premières sont lentement variables et les différences secondes sont négligeables.

Pour l'ordonnée y du point M d'abscisse x situé entre les 2 points M_0 et M_1 donnés par la table, on a :

- $(y_1 - y_0)$ est la différence tabulaire première.

Ce problème est bien facile à résoudre lorsque lorsque on dispose de deux points M_0 et M_1 et cherche un polynôme de degré 1 car il suffit alors de choisir l'unique polynôme dont le graphe est la droite (M_0M_1) comme indiqué sur la figure (12.1) ci-dessous .

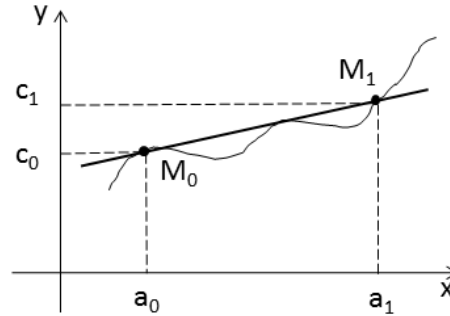


Fig. 12.1 L'interpolation linéaire

En effet, posant $p(x) = ax + b$, on détermine a et b grâce aux équations :

$$\begin{aligned} p(a_0) &= c_0 = y(a_0) = y_0 \\ p(a_1) &= c_1 = y(a_1) = y_1 \end{aligned}$$

On trouve :

$$p(x) = y = \frac{c_1 - c_0}{a_0 - a_1}(x - a_0) + y(a_0) \quad (12.1)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$y(x) = y_0 \frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + y_1 \frac{x - a_0}{a_1 - a_0} \quad (12.2)$$

Alors pour trouver la valeur de $u(\alpha)$ pour $\alpha \in [a_0, a_1]$, il suffit d'appliquer la formule ci-dessus (12.2) : c'est l'**interpolation linéaire**.

12.2 INTERPOLATION PARABOLIQUE

Si les différences secondes sont très lentement variables et que les différences troisièmes sont négligeables, on peut assimiler la courbe représentative de la fonction y à un arc de parabole d'axe parallèle à Oy et d'équation :

$$y = ax^2 + bx + c$$

On suppose connaître trois points $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ avec $x_1 < x_2 < x_3$. La table donne les variations qu'on appelle : $\Delta_1 = x_2 - x_1$, $\Delta_2 = x_3 - x_2$, $\Delta_3 = x_3 - x_1$. Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

Qu'on écrit sous la forme matricielle $A.X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La solution du système ci-dessus (12.3) est donnée par $X = A^{-1}.B$ dont le déterminant est donné par :

$$D = (x_1 - x_2)(x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2) = -\Delta_1(x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2)$$

Le calcul donne après l'inversion de la matrice A les valeurs des coefficients a, b et c comme suit :

$$a = \frac{-\Delta_2y_1 + \Delta_2y_1 - \Delta_3y_2}{D} \quad (12.4)$$

$$b = \frac{\Delta_1(x_1 + x_2)y_3 + \Delta_2(x_2 + x_3)y_1 - \Delta_3(x_3 + x_1)y_2}{D} \quad (12.5)$$

$$c = \frac{x_1y_2x_3\Delta_3 - x_2y_3x_1\Delta_1 - x_3y_1x_2\Delta_2}{D} \quad (12.6)$$

Soit $\alpha \in]x_1, x_2[$, on calcule donc $y(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$.

Bibliographie

Littérature

1. **Chedly Fezzani**. 1978. Théorie des erreurs pour les Ingénieurs Adjoints. Office de la Topographie et de la Cartographie.
2. **Abdelmajid Ben Hadj Salem**. 2017. Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés, 364 pages. Noor Publishing, ISBN-13 : 978-3330968431 ; ISBN-10 : 3330968435.
3. **C. Brezinski**. 2005. La Méthode de Cholesky. Revue d'Histoire des Mathématiques, publication de la Société Mathématique de France. Vol 11 (2005), pp. 205-238.
4. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Mètre> [accès : septembre 2021].

Liste des figures

0.1	Directeur Exécutif de l'OSS, Dr. Ing. Chedly FEZZANI en concertation avec le deuxième auteur Abdelmajid BEN HADJ SALEM (Photo prise lors du 1er Atelier Maghrébin de Géodésie organisé par l'OTC du 18 au 20 mai 2000 à Tunis sous le thème " Définition et Mise en œuvre d'un Référentiel Géodésique Unifié pour l'Afrique du Nord ".)(© A. Ben Hadj Salem)	x
3.1	Erreur sur la dénivelée H entre 2 points A et B	12
5.1	La Probabilité $P[x_1 < x < x_2] =$ aire de la surface hachurée (source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale)	24
5.2	Tableau de variations	24
5.3	La Courbe de Gauss (source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale)	25
5.4	Tableau donnant $P[x \leq t]$ (source : http://jm.davalan.org/proba/gauss/index.html)	27
8.1	Procédé de la base auxiliaire	37
9.1	La courbe de Gauss	45
12.1	L'interpolation linéaire	78