Note sur La Représentation Plane Oblique de Mercator

Abdelmajid Ben Hadj Salem

Résidence Bousten 8, Bloc B, Rue Mosquée Raoudha,
1181 La Soukra Raoudha, Tunisia.
E-mail: abenhadjsalem@gmail.com

Résumé

Nous présentons dans cette note la représentation plane oblique de Mercator et le calcul des coordonnées (Φ, Λ) correspondantes à un point (φ, λ) de la sphère. On a ajouté quelques exercices.

Mots-clefs : représentation plane conforme, représentation oblique de Mercator, trigonométrie sphérique, module linéaire.

Abstract

In this paper about the oblique Mercator representation, we present the calculation of the geographical coordinates (Φ, Λ) images of the coordinates (φ, λ) of a point on the sphere. We have added some exercises.

Keywords : conformal plane representation, oblique Mercator representation, linear module, spherical trigonometry.

Version 1., 18 February 2022

1 Introduction

La représentation Mercator (aspect direct) est une représentation plane cylindrique conforme de la sphère. A un point $M(\varphi,\lambda)$ de la sphère associe son image $M'(X,Y)$ du plan (O,X,Y) telque :

$$M' = \begin{cases} X = R\lambda \\ \\ Y = RLogtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \end{cases} \tag{1}$$

On appelle :

$$L_{M'} = Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \int_0^{\varphi}\frac{du}{cosu} \tag{2}$$

la latitude croissante ou la latitude de Mercator, R le rayon de la sphère modèle.

En notation complexe, on aura :

$$z = \lambda + iL_{M'}, \quad Z = X + iY \Longrightarrow Z = Rz \tag{3}$$

Soit m le module linéaire, on a alors :

$$m^2 = \frac{dX^2+dY^2}{R^2d\varphi^2+R^2cos^2\varphi d\lambda^2} = \frac{R^2d\lambda^2+R^2\dfrac{d\varphi^2}{cos^2\varphi}}{R^2(d\varphi^2+cos^2\varphi d\lambda^2)} = \frac{1}{cos^2\varphi} \Longrightarrow \boxed{m = \frac{1}{cos\varphi}} \tag{4}$$

Exercice 1.1. *1. Montrer que l'équateur est un isomètre stationnaire.*

2. Montrer qu'au premier ordre pour deux parallèles $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$, on a :

$$\Delta l = R(\varphi_2 - \varphi_1) \approx Y_2 - Y_1$$

Exercice 1.2. *1. Si on note $y = y(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{du}{coshu}$, montrer que x est obtenu par :*

$$x = \int_0^y \frac{du}{cosu} = Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)$$

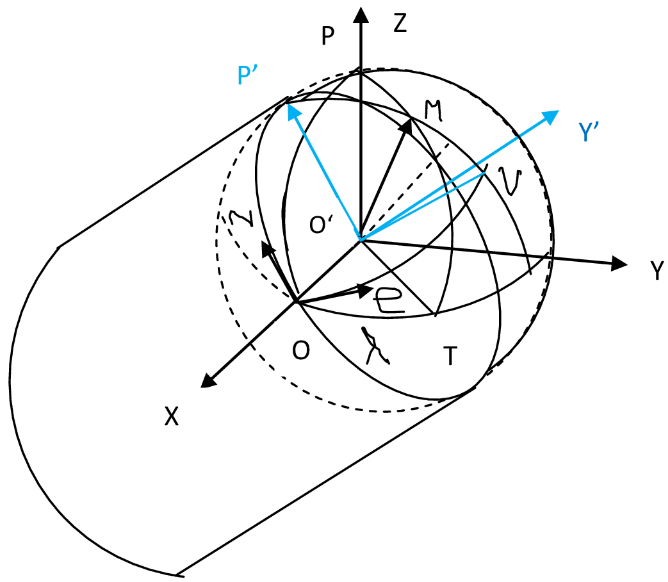

FIGURE 1 – L'Aspect Oblique

Si le centre de la représentation n'est pas l'origine des longitudes, l'équation (3) devient :

$$Z = R(z - z_0) \quad \text{où}\, z_0 = \lambda_0 \text{ est la longitude du centre de la représentation}$$

Dans la suite, on va traiter le cas oblique de la représentation plane de Mercator.

2 L'Aspect Oblique

2.1 Cas I

Considérons maintenant la représentation Mercator oblique où le centre de la représentation est le même que celui du cas direct soit le point O. Soit P' le nouveau pôle. Les génératrices du cylindre tangent à la sphère le long du grand cercle pseudo-équateur passant par les points O, O', P' ont pour direction la direction de l'axe $O'Y'$. Soit i l'angle d'incidence du pseudo-méridien au point O. Soit $M(\varphi, \lambda)$ un point de la sphère. On va déterminer ses coordonnées dans le nouveau repère $(O'X, O'Y', O'P')$ (voir Fig. (1). On veut calculer les côtés sphériques $OV = \hat{P}' = \Lambda$ et $VM = \Phi$.

Le pseudo-équateur passe par les points $O(1,0,0)$ et $P'(0,-sini,cosi)$. Le vecteur unitaire de la direction de Y' est $j' = O'P' \wedge O'O(0,cosi,sini)$. Soit le triangle sphérique PMP', on a les éléments suivants :

- $\hat{P'} = \frac{\pi}{2} - \Lambda$,
- $\hat{P} = \frac{\pi}{2} + \lambda$,
- $P'M = \frac{\pi}{2} - \Phi$,
- $PM = \frac{\pi}{2} - \varphi$,
- et $PP' = i$.

La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne :

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) = cosi.cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + sini.sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{sin\Phi = cosi.sin\varphi - sini.cos\varphi.sin\lambda} \tag{5}$$

Utilisant la formule des sinus.cotg, on obtient :

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right).cotg\left(\frac{\pi}{2} - \Lambda\right) = cotg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).sini - cosi.cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{tg\Lambda = \frac{sini.tg\varphi + cosi.sin\lambda}{cos\lambda}} \tag{6}$$

On a alors les coordonnées cartésiennes (E,N) du point $M'(\Phi,\Lambda)$ image sur le plan suivant les équations :

$$E = R.\Lambda \tag{7}$$

$$N = R.Logtg(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}) \tag{8}$$

Exercice 2.1. *1. Montrer que le module linéaire au point M' vaut :*

$$m_{M'} = \frac{1}{cos\Phi}$$

2.2 Cas II

Considérons le cas où le pseudo-équateur passe par deux points de la sphère $M_1(\varphi_1,\lambda_1)$ et $M_2(\varphi_2,\lambda_2)$. Nous allons calculer les coordonnées (φ_0,λ_0) du nouveau pôle de la représentation oblique de Marcator.

Supposons par exemple que $\lambda_1 < \lambda_2$ et $\varphi_1 > \varphi_2$. Les vecteurs $O'M_1$ et $O'M_2$ appartiennent au plan du pseudo-équateur, leurs composantes sont :

$$O'M_1 = \left| \begin{array}{l} cos\lambda_1.cos\varphi_1 \\ sin\lambda_1.cos\varphi_1 \\ sin\varphi_1 \end{array} \right. \qquad O'M_2 = \left| \begin{array}{l} cos\lambda_2.cos\varphi_2 \\ sin\lambda_2.cos\varphi_2 \\ sin\varphi_2 \end{array} \right. \tag{9}$$

Soit $P'(\varphi_0, \lambda_0)$ le pôle de la représentation oblique de Mercator, la direction $O'P'$ est donnée par $O'M_1 \wedge O'M_2$:

$$O'P' = O'M_1 \wedge O'M_2 = \left| \begin{array}{l} cos\lambda_0.cos\varphi_0 \\ sin\lambda_0.cos\varphi_0 \\ sin\varphi = 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} sin\varphi_2 cos\varphi_1.sin\lambda_1 - sin\varphi_1 cos\varphi_2.sin\lambda_2 \\ sin\varphi_1 cos\lambda_2.cos\varphi_2 - sin\varphi_2 cos\lambda_1.cos\varphi_1 \\ sin\lambda_2 cos\varphi_2.cos\varphi_1 cos\lambda_1 - sin\lambda_1 cos\varphi_1.cos\varphi_2 cos\lambda_2 \end{array} \right. \tag{10}$$

Par suite, on a :

$$cos\lambda_0.cos\varphi_0 = sin\varphi_2 cos\varphi_1.sin\lambda_1 - sin\varphi_1 cos\varphi_2.sin\lambda_2 \tag{11}$$

$$sin\lambda_0.cos\varphi_0 = sin\varphi_1 cos\lambda_2.cos\varphi_2 - sin\varphi_2 cos\lambda_1.cos\varphi_1 \tag{12}$$

Utilisant les équations (11-12), on obtient :

$$tg\lambda_0 = \frac{sin\varphi_1 cos\lambda_2.cos\varphi_2 - sin\varphi_2 cos\lambda_1.cos\varphi_1}{sin\varphi_2 cos\varphi_1.sin\lambda_1 - sin\varphi_1 cos\varphi_2.sin\lambda_2} \Longrightarrow tg\lambda_0 = -\frac{cotg\varphi_1.cos\lambda_1 - cotg\varphi_2.cos\lambda_2}{cotg\varphi_1.sin\lambda_1 - cotg\varphi_2.sin\lambda_2} \tag{13}$$

A partir des triangles sphériques M_1PP' et M_2PP' et en appliquant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique [1], on arrive à :

$$tg\varphi_0 = -cotg\varphi_1.cos(\lambda_0 - \lambda_1) = -cotg\varphi_2.cos(\lambda_0 - \lambda_1) \tag{14}$$

Sur la (**Figure : 2**), on voit bien comment les méridiens et les parallèles sont transformés dans le cas de la représentation oblique.

A Compléments I

Définition A.1. *On appelle fonction Gudermannienne de la variable réelle $x \in \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :*

$$gd(x) = \int_0^x \frac{du}{cosh(u)} = Arctg(sinh(x)) \tag{15}$$

où Arctg est la fonction inverse de tg.

Définition A.2. *On appelle gd^{-1} la fonction Gudermannienne inverse de la variable réelle $x \in]-\pi/4, \pi/4[$ la fonction définie comme suit :*

$$gd^{-1}(x) = \int_0^x \frac{du}{cosu} = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = Arctanh(sinx) \tag{16}$$

où Arctanh est la fonction inverse de tanh.

1. cosa=cosbcosc+sinbsinccosA.

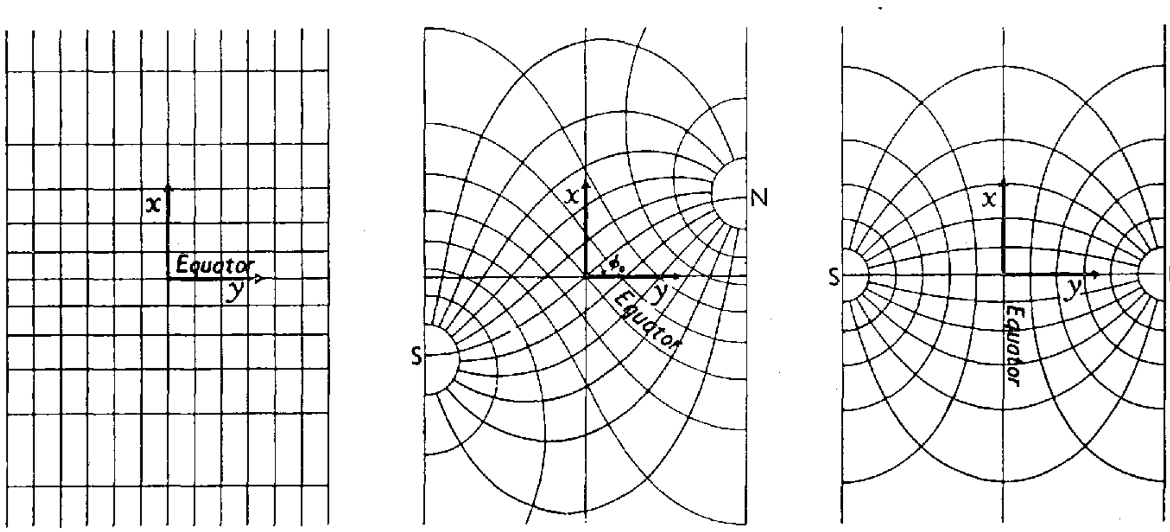

FIGURE 2 – Canevas de la représentation plane oblique de Mercator (au centre) et ses deux cas limites Mercator direct (à gauche) et Mercator transverse (à droite) avec x dirigé vers le Nord, y dirigé vers l'Est. (extrait de L.P. Lee ; 1954)

Références

1. **L.P. Lee**. 1954. *The Oblique Mercator Projection*. New Zealand Geographer, **Vol. 10**, $n°2$, October 1954, 15 pages.