# UN PREMIER THÉORÈME CRUCIAL POUR LA REFONDATION DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES ET L'ENSEIGNEMENT DE CETTE DISCIPLINE POUR LES FUTURES GÉNÉRATIONS

*par*

Nhat-Anh Phan

*One first crucial theorem for the refoundation of elementary set theory and the teaching of that discipline to future generations*

RÉSUMÉ :

Pour un ensemble infini dénombrable donné $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$, nous démontrons qu'il est légitime de partitionner $A$ en un nombre fini ou infini de sous-ensembles infinis dénombrables lorsque l'ordre d'indexation initiale des éléments de $A$ préserve un ordre strictement croissant dans chaque sous-ensemble. A cette occasion nous introduisons deux nouveaux formalismes permettant de signifier le fait que c'est $A$ qui a été partitionné et le fait que $A$ ainsi que cette dernière partition de $A$ appartiennent à la même classe comprenant une infinité d'ensembles infinis dénombrables constitués par les mêmes sous-ensembles infinis dénombrables qui constituent la partition de $A$.

ABSTRACT :

For a given infinite countable set $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$, we demonstrate that it is legitimate to partition $A$ in a finite or infinite number of infinite countable sub-sets when the initial order of indexation of the elements of $A$ maintains a strictly increasing order in each sub-set. At this occasion we introduce two new formalism allowing to signify the fact that it is $A$ that has been partitioned and the fact that $A$ and the latter partition of $A$ belong to the same class comprising infinitely many infinite countable sets constituted by the same infinite countable sub-sets that constitute the partition of $A$.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A17, 05A18 — Mots clés : ensemble infini dénombrable, partition, indexation.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A17, 05A18 — Key words : infinite countable set, partition, indexation.

Cette article s'inscrit dans la continuité de l'exposition sur les ensembles infinis dénombrables entreprise dans un précédent article par le présent auteur (N-A. Phan, 2021, [1]).

Dans le précédent article [1] nous avons démontré que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i, 2i+1\} \neq B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{4i, 4i+2, 2i+1\}$.

Nous avons également fait remarqué que la partition de $A$ et de $B$ nous permettait de considérer respectivement que :

$$"A = \mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{2k\} \cup \{2k+1\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}"$$

et de même que :

$$"B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{4k, 4k+2\} \cup \{2k+1\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}"$$

L'emploi des guillemets dans ce précédent article [2] se justifiait par ce qui avait rendu en premier lieu nécessaire une telle remarque à savoir que l'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" **n'est que partiellement correcte et en soi incomplète**.

Plus encore nous avons démontré pour la preuve du **Corollaire 2** que $\forall l \in \mathbb{N}, l \geq 2, A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} \neq B_l = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\}$.

Or la partition de $B_l$, en notant que la séquence donnée par l'ensemble $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}$ en considérant $i \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant est effectivement égale à la sequence donnée par l'ensemble $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}$ en considérant $i \in \mathbb{N}$ dans un ordre strictement croissant, nous permet de considérer que :

$$"B_l = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\left(\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\} \cup \{2i+1\}\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}"$$

L'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" peut donc désigner une infinité d'ensembles infinis dénombrables qui s'ils étaient menés à être partitionnés pourraient s'écrire par l'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$".

Au regard de ces ambiguïtés du signifiant (du symbole employé) nous nous proposons d'introduire deux nouveaux formalismes qui, nous l'espérons, serons adoptés par nos lecteurs attentionnés.

***Définition 1.*** — *$A$ un ensemble infini dénombrable donné, $\forall N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}, N \geq 2, \forall k \in [1, N], S_k$ un sous-ensemble infini dénombrable, ssi la partition est légitime, nous écrivons par :*

$$A = [S_1 \cup S_2 ... \cup S_k \cup ... \cup S_N]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{N} S_k\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

*qui se lit : "$A$ est égal à l'union de 1 à $N$ de $S_k$ comme partition de $A$".*

Dit autrement : *ssi* la partition est légitime, l'expression "$\left[\bigcup_{k=1}^{N} S_k\right]_{\mathcal{P}(A)}$" est utilisée pour signifier que c'est effectivement $A$ qui a été partitionné et **qu'en tant que**

**tel** $\left[\bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{S_k}\right]_{\mathcal{P}(\mathbf{A})}$ **est l'ensemble A**. Le signe "=" est donc utilisé au sens propre et de manière **stricto sensu**.

Le formalisme "$[...]_{\mathcal{P}(A)}$" n'est pas en soi un opérateur mathématique au sens où **il n'opère aucune modification mathématique**. Le formalisme "$[...]_{\mathcal{P}(A)}$" fonctionne comme une note en bas de page **pour rappeler que c'est A qui a été partitionné**.

***Définition 2.*** — *$\forall N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}, N \geq 2, \forall k \in [1, N], S_k$ un sous-ensemble infini dénombrable donné, nous écrivons par :*

$$\mathcal{C}\left\langle \left[\bigcup_{k=1}^{N} S_k\right] \right\rangle = \{A : A = \left[\bigcup_{k=1}^{N} S_k\right]_{\mathcal{P}(A)}\}$$

*qui se lit : "la classe des ensembles constitués par l'union de 1 à N de $S_k$ est égale à l'ensemble des ensembles A tels que A est égal à l'union de 1 à N de $S_k$ comme partition de A".*

Dit autrement l'expression "$\mathcal{C}\left\langle \left[\bigcup_{k=1}^{N} S_k\right] \right\rangle$" désigne la classe regroupant tous les ensembles infinis dénombrables $A$ tels que $A = \left[\bigcup_{k=1}^{N} S_k\right]_{\mathcal{P}(A)}$ c-à-d tous les ensembles infinis dénombrables qui s'ils étaient menés à être partitionnés pourraient s'écrire par l'expression "$\left[\bigcup_{k=1}^{N} S_k\right]_{\mathcal{P}(A)}$".

Par exemple en faisant usage de la **Définition 1** et de la **Définition 2** nous avons :

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(A)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle;$$

de même :

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(B)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle;$$

et de même :

$$B_l = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\mathcal{P}(B_l)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle.$$

Comme $\forall l \in \mathbb{N}^*, l > 2, A \neq B \neq B_l$ nous avons :

$$A = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(A)} \neq B = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(B)} \neq B_l = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\mathcal{P}(B_l)}.$$

Comme nous pouvons le constater avec les exemples ci-dessus, le formalisme "$[...]_{\mathcal{P}(A)}$" bien que n'opérant aucune modification mathematique en soi, est crucial en ce qu'elle permet d'éviter les ambiguïtés erronées inhérentes à l'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" qui doit dès lors se comprendre comme la classe $\mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$.

***Lemme 1.*** — *$\forall N \in \mathbb{N}^*, N \geq 2$, en considérant un ensemble fini dénombrable donné $A = \bigcup_{i=1}^{N}\{a_i\}, \forall i \in [1, N], a_i \neq \emptyset$, il est légitime de partitionner A comme suit :*

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\} = \bigcup_{i \in S_1} \{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_2} \{a_i\}$$

*avec*

$$S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset, S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = \bigcup_{i=1}^{N} \{i\};$$
$$d_1 \in [1, N[, S_1 = \bigcup_{j=1}^{d_1} \{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in [1, d_1], j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in [1, N], s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$
$$d_2 \in [1, N[, S_2 = \bigcup_{j=1}^{d_2} \{s_{2_j}\}, \forall j, j' \in [1, d_2], j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in [1, N], s_{2_j} > s_{2_{j'}};$$
$$d_1 + d_2 = N.$$

***Preuve***

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $A = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}, \forall i \in [1, N], a_i \neq \emptyset$ est donc un ensemble fini dénombrable de $N$ éléments indexés par les index $i \in [1, N]$ ordonnés dans un ordre strictement croissant. $a_i \in A$ est donc le $i^{\text{ième}}$ élément de l'ensemble A tel que cet ensemble $A$ **a été défini initialement**.

Démontrons par récurrence le **Lemme 1**.

Pour $N = 2$ nous avons $A = \{a_1\} \cup \{a_2\}, a_1 \neq \emptyset, a_2 \neq \emptyset$. Il suffit de considérer que soit $S_1 = \{s_{1_1}\}, s_{1_1} = 1, d_1 = 1$ et $S_2 = \{s_{2_1}\}, s_{2_1} = 2, d_2 = 1$ ou que soit $S_1 = \{s_{1_1}\}, s_{1_1} = 2, d_1 = 1$ et $S_2 = \{s_{2_1}\}, s_{2_1} = 1, d_2 = 1$, avec $d_1 + d_2 = 2$ pour pouvoir déduire que le **Lemme 1** est vrai pour $N = 2$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*, N > 2$, donné supposons que le **Lemme 1** soit vrai pour $N$.

Adjoignons un $(N+1)^{\text{ième}}$ élément non vide à l'ensemble $A$. Par définition l'index de cet $(N+1)^{\text{ième}}$ élément est strictement supérieur à l'index du $N^{\text{ième}}$ élément c-à-d que $(N+1) > N$. Nous avons alors :

$$A' = A \cup \{a_{N+1}\} = \left( \bigcup_{i \in S_1} \{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_2} \{a_i\} \right) \cup \{a_{N+1}\}$$

Par suite nous avons soit :

$$A' = A \cup \{a_{N+1}\} = \left( \bigcup_{i \in S_1 \cup \{N+1\}} \{a_i\} \right) \cup \bigcup_{i \in S_2} \{a_i\}$$

soit :

$$A' = A \cup \{a_{N+1}\} = \bigcup_{i \in S_1} \{a_i\} \cup \left( \bigcup_{i \in S_2 \cup \{N+1\}} \{a_i\} \right)$$

En considérant que soit $S'_1 = S_1 \cup \{N+1\}, S'_1 = \{s'_{1_1}, s'_{1_2}, ..., s'_{1_j}, ..., s'_{1_{d'_1}}\}$, $d'_1 = d_1 + 1$, $\forall j \in [1, d_1], s'_{1_j} = s_{1_j}, s'_{1_{d'_1}} = N + 1$ et $S'_2 = S_2, S'_2 = \{s'_{2_1}, s'_{2_2}, ..., s'_{2_j}, ..., s'_{2_{d'_2}}\}$, $d'_2 = d_2$, $\forall j \in [1, d'_2], s'_{2_j} = s_{2_j}$ ou que soit $S'_1 = S_1, S'_1 = \{s'_{1_1}, s'_{1_2}, ..., s'_{1_j}, ..., s'_{1_{d'_1}}\}$, $d'_1 = d_1$, $\forall j \in [1, d'_1], s'_{1_j} = s_{1_j}$ et $S'_2 = S_2 \cup \{N+1\}, S'_2 = \{s'_{2_1}, s'_{2_2}, ..., s'_{2_j}, ..., s'_{2_{d'_2}}\}$,

$d'_2 = d_2+1, \forall j \in [1, d_2], s'_{2_j} = s_{2_j}, s'_{2_{d'_2}} = N+1$ et sachant que $d'_1+d'_2 = d_1+d_2+1 = N+1, d_1 > 0, d_2 > 0$ et que $S'_1 \neq \emptyset, S'_2 \neq \emptyset$, nous obtenons :

$$A' = \bigcup_{i=1}^{N+1} \{a_i\} = \bigcup_{i \in S'_1} \{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S'_2} \{a_i\}$$

$$\text{avec}$$
$$S'_1 \neq \emptyset, S'_2 \neq \emptyset, S'_1 \cap S'_2 = \emptyset, S'_1 \cup S'_2 = \textstyle\bigcup_{i=1}^{N+1} \{i\};$$
$$d'_1 \in [1, N+1[, S'_1 = \textstyle\bigcup_{j=1}^{d'_1} \{s'_{1_j}\}, \forall j, j' \in [1, d'_1], s_{1_j}, s'_{1_j} \in [1, N+1], s'_{1_j} > s'_{1_{j'}};$$
$$d'_2 \in [1, N+1[, S'_2 = \textstyle\bigcup_{j=1}^{d'_2} \{s'_{2_j}\}, \forall j, j' \in [1, d'_2], s_{2_j}, s'_{2_j} \in [1, N+1], s'_{2_j} > s'_{2_{j'}};$$
$$d'_1 + d'_2 = N+1.$$

Le **Lemme 1** est donc vrai pour $N+1$. Conséquemment le **Lemme 1** est établi.

***Lemme 2.*** — *En considérant un ensemble infini dénombrable donné* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$, *il est légitime de partitionner* $A$ *comme suit :*

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\} = \left[ \bigcup_{i \in S_1} \{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_2} \{a_i\} \right]_{\mathcal{P}(A)}$$

$$\textit{avec}$$
$$card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$
$$S_1 = \textstyle\bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$
$$S_2 = \textstyle\bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{2_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}.$$

***1^{ière} Preuve***

Par définition originelle de $\mathbb{N}^*$ à savoir que $\mathbb{N}^* = \{0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, ..., +\infty\}$ nous pouvons segmenter $\mathbb{N}^*$ en une infinité d'intervalles finis de cardinal supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [I_k, I_{k+1}[, I_1 = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, I_k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq card([I_k, I_{k+1}[) < +\infty$$

Par suite nous avons :

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( \bigcup_{i \in [I_k, I_{k+1}[} \{a_i\} \right)$$

$$\text{avec}$$
$$I_1 = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, I_k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq card([I_k, I_{k+1}[) < +\infty.$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ en notant $E_k$ l'ensemble fini dénombrable tel que $\forall n \in [I_k, I_{k+1}[, n \in E_k, card(E_k) = card([I_k, I_{k+1}[) = (I_{k+1} - I_k)$ et en appliquant le **Lemme 1** à $E_k$, nous obtenons :

$$E_k = Z_{1_k} \cup Z_{2_k}$$
avec
$$Z_{1_k} \neq \emptyset, Z_{2_k} \neq \emptyset; Z_{1_k} \cap Z_{2_k} = \emptyset;$$
$$l_{1_k} \in [1, card(E_k)[, Z_{1_k} = \bigcup_{j=1}^{l_{1_k}} \{z_{1_{k_j}}\}, \forall j, j' \in [1, l_{1_k}], j > j', z_{1_{k_j}}, z_{1_{k_{j'}}} \in [I_k, I_{k+1}[, z_{1_{k_j}} > z_{1_{k_{j'}}};$$
$$l_{2_k} \in [1, card(E_k)[, Z_{2_k} = \bigcup_{j=1}^{l_{2_k}} \{z_{2_{k_j}}\}, \forall j, j' \in [1, l_{2_k}], j > j', z_{2_{k_j}}, z_{2_{k_{j'}}} \in [I_k, I_{k+1}[, z_{2_{k_j}} > z_{2_{k_{j'}}}$$
$$l_{1_k} + l_{2_k} = card([I_k, I_{k+1}[) = card(E_k);$$

Dès lors en posant :

$$S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{1_j}\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{1_k} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( \bigcup_{j \in [1, l_{1_k}]} \{z_{1_{k_j}}\} \right)$$
avec
$$s_{1_1} = z_{1_{1_1}}, s_{1_2} = z_{1_{1_2}} \ldots s_{1_{l_{1_1}}} = z_{1_{1_{l_{1_1}}}};$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)}} = z_{1_{k_{l_{1_k}}}};$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [1, l_{1_k} - 1[, s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)-j}} = z_{1_{k_{\left(l_{1_k}-j\right)}}}, z_{1_{k_{l_{1_k}}}} < z_{1_{(k+1)_1}};$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall h \in [0, l_{1_k} - 2[, s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)-h-1}} = z_{1_{k_{\left(l_{1_k}-h-1\right)}}} < s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)-h}} = z_{1_{k_{\left(l_{1_k}-h\right)}}};$$

tels que définis ci-dessus nous avons bien $\forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j} > s_{1_{j'}}$.

Dit autrement $S_1$ est l'ensemble des entiers naturels $z_{1_{k_j}}, k \in \mathbb{N}^*, j \in [1, l_{1_k}], l_{1_k} \in [1, card(E_k)[$, indexés dans l'ordre strictement croissant de leur valeur à l'infini avec $card(S_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} l_{1_k} = +\infty$.

De même en posant :

$$S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{2_j}\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{2_k} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( \bigcup_{j \in [1, l_{2_k}]} \{z_{2_{k_j}}\} \right)$$
avec
$$s_{2_1} = z_{2_{1_1}}, s_{2_2} = z_{2_{1_2}} \ldots s_{2_{l_{2_1}}} = z_{2_{1_{l_{2_1}}}};$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)}} = z_{2_{k_{l_{2_k}}}};$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [1, l_{2_k} - 1[, s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)-j}} = z_{2_{k_{\left(l_{2_k}-j\right)}}}, z_{2_{k_{l_{2_k}}}} < z_{2_{(k+1)_1}};$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall h \in [0, l_{2_k} - 2[, s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)-h-1}} = z_{2_{k_{\left(l_{2_k}-h-1\right)}}} < s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)-h}} = z_{2_{k_{\left(l_{2_k}-h\right)}}};$$

tels que définis ci-dessus nous avons bien $\forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j} > s_{2_{j'}}$.

Dit autrement $S_2$ est l'ensemble des entiers naturels $z_{2_{k_j}}, k \in \mathbb{N}^*, j \in [1, l_{2_k}], l_{2_k} \in [1, card(E_k)[$, indexés dans l'ordre strictement croissant de leur valeur à l'infini avec $card(S_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} l_{2_k} = +\infty$.

Il vient que :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{i\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (Z_{1_k} \cup Z_{2_k}) = \left[ \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{1_k} \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{2_k} \right) \right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} =$$

$$\left[ \bigcup_{i \in S_1} \{i\} \cup \bigcup_{i \in S_2} \{i\} \right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$$

avec

$$card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$
$$S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$
$$S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{2_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}.$$

Comme par définition $\forall t \in \mathbb{N}^*, t \in S_1 \Leftrightarrow a_t \in \{a_i : i \in S_1\}$, il vient que :

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\} = \left[ \bigcup_{i \in S_1} \{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_2} \{a_i\} \right]_{\mathcal{P}(A)}$$

avec

$$card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$
$$S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$
$$S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{2_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}.$$

Conséquemment le **Lemme 2** est établi.

* * *

En résumé nous pouvons dire qu'en segmentant $\mathbb{N}^*$ en une infinité d'intervalles finis et en partitionnant chacun des-dits intervalles en deux sous-ensembles finis, nous avons démontré qu'il est légitime de partitionner $\mathbb{N}^*$ en deux sous-ensembles infinis dénombrables dans lesquels les entiers naturels $i \in \mathbb{N}^*$ sont préservés dans un ordre strictement croissant. De cette légitimité de partitionner $\mathbb{N}^*$ nous pouvons déduire que $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\}$ peut également être partitionné en deux sous-ensembles infinis dénombrables dans lesquels les indexes $i \in \mathbb{N}^*$ des éléments $a_i$ sont préservés dans un ordre strictement croissant.

***2ième Preuve***

$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$ est donc un ensemble infini dénombrable d'une infinité d'éléments indexés par les index $i \in \mathbb{N}^*$ ordonnés dans un ordre strictement croissant. $a_i \in A$ est donc le $i^{\text{ième}}$ élément de l'ensemble A tel que cet ensemble $A$ a été défini initialement.

En procédant dans l'ordre strictement croissant d'indexation initiale de l'ensemble infini dénombrable $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$, **nous pouvons affecter arbitrairement à l'infini** chaque $i$ soit uniquement dans $S_1$ soit uniquement dans $S_2$ **tout en indexant l'ordre d'affectation de $i$ dans $S_1$ ou dans $S_2$** ; de sorte que si $i$ est le $j^{\text{ième}}$ élément de $S_1$ **par notre affectation arbitraire** alors $s_{1_j} = i$ ou si $i$ est le $k^{\text{ième}}$ élément de $S_2$ **par notre affectation arbitraire** alors $s_{2_k} = i$.

Dès lors il suffit que $\nexists M_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \geq M_1, i \in S_1$ et que $\nexists M_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \geq M_2, i \in S_2$ pour que $card(S_1) = +\infty$ et que $card(S_2) = +\infty$.

Comme nous pouvons affecter arbitrairement à l'infini en parcourant l'ordre strictement croissant d'indexation initiale de l'ensemble infini dénombrable $A$, chaque $i$ soit uniquement dans $S_1$ soit uniquement dans $S_2$, **nous pouvons donc arbitrairement décider que $\nexists M_1$ et $\nexists M_2$** ce qui a pour conséquence que $card(S_1) = +\infty$ et $card(S_2) = +\infty$.

De plus le fait que nous affectons arbitrairement à l'infini en parcourant l'ordre strictement croissant d'indexation initiale de l'ensemble infini dénombrable $A$, chaque $i$ soit uniquement dans $S_1$ soit uniquement dans $S_2$, tout en indexant l'ordre d'affectation de $i$ dans $S_1$ ou dans $S_2$, **nous assure nécessairement que** : $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $[S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$ ainsi que $\forall j \in \mathbb{N}^*, s_{1_{j+1}} > s_{1_j}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*, s_{2_{j+1}} > s_{2_j}$ étant donné que par définition $\forall i \in \mathbb{N}^*, i+1 > i$.

Il vient que nous pouvons effectivement partitionner $A$ tel que $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{i\in S_1}\{a_i\} \cup \bigcup_{i\in S_2}\{a_i\}\right]_{\mathcal{P}(A)}$ avec $card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*; S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}}; S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{2_j}\}$, $\forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}$.

Conséquemment le **Lemme 2** est établi.

***Lemme 3.*** — *$\forall T \in \mathbb{N}^*, T \geq 2$, en considérant un ensemble infini dénombrable donné $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$, il est légitime de partitionner $A$ comme suit :*

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

*avec*

$$\forall k, k' \in [1, T], S_k \cap S_{k'} = \emptyset, \left[\bigcup_{k=1}^{T} S_k\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$

$$\forall k \in [1, T], S_k = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{k_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{k_j}, s_{k_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{k_j} > s_{k_{j'}}.$$

***Preuve***

Démontrons par récurrence le **Lemme 3**.

Pour $T = 2$ le **Lemme 2** stipule que le **Lemme 3** est vrai.

Pour $T \in \mathbb{N}^*, T > 2$, donné supposons que le **Lemme 3** soit vrai pour $T$. Il s'ensuit que pour un ensemble infini dénombrable donné $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$ il est légitime de partitionner $A$ tel que $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ avec $\forall k, k' \in$

$[1,T], S_k \cap S_{k'} = \emptyset, \left[\bigcup_{k=1}^{T} S_k\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*; \forall k \in [1,T], S_k = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{k_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{k_j}, s_{k_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{k_j} > s_{k_{j'}}$.

Comme pour $\forall X \in [1,T]$ donné $card(S_X) = +\infty$, en appliquant le **Lemme 2** à $S_X$, nous obtenons :

$$\bigcup_{i \in S_X}\{a_i\} = \left[\bigcup_{i \in S_{X_1}}\{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_{X_2}}\{a_i\}\right]_{\mathcal{P}(\bigcup_{i \in S_X}\{a_i\})}$$

avec

$$S_{X_1} \cap S_{X_2} = \emptyset, [S_{X_1} \cup S_{X_2}]_{\mathcal{P}(S_X)} = S_X;$$
$$S_{X_1} = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{X_{1_j}}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{X_{1_j}}, s_{X_{1_{j'}}} \in S_X, s_{X_{1_j}} > s_{X_{1_{j'}}};$$
$$S_{X_2} = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{X_{2_j}}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{X_{2_j}}, s_{X_{2_{j'}}} \in S_X, s_{X_{2_j}} > s_{X_{2_{j'}}}.$$

En substituant $\bigcup_{i \in S_X}\{a_i\}$ par $\left[\bigcup_{i \in S_{X_1}}\{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_{X_2}}\{a_i\}\right]_{\mathcal{P}(\bigcup_{i \in S_X}\{a_i\})}$ nous obtenons :

$$A = \left[\left[\bigcup_{k=1;k\neq X}^{T}\left(\bigcup_{i \in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A/\left(\bigcup_{i \in S_X}\{a_i\}\right))} \cup \left[\bigcup_{i \in S_{X_1}}\{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_{X_2}}\{a_i\}\right]_{\mathcal{P}(\bigcup_{i \in S_X}\{a_i\})}\right]_{\mathcal{P}(A)} =$$
$$\left[\bigcup_{k=1;k\neq X}^{T}\left(\bigcup_{i \in S_k}\{a_i\}\right) \cup \bigcup_{i \in S_{X_1}}\{a_i\} \cup \bigcup_{i \in S_{X_2}}\{a_i\}\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

Le **Lemme 3** est donc vrai pour $T+1$. Conséquemment le **Lemme 3** est établi.

***Théorème 1.*** — *En considérant un ensemble infini dénombrable donné* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$, $\forall T \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, *il est légitime de partitionner* $A$ *comme suit :*

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i \in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

*avec*

$$\forall k, k' \in \mathbb{N}^*, S_k \cap S_{k'} = \emptyset, \left[\bigcup_{k=1}^{T} S_k\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{k_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{k_j}, s_{k_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{k_j} > s_{k_{j'}}.$$

***Preuve***

Le **Lemme 3** signifie que le **Théorème 1** est vrai $\forall T \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons par l'absurde le cas où $T = +\infty$.

Supposons que le **Théorème 1** soit faux pour $T = +\infty$. Il s'ensuit qu'il existe un maximum $M \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il est impossible de partitionner un ensemble infini dénombrable donné $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$ en $(M+1)$ sous-ensembles qui respectent les propriétés stipulées par le **Théorème 1**.

Le fait qu'il soit impossible de partitionner un ensemble infini dénombrable donné $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$ en $(M+1)$ sous-ensembles qui respectent les propriétés stipulées par le **Théorème 1**, est en contradiction avec le **Lemme 3**. Conséquemment le **Théorème 1** est vrai dans le cas où $T = +\infty$ et le **Théorème 1** est établi.

***Corollaire 1.*** — *Soient $A$, $B$ deux ensembles infinis dénombrables, $\forall T \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k$ un sous-ensemble infini dénombrable tel que $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ et tel que $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{b_i\} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{b_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$, il vient que :*

$$A = B \Leftrightarrow \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{b_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$$

*Dit autrement :*
*$A = B$ si seulement si $\left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{b_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$.*

***Preuve***

Comme par définition $A = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{a_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ et $B = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k}\{b_i\}\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$ le **Corollaire 1** est immédiatement établi.

***Corollaire 2.*** — *Soit $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$ un ensemble infini dénombrable donné et $S_1, S_2$ deux sous-ensembles infinis dénombrables tels que $\mathbb{N}^* = [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$, en considérant l'espace de probabilité $\langle \Omega_{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^*, \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*} = \{\emptyset, S_1, S_2, \Omega_{\mathbb{N}^*}\}, \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*} : \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*} \to [0,1]\rangle$, en supposant de plus $\exists r \in [0,1], \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}(S_1) = r$, il vient qu'en considérant l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{a_i : i \in S_1\}, \{a_i : i \in S_2\}, \Omega_A\}, \mathcal{P}_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$, nous avons :*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}(S_1) = \mathcal{P}_A(\{a_i : i \in S_1\}) = r$$

***Preuve***

$\forall t \in \mathbb{N}^*$ par définition nous avons : $t \in S_1 \Leftrightarrow a_t \in \{a_i : i \in S_1\}$.

Dès lors : $S_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*} \Leftrightarrow \{a_i : i \in S_1\} \in \mathcal{F}_A$.

Dit autrement par définition l'événement $S_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}$ est équivalent à l'événement $\{a_i : i \in S_1\} \in \mathcal{F}_A$.

Il vient donc que $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}(S_1) = \mathcal{P}_A(\{a_i : i \in S_1\}) = r$. En considérant l'événement complémentaire de $S_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}$, nous avons : $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}(S_2) = \mathcal{P}_A(\{a_i : i \in S_2\}) = 1 - r$ et $\mathcal{P}_A(\Omega_A) = \mathcal{P}_A(\{a_i : i \in S_1\}) + \mathcal{P}_A(\{a_i : i \in S_2\}) = 1$.

Conséquemment le **Corollaire 2** est établi.

*****

**1$^{\text{ier}}$ exemple :**

En posant $\forall n \in \mathbb{N}, n = a_{n+1}, \mathbb{N} = A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$ et en appliquant le **Théorème 1**, nous pouvons obtenir :

$$A = \mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(A)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$$

En posant $\forall k \in \mathbb{N}, 4k = b_{3k+1}, 4k+2 = b_{3k+2}, 2k+1 = b_{3k+3}$, soit $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{b_{3k+1}, b_{3k+2}, b_{3k+3}\}$ et en appliquant le **Théorème 1**, nous pouvons obtenir :

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{b_{3k+1}, b_{3k+2}, b_{3k+3}\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(B)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$$

Le **Théorème 1** nous permet de partitionner $A$ et $B$ respectivement en $A = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(A)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$ et en $B = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(B)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$. Mais à partir de ces deux partitions nous ne pouvons pas établir que soit $A = B$ ou que soit $A \neq B$ comme le supposait l'axiome d'extensionnalité (N-A. Phan, 2021, [1]).

De même le **Théorème 1** nous permet de considérer que :

$$A = \mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k+2\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(A)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k+2\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$$

et que :

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{b_{3k+1}, b_{3k+2}, b_{3k+3}\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k+2\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(B)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k+2\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$$

.

En revanche, en posant $\forall k \in \mathbb{N}, 8k = c_{4k+1}, 8k+4 = c_{4k+2}, 4k+2 = c_{4k+3}, 2k+1 = c_{4k+4}$, soit $C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{8k, 8k+4, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{c_{4k+1}, c_{4k+2}, c_{4k+3}, c_{4k+4}\}$, en appliquant le **Théorème 1**, nous pouvons obtenir :

$$C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{8k, 8k+4, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{c_{4k+1}, c_{4k+2}, c_{4k+3}, c_{4k+4}\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k+2\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(C)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k+2\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle.$$

**Mais le Théorème 1 ne permet pas d'établir** que soit $C \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$ ou que soit $C \notin \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$ **parce que le Théorème 1 ne permet pas de partitionner C en l'union de** $\bigcup_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}}\{\mathbf{2k}\}$ **avec** $\bigcup_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}}\{\mathbf{2k+1}\}$.

Par ailleurs, il est possible de démontrer à l'aide des probabilités que **de facto** $C \notin \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$ en ce que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{8k, 8k+4, 4k+2\} \neq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}$.

* * *

**2$^{\text{ième}}$ exemple :**

En posant $\forall n \in \mathbb{N}^*, n = a_n, \mathbb{N}^* = A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$, en notant $\mathbb{N}_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$ , en notant $\mathbb{N}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}$ et en appliquant le **Théorème 1** nous obtenons :

$$\mathbb{N}^* = \left[\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*, m\geq 2}\mathbb{B}_m\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$$

où

$$\mathbb{A}_1 = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}\,;$$

$\mathbb{A}_2 = \left[\bigcup_{p \in \mathbb{P}\setminus\{2\}} \{p^k : k \in \mathbb{N}^*\}\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_2)}$, $\mathbb{P}\setminus\{2\}$ dénotant l'ensemble des nombres premiers excluant 2 ;

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2, \mathbb{B}_m = \left[\bigcup_{p_i \in \mathbb{P}, p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots < p_m} \left( \bigcup_{k_m \in \mathbb{N}_1 \cup k_m \in \mathbb{N}_2^*} \left(\ldots\left( \bigcup_{k_i \in \mathbb{N}_1 \cup k_i \in \mathbb{N}_2^*} \left(\ldots\left( \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}_1 \cup k_2 \in \mathbb{N}_2^*} \{(p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \ldots \times p_i^{k_i} \times \ldots \times p_m^{k_m}) : k_1 \in \mathbb{N}^*\} \right)\ldots\right)\right)\ldots\right)\right)\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{B}_m)},$$

$$\forall m, m' \in \mathbb{N}, m, m' \geq 2, m \neq m', \mathbb{B}_m \cap \mathbb{B}_{m'} = \emptyset;$$

étant donné que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, $\forall p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m \in \mathbb{P}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots < p_m$, $\forall k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_m, \forall i \in [2, m], (k_i \in \mathbb{N}_1) \cup (k_i \in \mathbb{N}_2^*)$, chacun des ensembles infinis dénombrables $\{(p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \ldots \times p_i^{k_i} \times \ldots \times p_m^{k_m}) : k_1 \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathbb{A}_1$ et $\{p^k : k \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{A}_2$, $\forall p \in \mathbb{P}\setminus\{2\}$, peut être considéré dans l'ordre strictement croissant qui est conféré par l'ordre strictement croissant initial de $\mathbb{N}$.

Ainsi nous avons :

$$\mathbb{N}^* = \left[\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2} \mathbb{B}_m\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} \in \mathcal{C}\left\langle \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2} \mathbb{B}_m \right\rangle$$

Cette partition de $\mathbb{N}^*$ avait été proposée dans un précédent article [3] par le présent auteur.

* * * * *

Dans la mesure où il a été démontré que l'axiome d'extensionnalité était faux (N-A. Phan, 2021, [1]), le **Théorème 1** devient crucial en ce qu'il permet de partitionner tout ensemble infini dénombrable dès lors que ce dernier dispose d'une indexation par $\mathbb{N}^*$.

En effet c'est seulement parce que nous sommes assurés de *partitionner avec légitimité* $\mathbb{N}^*$ en segmentant et en partitionnant une infinité d'intervalles finis de $\mathbb{N}^*$, que nous pouvons être assurés de la légitimité de la partition que nous faisons par l'intermédiaire du **Theoreme 1**, d'un ensemble infini dénombrable donné $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$.

### Références


[1] N-A. Phan, *Un théorème fondamental concernant les ensembles infinis dénombrables*, (2021). *https* : //*vixra.org*/*abs*/2107.0046

[2] N-A. Phan, *Un théorème fondamental concernant les ensembles infinis dénombrables*, (2021), page 7. *https* : //*vixra.org*/*abs*/2107.0046

[3] N-A. Phan, *Equiprobability for any non null natural integer of having either an odd or even number of prime factor(s) counted with multiplicity*, (2021), page 4. *https* : //*vixra.org*/*abs*/2101.0093


---

Nhat-Anh Phan • *E-mail :* `nhat_anh_phan_math@yahoo.com`