LE PASSAGE DES ALTITUDES D'UN SYSTÈME GÉODÉSIQUE À UN AUTRE

par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

***Résumé*. —** Avec l'introduction de la technologie de positionnement par GPS (Global Positioning System), laquelle fournit à l'utilisateur sa position (X,Y,Z) tridimensionnelle dans le système géocentrique mondial dit $WGS84$ (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation des altitudes du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. Nous présentons ci-après quelques modèles de transformations de passage des altitudes entre les systèmes géodésiques.

***Abstract*. —** With the introduction of GPS (Global Positioning System) technology, which provides the user with his three-dimensional (X,Y,Z) position in the global geocentric system called $WGS84$ (World Geodetic System 1984), it is necessary to know the transformation of altitudes from the world geodetic system to the national or local geodetic system. We present below some models of transformations of passage of altitudes between geodetic systems.

A mes collègues de l'Ecole Nationale des Sciences Gégraphiques, Saint-Mandé (France) lors de mes études 1978-1981, 1984-1986

Table des matières

1. INTRODUCTION

Avec l'introduction de la technologie de positionnement par GPS (Global Positioning System), laquelle fournit à l'utilisateur sa position (X,Y,Z) tridimensionnelle dans le système géocentrique mondial dit $WGS84$ (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation des altitudes du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. Nous présentons ci-après quelques modèles de transformations de passage des altitudes entre les systèmes géodésiques.

2. QUELQUES RAPPELS

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :
- $(X_1,Y_1,Z_1)_1$ les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géodésique (système 1),
- $(X_2,Y_2,Z_2)_2$ les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géodésique (système 2),
- $(\varphi_1,\lambda_1,h_{e1})$ les coordonnées géodésiques dans le système 1,
- $(\varphi_2,\lambda_2,h_{e2})$ les coordonnées géodésiques dans le système 2.

Les coordonnées géodésiques cartésiennes 3D d'un point M dans un référentiel donné (d'ellipsoïde de référence $E(a,e)$) s'écrivent comme suit:

$$\left\{\begin{array}{l} X=(N+h_e).cos\varphi.cos\lambda \\ Y=(N+h_e).cos\varphi.sin\lambda \\ Z=(N(1-e^2)+h_e).sin\varphi \end{array}\right. \tag{1}$$

avec :
- φ la latitude ellipsoïdique,
- λ la longitude géodésique,
- h_e l'altitude ellipsoïdique comptée à partir de la surface de l'ellipsoïde de référence,

(2) $$N = a/(1-e^2.sin^2\varphi)^{-1/2}$$

le rayon de courbure de la grande normale,

- a le demi grand-axe de l'ellipsoïde de référence,
- $e^2 = f(2-f)$ le carré de la 1ère excentricité,
- $f = (a-b)/a$ l'aplatissement de l'ellipsoïde de référence.

Posons :

(3) $$w = (1-e^2.sin^2\varphi)^{-1/2}$$

Le rayon de courbure ρ de la méridienne s'écrit:

(4) $$\rho = a(1-e^2)w^3$$

3. Passage de h_e d'un système à h'_e d'un autre système

Pour le passage d'une altitude ellipsoïdique h_e d'un système de référence S_1 à un système de référence S_2, il se fait comme suit:

3.1. L'Emploi du modèle de Bursa-Wolf. —

$\boxed{(\varphi,\lambda,h_e)} \rightarrow \boxed{(X,Y,Z)_{S_1}} \rightarrow \boxed{(X',Y',Z')_{S_2}\text{par le modèle de Bursa-Wolf}}$

(5) $$\boxed{(X',Y',Z')_{S_2}} \rightarrow \boxed{(\varphi',\lambda',h'_e)}$$

Il faut au préalable avoir déterminé les paramètres de passage du système S_1 au système géodésique S_2 à savoir $(Tx, Ty, Tz, m, rx, ry, rz)$.

3.2. L'Emploi du modèle de Molodensky. — Dans ce cas,on a directement:

$$\begin{aligned} h_{e2} - h_{e1} = cos\varphi_1 cos\lambda_1 T_X + cos\varphi_1 sin\lambda_1 T_Y + sin\varphi_1 T_Z + (N(1-e_1^2 sin^2\varphi_1) + H)m \\ +Ne_1^2 cos\varphi_1 sin\varphi_1 sin\lambda_1 rx - Ne_1^2 cos\varphi_1 sin\varphi_1 cos\lambda_1 ry \\ -\frac{\Delta a}{w} + N(1-f_1)sin^2\varphi_1 \Delta f \end{aligned}$$

avec :

(6) $$\begin{cases} \Delta a = a_2 - a_1 \\ \Delta f = f_1 - f_2 \end{cases}$$

La relation entre les coordonnées cartésiennes (X_1, Y_1, Z_1) et les coordonnées $(\varphi_1, \lambda_1, h_{e1})$ est:

- le modèle de Bursa- Wolf ou Helmert à 7 paramètres,
- les formules de Molodensky,

4. Le Modèle de BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$X_2 = T + (1+m).R(rx, ry, rz).X_1 \tag{7}$$

où:

- X_2 est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2, Z_2)^T$, T désigne transposée,
- T est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1+m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3,3) pour passer du système 1 au système 2,
- X_1 est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^T$.

En développant (7), on obtient:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 0 & rx & ry \\ -rx & 0 & rz \\ -ry & -1rz & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

avec $(rx, ry, rz$ les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. En considérant comme inconnues les paramètres $T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz$, l'équation (8) s'écrit en gardant les termes du 1er ordre comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & Z_1 & -Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -Z_1 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & Y_1 & -X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \tag{9}$$

En utilisant l'équation (9) pour les n points communs dans les systèmes S_1 et S_2 et en posant :

(10) $$L = (X_{2i} - X_{1i})_{i=1,n}$$

(11) $$U = (T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz)^T$$

A la matrice (3n,7):

(12) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & Z_1 & -Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -Z_1 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & Y_1 & -X_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et V le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus se fait par la résolution par les moindres carrés de l'équation :

(13) $$AU = L + V$$

Soit :

(14) $$U = (A^T.A)^{-1}.A^T.L$$

Le vecteur résidu est donné par :

(15) $$V = A.U - L = A.(A^T.A)^{-1}.A^T.L - L$$

Le facteur de la variance unitaire est donné par :

(16) $$\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n-7}$$

La matrice variance covariance du vecteur U est donnée par:

(17) $$\sigma_U = \sigma_0^2 (A^T A)^{-1}$$

5. Les Formules de MOLODENSKY

Soient:

(18) $$dX = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}, \ d\Phi = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \\ dH \end{pmatrix}, \ dF = \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix}$$

En calculant (dX, dY, dZ) de l'équation (1) en fonction de $d\varphi, d\lambda, dH, da$ et df et sachant que $d(N cos\varphi) = -\rho.sin\varphi.d\varphi$, on trouve :

(19) $$dX = J.d\Phi + K.dF$$

où les matrices J et K sont les suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} -(N+H)cos\varphi sin\lambda & -(\rho+H)sin\varphi cos\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ -(N+H)cos\varphi cos\lambda & -(\rho+H)sin\varphi sin\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ 0 & (\rho+H)cos\varphi & sin\varphi \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$K = \begin{pmatrix} wcos\varphi cos\lambda & \dfrac{\rho sin^2\varphi cos\varphi cos\lambda}{1-f} \\ \\ wcos\varphi sin\lambda & \dfrac{\rho sin^2\varphi cos\varphi sin\lambda}{1-f} \\ \\ w(1-e^2)sin\varphi & (1-f)sin\varphi(\rho sin^2\varphi - 2N) \end{pmatrix} \tag{21}$$

De l'équation (19), on tire:

$$d\Phi = J^{-1}.dX - J^{-1}.K.dF \tag{22}$$

avec:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-sin\lambda}{(N+H)cos\varphi} & \dfrac{cos\lambda}{(N+H)cos\varphi} & 0 \\ \\ \dfrac{-sin\varphi cos\lambda}{\rho+H} & \dfrac{-sin\varphi sin\lambda}{\rho+H} & \dfrac{cos\varphi}{\rho+H} \\ \\ cos\varphi cos\lambda & cos\varphi sin\lambda & sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{-we^2 sin\varphi cos\varphi}{\rho+H} & \dfrac{-\rho sin\varphi cos\varphi(2-e^2 sin^2\varphi)}{(\rho+H)(1-f)} \\ \\ \dfrac{1}{w} & -N(1-f)sin^2\varphi \end{pmatrix} \tag{23}$$

Or, en prenant:

$$dX = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

on a d'après l'équation (13) $dX = A.U$, par suite en posant:

$$d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{25}$$

$$d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{26}$$

$$dH = H_2 - H_1 \tag{27}$$

$$da = a_2 - a_1 \tag{28}$$

$$df = f_2 - f_1 \tag{29}$$

avec (a_1, f_1) et (a_2, f_2) sont respectivement les demis grands-axes et les aplatissements des ellipsoïdes des systèmes S_1 et S_2, on a alors :

$$d\Phi = J^{-1}.A.U - J^{-1}.K.dF \tag{30}$$

avec la matrice J^{-1} donnée ci-dessous par les équations (31). En développant l'équation (30) nous obtenons les formules de MOLODENSKY de passage du système 1 au système 2.

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-sin\lambda}{(N+H)cos\varphi} & \dfrac{cos\lambda}{(N+H)cos\varphi} & 0 & 0 & \dfrac{-(N(1-e^2)+H)tg\varphi cos\lambda}{N+H} & \dfrac{-(N(1-e^2)+H)tg\varphi sin\lambda}{N+H} & 1 \\ \dfrac{-sin\varphi cos\lambda}{\rho+H} & \dfrac{-sin\varphi sin\lambda}{\rho+H} & \dfrac{cos\varphi}{\rho+H} & \dfrac{-e^2 N cos\varphi sin\varphi}{\rho+H} & \dfrac{(N(1-e^2 sin^2\varphi)+H)sin\lambda}{\rho+H} & \dfrac{-(N(1-e^2 sin^2\varphi)+H)cos\lambda}{\rho+H} & 0 \\ cos\varphi cos\lambda & cos\varphi sin\lambda & sin\varphi & N(1-e^2 sin^2\varphi)+H & Ne^2 cos\varphi sin\varphi sin\lambda & -Ne^2 cos\varphi sin\varphi cos\lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

On obtient les formules de **MOLODENSKY**:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2-\lambda_1 &= \frac{-sin\lambda_1}{(N+H)cos\varphi_1}T_X+\frac{cos\lambda_1}{(N+H)cos\varphi_1}T_Y+\frac{-(N(1-e_1^2)+H)tg\varphi_1 cos\lambda_1}{N+H}rx\\
&\quad+\frac{-(N(1-e_1^2)+H)tg\varphi_1 sin\lambda_1}{N+H}ry+rz \qquad (32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_2-\varphi_1 &= \frac{-sin\varphi_1 cos\lambda_1}{\rho+H}T_X+\frac{-sin\varphi_1 sin\lambda_1}{\rho+H}T_Y+\frac{cos\varphi_1}{\rho+H}T_Z\\
&\frac{-e_1^2 N cos\varphi_1 sin\varphi_1}{\rho+H}m+\frac{(N(1-e_1^2 sin^2\varphi_1)+H)sin\lambda_1}{\rho+H}rx+\frac{-(N(1-e_1^2 sin^2\varphi_1)+H)cos\lambda_1}{\rho+H}ry\\
&\quad+\frac{we_1^2 sin\varphi_1 cos\varphi_1}{\rho+H}\Delta a+\frac{\rho sin2\varphi_1(2-e_1^2 sin^2\varphi_1)}{2(\rho+H)(1-f_1)}\Delta f \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2-H_1 &= cos\varphi_1 cos\lambda_1 T_X+cos\varphi_1 sin\lambda_1 T_Y+sin\varphi_1 T_Z+(N(1-e_1^2 sin^2\varphi_1)+H)m\\
&\quad+Ne_1^2 cos\varphi_1 sin\varphi_1 sin\lambda_1 rx-Ne_1^2 cos\varphi_1 sin\varphi_1 cos\lambda_1 ry-\frac{\Delta a}{w}+N(1-f_1)sin^2\varphi_1\Delta f \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Des équations ci-dessus, nous remarquons que :
* $\lambda_2-\lambda_1$ est indépendante de T_Z, m, a et f,
* $\varphi_2-\varphi_1$ est indépendante de rz,
* H_2-H_1 est indépendante de rz.

Nous trouvons souvent dans la littérature géodésique des formules de MOLODENSKY dites standard et abrégées que nous donnons ci-dessous.

6. Les Formules de MOLODENSKY Standard

Elles sont obtenues en tenant pas compte des rotations et du facteur d'échelle soit $m=0$ et $rx=ry=rz=0$ dans les formules (32-34) et on obtient alors les formules suivantes en posant :

$$\Delta\varphi'' = \varphi_2 - \varphi_1 \text{ en secondes sexagésimales} \tag{35}$$

$$\Delta\lambda'' = \lambda_2 - \lambda_1 \text{ en secondes sexagésimales} \tag{36}$$

$$\Delta H = H_2 - H_1 \tag{37}$$

$$\Delta X = T_X \tag{38}$$

$$\Delta Y = T_Y \tag{39}$$

$$\Delta Z = T_Z \tag{40}$$

et en omettant les indices:

$$\Delta\varphi'' = (-\Delta X sin\varphi cos\lambda - \Delta Y sin\varphi sin\lambda + \Delta Z cos\varphi +$$

$$Ne^2 sin\varphi cos\varphi.\frac{\Delta a}{a} + \Delta f(\rho\frac{a}{b} + N\frac{b}{a}).sin\varphi cos\varphi).((\rho + H).sin1'')^{-1} \tag{41}$$

$$\Delta\lambda'' = (-\Delta X sin\lambda + \Delta Y cos\lambda)((N+H)cos\varphi sin1'')^{-1} \tag{42}$$

$$\Delta H = \Delta X cos\varphi cos\lambda + \Delta Y cos\varphi sin\lambda + \Delta Z sin\varphi - a\frac{\Delta a}{N}$$

$$+\Delta f.N(1-f)sin^2\varphi \tag{43}$$

avec b le demi petit-axe de l'ellipsoïde de S_1.

7. Les Formules de MOLODENSKY Abrégées

On fait $H = 0$ et garde les termes du 1er ordre en f dans les formules Standard, nous trouvons :

$$\Delta\varphi'' = (-\Delta X sin\lambda + \Delta Y cos\lambda).(N cos\varphi sin1'')^{-1}$$

$$\Delta\lambda'' = (-\Delta X sin\varphi cos\lambda - \Delta Y sin\varphi sin\lambda + \Delta Z cos\varphi + (a\Delta f + f\Delta a)sin2\varphi)(\rho sin1'')^{-1}$$

$$\Delta H = \Delta X cos\varphi cos\lambda + \Delta Y cos\varphi sin\lambda + \Delta Z sin\varphi - \Delta a + (a\Delta f + f\Delta a)sin^2\varphi$$

8. La Recherche des Paramètres de Passage par les Formules de MOLODENSKY

A partir de l'équation (30) on a :

$$d\Phi = J^{-1}.A.U - J^{-1}.K.dF$$

d'où:

$$J^{-1}.A.U = d\Phi + J^{-1}.K.dF \tag{44}$$

où U est le vecteur des inconnues $(T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz)^T$. En écrivant l'équation précédente pour les n points communs et en posant :

$$L = (d\Phi_i + J_i^{-1}.K_i.dF)_{i=1,n} \tag{45}$$

le vecteur des observations (3n,1) et

$$B = (J_i^{-1} A_i)_{i=1,n} \tag{46}$$

la matrice des coefficients (3n,7) et V le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus se fait par résolution par les moindres carrés de l'équation :

$$B.U = L + V \tag{47}$$

Le vecteur solution est :

$$\hat{U} = (B^T.B)^{-1} B^T L \tag{48}$$

Le vecteur résidu est :

$$V = B.\hat{U} - L = B.(B^T.B)^{-1}.B^T.L - L \tag{49}$$

Le facteur de la variance unitaire est donné par :

$$\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n-7} \tag{50}$$

La matrice variance covariance du vecteur $\hat{U}$ est donnée par :

$$\sigma_{\hat{U}} = \sigma^2.(B^T.B)^{-1} \tag{51}$$

9. Passage à l'altitude au dessus du géoïde

Ayant déterminé l'altitude ellipsoïdique h_e dans le système S_2, dans le cas où on a connaissance de l'ondulation du géoïde N, on détermine donc l'altitude h_g au dessus du géoïde par la formule connue :

$$h_g = h_e - N \tag{52}$$

Références

[1] ABDELMAJID BEN HADJ SALEM: 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*, edited by Nour-Publishing. 365 pages. ISBN - 13: 978-3-330-96843-1 (link: https://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-des-moindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1).

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, Résidence Bousten 8, Mosquée Raoudha, 1181 Soukra Raoudha, Tunisia. • *E-mail :* abenhadjsalem@gmail.com