UN SECOND THÉORÈME CRUCIAL POUR LA REFONDATION DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES ET L'ENSEIGNEMENT DE CETTE DISCIPLINE POUR LES FUTURES GÉNÉRATIONS

par

Nhat-Anh Phan

One second crucial theorem for the refoundation of elementary set theory and the teaching of that discipline to future generations

RÉSUMÉ :

Pour un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, nous démontrons qu'il est légitime de partitionner A en un nombre fini ou infini de sous-ensembles qui sont eux-mêmes constitués par un nombre fini ou infini de sous-ensembles de A lorsque l'ordre d'indexation initiale des sous-ensembles de A préserve un ordre strictement croissant dans chaque sous-ensemble.

ABSTRACT :

For a given infinite countable set constituted by the union of infinitely many non-empty, finite or infinite countable, disjoint sub-sets $A = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, we demonstrate that it is legitimate to partition A in a finite or infinite number of sub-sets that are themselves constituted by a finite or infinite number of sub-sets of A when the initial order of indexation of the sub-sets of A maintains a strictly increasing order in each sub-set.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A17, 05A18 — Mots clés : union, sous-ensemble, infini, dénombrable, partition, indexation.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A17, 05A18 — Key words : union, sub-set, infinite, countable, partition, indexation.

Cette article fait suite à un précédent article par le présent auteur (N-A. Phan, 2022, [1]). Aussi les formalismes introduits dans le précédent article (N-A. Phan, 2022, [1]) est également employé dans ce présent article.

Dans le précédent article (N-A. Phan, 2022, [1]) nous avons démontré qu'il est légitime, pour un ensemble infini dénombrable donné $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\{a_i\}, \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \neq \emptyset$, de partitionner A en un nombre fini ou infini de sous-ensembles infinis dénombrables lorsque l'ordre d'indexation initiale des éléments de A préserve un ordre strictement croissant dans chaque sous-ensemble.

Dans le présent article nous démontrons un théorème similaire au théorème démontré dans le précédent article, mais qui est applicable aux ensembles infinis dénombrables constitués par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints.

Lemme 1. — *$\forall N \in \mathbb{N}^*, N \geq 2$, en considérant un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union de N sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in [1,N], A_i \neq \emptyset, \forall i,j \in [1,N], i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, il est légitime de partitionner A comme suit :*

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\left(\bigcup_{i\in S_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in S_2} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

avec

$$S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset, S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = \bigcup_{i=1}^{N}\{i\};$$
$$d_1 \in [1,N[, S_1 = \bigcup_{j=1}^{d_1}\{s_{1_j}\}, \forall j,j' \in [1,d_1], j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in [1,N], s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$
$$d_2 \in [1,N[, S_2 = \bigcup_{j=1}^{d_2}\{s_{2_j}\}, \forall j,j' \in [1,d_2], j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in [1,N], s_{2_j} > s_{2_{j'}};$$
$$d_1 + d_2 = N.$$

Preuve

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $A = \left[\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in [1,N], A_i \neq \emptyset, \forall i,j \in [1,N], i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, est donc un ensemble infini dénombrable constitué par l'union de N sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, disjoints et indexés par les index $i \in [1,N]$ ordonnés dans un ordre strictement croissant. $A_i \subset A$ est donc le $i^{\text{ième}}$ sous-ensemble de l'ensemble A tel que cet ensemble A **a été défini initialement**.

Démontrons par récurrence le **Lemme 1**.

Pour $N = 2$ nous avons $A = [A_1 \cup A_2]_{\mathcal{P}(A)}, A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$. Il suffit de considérer que soit $S_1 = \{s_{1_1}\}, s_{1_1} = 1, d_1 = 1$ et $S_2 = \{s_{2_1}\}, s_{2_1} = 2, d_2 = 1$ ou que soit $S_1 = \{s_{1_1}\}, s_{1_1} = 2, d_1 = 1$ et $S_2 = \{s_{2_1}\}, s_{2_1} = 1, d_2 = 1$, avec $d_1 + d_2 = 2$ pour pouvoir déduire que le **Lemme 1** est vrai pour $N = 2$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*, N > 2$, donné supposons que le **Lemme 1** soit vrai pour N.

Adjoignons par union un $(N+1)^{\text{ième}}$ sous-ensemble non vide à l'ensemble A tel que $\forall i \in [1,N], A_i \cap A_{N+1} = \emptyset$. Par définition l'index de cet $(N+1)^{\text{ième}}$ sous-ensemble est strictement supérieur à l'index du $N^{\text{ième}}$ sous-ensemble c-à-d que $(N+1) > N$. Nous avons alors :

$$A' = [A \cup A_{N+1}]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\left[\left(\bigcup_{i \in S_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in S_2} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} \cup A_{N+1}\right]_{\mathcal{P}(A')}$$

Notons que par définition nous avons :

$$\left[\bigcup_{i \in S_1} A_i\right]_{\mathcal{P}(A \setminus \bigcup_{i \in S_2} A_i)} = \left[\left(\bigcup_{i \in S_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in S_2} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} \setminus \left[\bigcup_{i \in S_2} A_i\right]_{\mathcal{P}(A \setminus \bigcup_{i \in S_1} A_i)}.$$

Par suite nous avons soit :

$$A' = [A \cup A_{N+1}]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\left(\bigcup_{i \in S_1 \cup \{N+1\}} A_i\right) \cup \bigcup_{i \in S_2} A_i\right]_{\mathcal{P}(A')}$$

soit :

$$A' = [A \cup A_{N+1}]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\bigcup_{i \in S_1} A_i \cup \left(\bigcup_{i \in S_2 \cup \{N+1\}} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A')}$$

En considérant que soit $S'_1 = S_1 \cup \{N+1\}, S'_1 = \{s'_{1_1}, s'_{1_2}, ..., s'_{1_j}, ..., s'_{1_{d'_1}}\}$, $d'_1 = d_1 + 1$, $\forall j \in [1, d_1], s'_{1_j} = s_{1_j}, s'_{1_{d'_1}} = N+1$ et $S'_2 = S_2, S'_2 = \{s'_{2_1}, s'_{2_2}, ..., s'_{2_j}, ..., s'_{2_{d'_2}}\}$, $d'_2 = d_2$, $\forall j \in [1, d'_2], s'_{2_j} = s_{2_j}$ ou que soit $S'_1 = S_1, S'_1 = \{s'_{1_1}, s'_{1_2}, ..., s'_{1_j}, ..., s'_{1_{d'_1}}\}$, $d'_1 = d_1$, $\forall j \in [1, d'_1], s'_{1_j} = s_{1_j}$ et $S'_2 = S_2 \cup \{N+1\}, S'_2 = \{s'_{2_1}, s'_{2_2}, ..., s'_{2_j}, ..., s'_{2_{d'_2}}\}$, $d'_2 = d_2 + 1$, $\forall j \in [1, d_2], s'_{2_j} = s_{2_j}, s'_{2_{d'_2}} = N+1$ et sachant que $d'_1 + d'_2 = d_1 + d_2 + 1 = N+1, d_1 > 0, d_2 > 0$ et que $S'_1 \neq \emptyset, S'_2 \neq \emptyset$, nous obtenons :

$$A' = \left[\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right]_{\mathcal{P}(A')} = \left[\bigcup_{i \in S'_1} A_i \cup \bigcup_{i \in S'_2} A_i\right]_{\mathcal{P}(A')}$$

avec

$$S'_1 \neq \emptyset, S'_2 \neq \emptyset, S'_1 \cap S'_2 = \emptyset, S'_1 \cup S'_2 = \bigcup_{i=1}^{N+1} \{i\};$$

$$d'_1 \in [1, N+1[, S'_1 = \bigcup_{j=1}^{d'_1} \{s'_{1_j}\}, \forall j, j' \in [1, d'_1], s_{1_j}, s'_{1_j} \in [1, N+1], s'_{1_j} > s'_{1_{j'}};$$

$$d'_2 \in [1, N+1[, S'_2 = \bigcup_{j=1}^{d'_2} \{s'_{2_j}\}, \forall j, j' \in [1, d'_2], s_{2_j}, s'_{2_j} \in [1, N+1], s'_{2_j} > s'_{2_{j'}};$$

$$d'_1 + d'_2 = N+1.$$

Le **Lemme 1** est donc vrai pour $N+1$. Conséquemment le **Lemme 1** est établi.

* * *

Remarquons qu'il suffit de poser $\forall i \in [1,N], A_i = \{a_i\}, a_i \neq \emptyset$, c-à-d considérer $\forall i \in [1,N], A_i$ comme un singleton contenant a_i pour que le **Lemme 1** ci-dessus nous donne le même résultat que le **Lemme 1** de l'article précédent (N-A. Phan, 2022, [1]).

Remarquons de plus que le **Lemme 1** ci-dessus nécessite que $\forall i,j \in [1,N], i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ tandis que **Lemme 1** de l'article précédent (N-A. Phan, 2022, [1]) ne l'exigeait pas. Ce dernier point s'explique par le fait que par définition $\forall i,j \in [1,N], i \neq j, \{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset$ en ce que par définition le $\text{i}^{\text{ième}}$ élément de A n'est pas le $\text{j}^{\text{ième}}$ élément de A. Dit autrement étant donné que dans la définition initiale de l'ensemble fini dénombrable $A = \bigcup_{i=1}^{N}\{a_i\}$ le $\text{i}^{\text{ième}}$ élément de A est distinct du $\text{j}^{\text{ième}}$ élément de A en ce que $i \neq j$, nous avons $\forall i,j \in [1,N], i \neq j$:

$$\{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset \Leftrightarrow a_j \notin \{a_i\} \Leftrightarrow a_i \notin \{a_j\} \Leftrightarrow i \neq j.$$

Lemme 2. — *En considérant un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints* $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, A_i \cap A_j = \emptyset$, *il est légitime de partitionner* A *comme suit :*

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\left(\bigcup_{i \in S_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in S_2} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

$$\textit{avec}$$

$$card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$

$$S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{1_j}\}, \forall j,j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$

$$S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{2_j}\}, \forall j,j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}.$$

1**$^{\textbf{ière}}$ **Preuve

Soit un ensemble infini dénombrable A donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Par définition originelle de $\mathbb{N}^*$ à savoir que $\mathbb{N}^* = \{0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, ..., +\infty\}$ nous pouvons segmenter $\mathbb{N}^*$ en une infinité d'intervalles finis de cardinal supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty}[I_k, I_{k+1}[, I_1 = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, I_k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq card([I_k, I_{k+1}[) < +\infty$$

Par suite nous avons :

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{i \in [I_k, I_{k+1}[} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

avec

$$I_1 = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, I_k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq card([I_k, I_{k+1}[) < +\infty.$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ en notant E_k l'ensemble fini dénombrable tel que $\forall n \in [I_k, I_{k+1}[, n \in E_k, card(E_k) = card([I_k, I_{k+1}[) = (I_{k+1} - I_k)$, en considérant que $E_k = \bigcup_{i=0}^{I_{k+1}-I_k-1} \{I_k + i\}$ et en appliquant le **Lemme 1** à E_k, nous obtenons :

$$E_k = Z_{1_k} \cup Z_{2_k}$$

avec

$$Z_{1_k} \neq \emptyset, Z_{2_k} \neq \emptyset; Z_{1_k} \cap Z_{2_k} = \emptyset;$$

$$l_{1_k} \in [1, card(E_k)[, Z_{1_k} = \bigcup_{j=1}^{l_{1_k}} \{z_{1_{k_j}}\}, \forall j, j' \in [1, l_{1_k}], j > j', z_{1_{k_j}}, z_{1_{k_{j'}}} \in [I_k, I_{k+1}[, z_{1_{k_j}} > z_{1_{k_{j'}}};$$

$$l_{2_k} \in [1, card(E_k)[, Z_{2_k} = \bigcup_{j=1}^{l_{2_k}} \{z_{2_{k_j}}\}, \forall j, j' \in [1, l_{2_k}], j > j', z_{2_{k_j}}, z_{2_{k_{j'}}} \in [I_k, I_{k+1}[, z_{2_{k_j}} > z_{2_{k_{j'}}}$$

$$l_{1_k} + l_{2_k} = card([I_k, I_{k+1}[) = card(E_k);$$

Dès lors en posant :

$$S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{1_j}\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{1_k} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{j \in [1, l_{1_k}]} \{z_{1_{k_j}}\} \right)$$

avec

$$s_{1_1} = z_{1_{1_1}}, s_{1_2} = z_{1_{1_2}}, \ldots, s_{1_{l_{1_1}}} = z_{1_{1_{l_{1_1}}}};$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)}} = z_{1_{k_{l_{1_k}}}};$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [1, l_{1_k} - 1[, s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)-j}} = z_{1_{k_{\left(l_{1_k}-j\right)}}}, z_{1_{k_{l_{1_k}}}} < z_{1_{(k+1)_1}};$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall h \in [0, l_{1_k} - 2[, s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)-h-1}} = z_{1_{k_{\left(l_{1_k}-h-1\right)}}} < s_{1_{\left(\sum_1^k l_{1_k}\right)-h}} = z_{1_{k_{\left(l_{1_k}-h\right)}}};$$

tels que définis ci-dessus nous avons bien $\forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j} > s_{1_{j'}}$.

Dit autrement S_1 est l'ensemble des entiers naturels $z_{1_{k_j}}, k \in \mathbb{N}^*, j \in [1, l_{1_k}], l_{1_k} \in [1, card(E_k)[$, indexés dans l'ordre strictement croissant de leur valeur à l'infini avec $card(S_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} l_{1_k} = +\infty$.

De même en posant :

$$S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{2_j}\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{2_k} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{j \in [1, l_{2_k}]} \{z_{2_{k_j}}\} \right)$$

avec

$$s_{2_1} = z_{2_{1_1}}, s_{2_2} = z_{2_{1_2}}, \ldots, s_{2_{l_{2_1}}} = z_{2_{1_{l_{2_1}}}};$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)}} = z_{2_{k_{l_{2_k}}}};$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [1, l_{2_k} - 1[, s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)-j}} = z_{2_{k_{\left(l_{2_k}-j\right)}}}, z_{2_{k_{l_{2_k}}}} < z_{2_{(k+1)_1}};$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall h \in [0, l_{2_k} - 2[, s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)-h-1}} = z_{2_{k_{\left(l_{2_k}-h-1\right)}}} < s_{2_{\left(\sum_1^k l_{2_k}\right)-h}} = z_{2_{k_{\left(l_{2_k}-h\right)}}};$$

tels que définis ci-dessus nous avons bien $\forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j} > s_{2_{j'}}$.

Dit autrement S_2 est l'ensemble des entiers naturels $z_{2_{k_j}}, k \in \mathbb{N}^*, j \in [1, l_{2_k}], l_{2_k} \in [1, card(E_k)[$, indexés dans l'ordre strictement croissant de leur valeur à l'infini avec $card(S_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} l_{2_k} = +\infty$.

Il vient que :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{i\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (Z_{1_k} \cup Z_{2_k}) = \left[\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{1_k} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_{2_k} \right) \right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} =$$

$$\left[\bigcup_{i \in S_1} \{i\} \cup \bigcup_{i \in S_2} \{i\} \right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)}$$

avec

$$card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$
$$S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$
$$S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{2_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}.$$

Comme par définition $\forall t \in \mathbb{N}^*, t \in S_1 \Leftrightarrow A_t \subset \left[\bigcup_{i \in S_1} A_i \right]_{\mathcal{P}(A \setminus \bigcup_{i \in S_2} A_i)}$, il vient que :

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\left(\bigcup_{i \in S_1} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in S_2} A_i \right) \right]_{\mathcal{P}(A)}$$

avec

$$card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$
$$S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}};$$
$$S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{s_{2_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}.$$

Conséquemment le **Lemme 2** est établi.

* * *

En résumé nous pouvons dire qu'en segmentant $\mathbb{N}^*$ en une infinité d'intervalles finis et en partitionnant chacun des-dits intervalles en deux sous-ensembles finis, nous avons démontré qu'il est légitime de partitionner $\mathbb{N}^*$ en deux sous-ensembles infinis dénombrables dans lesquels les entiers naturels $i \in \mathbb{N}^*$ sont préservés dans un ordre strictement croissant. De cette légitimité de partitionner $\mathbb{N}^*$ nous pouvons déduire que $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, A_i \cap A_j = \emptyset$, peut également être partitionné en deux sous-ensembles constitués par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints pour lesquels les indexes $i \in \mathbb{N}^*$ des sous-ensembles A_i, sont préservés dans un ordre strictement croissant.

2ième Preuve

$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, A_i \cap A_j = \emptyset$ est donc un ensemble infini dénombrable constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, disjoints et indexés par les index $i \in \mathbb{N}^*$ ordonnés dans un ordre strictement croissant. $A_i \subset A$ est donc le $i^{\text{ième}}$ sous-ensemble de l'ensemble A tel que cet ensemble A **a été défini initialement**.

En procédant dans l'ordre strictement croissant d'indexation initiale des sous-ensembles $A_i, i \in \mathbb{N}^*$, **nous pouvons affecter arbitrairement à l'infini** chaque i soit uniquement dans S_1 soit uniquement dans S_2 **tout en indexant l'ordre d'affectation de** i **dans** S_1 **ou dans** S_2 ; de sorte que si i est le $j^{\text{ième}}$ élément de S_1 **par notre affectation arbitraire** alors $s_{1_j} = i$ ou si i est le $k^{\text{ième}}$ élément de S_2 **par notre affectation arbitraire** alors $s_{2_k} = i$.

Dès lors il suffit que $\nexists M_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \geq M_1, i \in S_1$ et que $\nexists M_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \geq M_2, i \in S_2$ pour que $card(S_1) = +\infty$ et que $card(S_2) = +\infty$.

Comme nous pouvons affecter arbitrairement à l'infini en parcourant l'ordre strictement croissant d'indexation initiale des sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A_i, i \in \mathbb{N}^*$, chaque i soit uniquement dans S_1 soit uniquement dans S_2, **nous pouvons donc arbitrairement décider que** $\nexists M_1$ **et** $\nexists M_2$ ce qui a pour conséquence que $card(S_1) = +\infty$ et $card(S_2) = +\infty$.

De plus le fait que nous affectons arbitrairement à l'infini en parcourant l'ordre strictement croissant d'indexation initiale des sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A_i, i \in \mathbb{N}^*$, chaque i soit uniquement dans S_1 soit uniquement dans S_2, tout en indexant l'ordre d'affectation de i dans S_1 ou dans S_2, **nous assure nécessairement que** : $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $[S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$ ainsi que $\forall j \in \mathbb{N}^*, s_{1_{j+1}} > s_{1_j}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*, s_{2_{j+1}} > s_{2_j}$ étant donné que par définition $\forall i \in \mathbb{N}^*, i+1 > i$.

Il vient que nous pouvons effectivement partitionner A tel que $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\left(\bigcup_{i \in S_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in S_2} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ avec $card(S_1) = +\infty, card(S_2) = +\infty, S_1 \cap S_2 = \emptyset, [S_1 \cup S_2]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*; S_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{1_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{1_j}, s_{1_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{1_j} > s_{1_{j'}}; S_2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{2_j}\}$, $\forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{2_j}, s_{2_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{2_j} > s_{2_{j'}}$.

Conséquemment le **Lemme 2** est établi.

* * *

Remarquons qu'il suffit de poser $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i = \{a_i\}, a_i \neq \emptyset$, c-à-d considérer $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i$ comme un singleton contenant a_i pour que le **Lemme 2** ci-dessus nous donne le même résultat que le **Lemme 2** de l'article précédent (N-A. Phan, 2022, [1]).

Remarquons de plus que le **Lemme 2** ci-dessus nécessite que $\forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ tandis que **Lemme 2** de l'article précédent (N-A. Phan, 2022, [1]) ne l'exigeait pas. Ce dernier point s'explique par le fait que par définition $\forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, \{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset$ en ce que par définition le i$^{\text{ème}}$ élément de A n'est pas le j$^{\text{ème}}$ élément de A. Dit autrement étant donné que dans la définition initiale de l'ensemble infini dénombrable $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i\}$ le $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ élément de A est distinct du $\mathrm{j}^{\text{ième}}$ élément de A en ce que $i \neq j$, nous avons $\forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j$:

$$\{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset \Leftrightarrow a_j \notin \{a_i\} \Leftrightarrow a_i \notin \{a_j\} \Leftrightarrow i \neq j.$$

Lemme 3. — *$\forall T \in \mathbb{N}^*, T \geq 2$, en considérant un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, A_i \cap A_j = \emptyset$, il est légitime de partitionner A comme suit :*

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

avec

$$\forall k, k' \in [1, T], S_k \cap S_{k'} = \emptyset, \left[\bigcup_{k=1}^{T} S_k\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$

$$\forall k \in [1, T], S_k = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{k_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{k_j}, s_{k_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{k_j} > s_{k_{j'}}.$$

Preuve

Démontrons par récurrence le **Lemme 3**.

Pour $T = 2$ le **Lemme 2** stipule que le **Lemme 3** est vrai.

Pour $T \in \mathbb{N}^*, T > 2$, donné supposons que le **Lemme 3** soit vrai pour T. Il s'ensuit que pour un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}$ il est légitime de partitionner A tel que $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ avec $\forall k, k' \in [1, T], S_k \cap S_{k'} = \emptyset, \left[\bigcup_{k=1}^{T} S_k\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in [1, T], S_k = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{k_j}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{k_j}, s_{k_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{k_j} > s_{k_{j'}}$.

Comme pour $\forall X \in [1, T]$ donné $card(S_X) = +\infty$, en posant $E_{S_X} = \left[\bigcup_{i\in S_X} A_i\right]_{\mathcal{P}\left(A\setminus\left[\bigcup_{k=1,k\neq X}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}\right)}$ en appliquant le **Lemme 2** à S_X, nous obtenons :

$$\left[\bigcup_{i\in S_X} A_i\right]_{\mathcal{P}(E_{S_X})} = \left[\bigcup_{i\in S_{X_1}} A_i \cup \bigcup_{i\in S_{X_2}} A_i\right]_{\mathcal{P}(E_{S_X})}$$

avec

$$S_{X_1} \cap S_{X_2} = \emptyset, [S_{X_1} \cup S_{X_2}]_{\mathcal{P}(S_X)} = S_X;$$

$$S_{X_1} = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{X_{1_j}}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{X_{1_j}}, s_{X_{1_{j'}}} \in S_X, s_{X_{1_j}} > s_{X_{1_{j'}}};$$

$$S_{X_2} = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{X_{2_j}}\}, \forall j, j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{X_{2_j}}, s_{X_{2_{j'}}} \in S_X, s_{X_{2_j}} > s_{X_{2_{j'}}}.$$

En substituant $\left[\bigcup_{i\in S_X} A_i\right]_{\mathcal{P}(E_{S_X})}$ par $\left[\bigcup_{i\in S_{X_1}} A_i \cup \bigcup_{i\in S_{X_2}} A_i\right]_{\mathcal{P}(E_{S_X})}$ nous obtenons :

$$A = \left[\left[\bigcup_{k=1;k\neq X}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A\setminus E_{S_X})} \cup\right.$$

$$\left[\left[\bigcup_{i\in S_{X_1}} A_i \cup \bigcup_{i\in S_{X_2}} A_i\right]_{\mathcal{P}(E_{S_X})}\right]_{\mathcal{P}(A)} =$$

$$\left[\bigcup_{k=1;k\neq X}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right) \cup \bigcup_{i\in S_{X_1}} A_i \cup \bigcup_{i\in S_{X_2}} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

Le **Lemme 3** est donc vrai pour $T+1$. Conséquemment le **Lemme 3** est établi.

* * *

Remarquons qu'il suffit de poser $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i = \{a_i\}, a_i \neq \emptyset$, c-à-d considérer $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i$ comme un singleton contenant a_i pour que le **Lemme 3** ci-dessus nous donne le même résultat que le **Lemme 3** de l'article précédent (N-A. Phan, 2022, [1]).

Théorème 1. — *En considérant un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints* $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}^*, A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall T \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, *il est légitime de partitionner* A *comme suit :*

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

avec

$$\forall k,k' \in \mathbb{N}^*, S_k \cap S_{k'} = \emptyset, \left[\bigcup_{k=1}^{T} S_k\right]_{\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{N}^*;$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\{s_{k_j}\}, \forall j,j' \in \mathbb{N}^*, j > j', s_{k_j}, s_{k_{j'}} \in \mathbb{N}^*, s_{k_j} > s_{k_{j'}}.$$

Preuve

Le **Lemme 3** signifie que le **Théorème 1** est vrai $\forall T \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons par l'absurde le cas où $T = +\infty$.

Supposons que le **Théorème 1** soit faux pour $T = +\infty$. Il s'ensuit qu'il existe un maximum $M \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il est impossible de partitionner un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}$ en $(M+1)$ sous-ensembles qui respectent les propriétés stipulées par le **Théorème 1**.

Le fait qu'il soit impossible de partitionner un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}$ en $(M+1)$ sous-ensembles qui respectent les propriétés stipulées par le **Théorème 1**, est en contradiction avec le **Lemme 3**. Conséquemment le **Théorème 1** est vrai dans le cas où $T = +\infty$ et le **Théorème 1** est établi.

* * *

Remarquons qu'il suffit de poser $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i = \{a_i\}, a_i \neq \emptyset$, c-à-d considérer $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i$ comme un singleton contenant a_i pour que le **Théorème 1** ci-dessus nous donne le même résultat que le **Théorème 1** de l'article précédent (N-A. Phan, 2022, [1]).

Corollaire 1. — *Soient A, B deux ensembles infinis dénombrables constitués par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints,* $\forall T \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ *et* $\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k$ *un sous-ensemble infini dénombrable tel que* $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ *et tel que* $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} B_i\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$*, il vient que :*

$$A = B \Leftrightarrow \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} B_i\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$$

Dit autrement :

$A = B$ *si seulement si* $\left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} B_i\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$.

Preuve

Comme par définition $A = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ et $B = \left[\bigcup_{k=1}^{T}\left(\bigcup_{i\in S_k} B_i\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$ le **Corollaire 1** est immédiatement établi.

Corollaire 2. — *Soient A un ensemble infini dénombrable constitués par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis dénombrables et disjoints, tel que* $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in [1, +\infty[, card(A_i) < +\infty$*, il vient que :*

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

Dit autrement :

si A est un ensemble infini dénombrable constitués par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis dénombrables et disjoints, tel que $A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in [1, +\infty[, card(A_i) < +\infty$*, alors il n'est pas nécessaire de préciser que* $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ *est une partition de A.*

Preuve

Comme $\forall i \in \mathbb{N}^*, card(A_i) < +\infty$, nous pouvons donc **indexer arbitrairement chacun des éléments de** A_i de sorte que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_j}, \ldots, a_{i_{l_i}}\}, l_i \in \mathbb{N}^*, card(A_i) = l_i.$$

Dès lors en posant : $\forall j \in [1, l_1], a_{1_j} = \alpha_j$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*, i > 1, \forall j \in [1, l_i], a_{i_j} = \alpha_{\left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k\right)+j}$, nous avons :

$A_1 = \{a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_j}, \ldots, a_{1_{l_1}}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_{l_1}\}, card(A_1) = l_1;$

et $\forall i \in \mathbb{N}^*, i > 1$:

$$A_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_j}, \ldots, a_{i_{l_i}}\} =$$
$$\{\alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+1}, \alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+2}, \ldots, \alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+j}, \ldots, \alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+l_i}\}, card(A_i) = l_i.$$

En posant $\mathcal{A}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_{l_1}\}$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*, i > 1, \mathcal{A}_i = \{\alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+1}, \alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+2}, \ldots, \alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+j}, \ldots, \alpha_{(\sum_{k=1}^{i-1} l_k)+l_i}\}$, il vient que :

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \{a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_j}, \ldots, a_{1_{l_1}}\} \cup \{a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_j}, \ldots, a_{2_{l_2}}\} \cup \ldots$$

$$\cup\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_j}, \ldots, a_{i_{l_i}}\} \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \alpha_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathcal{A}_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Conséquemment le **Corollaire 2** est établi.

* * * * *

1$^{\text{ier}}$ exemple :

En posant $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = \{n\}, \mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ et en appliquant le **Théorème 1**, nous pouvons obtenir :

$$A = \mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \left[\left(\bigcup_{i\in\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\{2k+2:k\in\mathbb{N}\}} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} =$$

$$\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(A)} \in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$$

En posant $\forall k \in \mathbb{N}, \{4k\} = B_{3k+1}, \{4k+2\} = B_{3k+2}, \{2k+1\} = B_{3k+3}$, soit $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_{3k+1} \cup B_{3k+2} \cup B_{3k+3}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i$ et en appliquant le **Théorème 1**, nous pouvons obtenir :

$$B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_{3k+1} \cup B_{3k+2} \cup B_{3k+3}) =$$

$$\left[\left(\bigcup_{i\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{3k+1,3k+2\}} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\{3k:k\in\mathbb{N}\}} B_i\right)\right]_{\mathcal{P}(B)} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right]_{\mathcal{P}(B)}$$

$$\in \mathcal{C}\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}\right\rangle$$

Les lecteurs attentionnés noterons que A et B sont les deux contre-exemples que nous avons exposés dans un précédent article pour démontrer que l'axiome d'extensionnalité est faux (N-A. Phan, 2021, [2]).

Insistons sur le fait que ce n'est pas la partition qui est erronée dans l'emploi de l'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}\cup\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" mais c'est l'emploi de l'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}\cup\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" comme signifiant qui est ambigu en ce qu'elle peut désigner une infinité d'ensembles infinis dénombrables qui s'ils étaient menés à être partitionnés pourraient s'écrire par l'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}\cup\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$". Cette ambiguïté n'est pas une erreur en soi lorsque la partition est légitime (en effet il suffit d'ajouter le formalisme "$[\ldots]_{\mathcal{P}(A)}$" pour lever cette ambiguïté) **mais le devient effectivement** lorsque l'axiome d'extensionnalité est appliqué à cette expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}\cup\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" pour établir que $A=B$ (cf. N-A. Phan, 2022, [2]).

En considérant l'ensemble $\left[\left(\bigcup_{i\in\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}A_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in\{2k+2:k\in\mathbb{N}\}}A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$ il suffit de réordonner dans l'ordre initial strictement croissant des indexes pour réobtenir $A=\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\left[\left(\bigcup_{i\in\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}}A_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in\{2k+2:k\in\mathbb{N}\}}A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}$.

En considérant l'ensemble $\left[\left(\bigcup_{i\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{3k+1,3k+2\}}B_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in\{3k:k\in\mathbb{N}\}}B_i\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$ il suffit de réordonner dans l'ordre initial strictement croissant des indexes pour réobtenir $B=\bigcup_{i=1}^{+\infty}B_i=\left[\left(\bigcup_{i\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{3k+1,3k+2\}}B_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in\{3k:k\in\mathbb{N}\}}B_i\right)\right]_{\mathcal{P}(B)}$.

Par ailleurs, dans ce présent exemple où $A=\mathbb{N}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i$ et $B=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k,4k+2,2k+1\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(B_{3k+1}\cup B_{3k+2}\cup B_{3k+3})=\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}B_i$, il est possible de démontrer que $B=\bigcup_{i\in B}A_{i+1}$.

* * *

2ième exemple :

Posons $\forall i\in\mathbb{N}, A_{3i+1}=\{3i+1\}, A_{3i+2}=\{3i+2\}, A_{3i+3}=\{3i+3\}$ et $A=\bigcup_{i=0}^{+\infty}A_{3i+1}$. En appliquant le **Théorème 1** il vient que :

$$A=\bigcup_{i=0}^{+\infty}A_{3i+1}=\left[\left(\bigcup_{i\in\{3k+1:k\in\mathbb{N}\}\cup\{3k+2:k\in\mathbb{N}\}}A_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in\{3k+3:k\in\mathbb{N}\}}A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)}.$$

* * *

3ième exemple :

Posons $\forall n\in\mathbb{N}, A_{n+1}=\{n\}$, $A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}A_i$ et $\forall i\in\mathbb{N}^*, P_i=\{p_i^k:k\in\mathbb{N}^*\}, p_i\in\mathbb{P}, \forall i,j\in\mathbb{N}^*, i>j, p_i>p_j$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. En appliquant le **Théorème 1** il vient que :

$$A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}A_i=\left[\left(\bigcup_{i\in\left(\mathbb{N}^*\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}P_k\right)}A_i\right)\cup\bigcup_{l\in\mathbb{N}^*}P_l\right]_{\mathcal{P}(A)}=$$
$$\left[\left(\bigcup_{i\in\left(\mathbb{N}^*\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}P_k\right)}A_i\right)\cup\bigcup_{l\in\left(\mathbb{N}^*\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}P_k\right)}P_l\cup\bigcup_{l\in\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}P_k\right)}P_l\right]_{\mathcal{P}(A)}$$

* * *

4ième exemple :

Soit $\Omega_U = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}, \Omega_i = [\omega_i \cup \overline{\omega_i}]_{\mathcal{P}(\Omega_i)}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ et où ω_i et $\overline{\omega_i}$ sont des ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints.

En considérant $A = \Omega_U$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_{2i+1} = \omega_i$ et $A_{2i+2} = \overline{\omega_i}$, nous avons :

$$A = \Omega_U = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_{2i+1} \cup A_{2i+2})\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} =$$

$$\left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_{2i+1} \cup A_{2i+2})\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\omega_i \cup \overline{\omega_i})\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\omega_i \cup \overline{\omega_i})\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)}.$$

Dès lors en appliquant le **Théorème 1** nous obtenons :

$$A = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)} = \left[\left(\bigcup_{i\in\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\{2k+2:k\in\mathbb{N}\}} A_i\right)\right]_{\mathcal{P}(A)} =$$

$$\left[\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}\right)\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)} = \Omega_U.$$

Notons que l'ensemble $\Omega_U = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)} = \left[\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}\right)\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)}$ a été exposé dans un précédent article par le présent auteur (cf. N-A. Phan, 2021, [3]).

Insistons sur le fait que ce n'est pas la partition qui est erronée dans l'emploi de l'expression "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}$" mais c'est l'emploi de l'expression "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}$" comme signifiant qui est ambigu en ce qu'elle peut désigner une infinité d'ensembles infinis dénombrables qui s'ils étaient menés à être partitionnés pourraient s'écrire par l'expression "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}$". Cette ambiguïté n'est pas une erreur en soi lorsque la partition est légitime (en effet il suffit d'ajouter le formalisme "$[\ldots]_{\mathcal{P}(\Omega_U)}$" pour lever cette ambiguïté). C'est pourquoi il est recommandé d'employer l'expression $\left[\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}\right)\right]_{\mathcal{P}(\Omega_U)}$ pour rappeler et signifier que c'est Ω_U qui a été partitionné en deux sous-ensembles constitués par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints.

* * * * *

Dans la mesure où il a été démontré que l'axiome d'extensionnalité était faux (N-A. Phan, 2021, [2])), l'indexation des sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints d'un ensemble infini dénombrable donné, est donc cruciale en ce qu'elle nous permet de nous assurer de la légitimité d'une partition possible de ce dernier ensemble infini dénombrable.

En effet c'est seulement parce que nous sommes assurés de *partitionner avec légitimité* $\mathbb{N}^*$ en segmentant et en partitionnant une infinité d'intervalles finis de $\mathbb{N}^*$, que nous pouvons être assurés de la légitimité de la partition que nous faisons par l'intermédiaire du **Theoreme 1**, d'un ensemble infini dénombrable donné constitué par l'union d'une infinité de sous-ensembles non-vides, finis ou infinis dénombrables, et disjoints $A = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right]_{\mathcal{P}(A)}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Références

[1] N-A. Phan, *Un premier théorème crucial pour la refondation de la théorie élémentaire des ensembles et l'enseignement de cette discipline pour les futures générations*, (2022). *https* : //*vixra.org*/*abs*/2107.0046

[2] N-A. Phan, *Un théorème fondamental concernant les ensembles infinis dénombrables*, (2021). *https* : //*vixra.org*/*abs*/2107.0046

[3] N-A. Phan, *Equiprobability for any non null natural integer of having either an odd or even number of prime factor(s) counted with multiplicity*, (2021), page 4. *https* : //*vixra.org*/*abs*/2101.0093

Nhat-Anh Phan • *E-mail :* `nhat_anh_phan_math@yahoo.com`