Note Sur Les Surfaces de Référence du Champ de Gravité
- v1, Février 2023 -

Abdelmajid Ben Hadj Salem

9 février 2023

Résidence Bousten 8, Bloc B, Rue Mosquée Raoudha,
1181 Soukra Raoudha, Tunisia
E-mail : abenhadjsalem@gmail.com

Abstract

The object of this note is to present the equation of the surface which defines the equipotential field of gravity $U = U_0$ for certain models of the normal potential of gravity U.

Résumé

L'objet de cette note est de présenter l'équation de la surface qui définit le champ équipotentiel de pesanteur $U = U_0$ pour certains modèles du potentiel normal de gravité U.

Keywords : Champ de gravité, potentiel de pesanteur, surface équipotentielle, sphéroide de Bruns, sphéroide de Helmert.

Table des matières

FIGURE 1 – Helmut Moritz (1933-2022)

Note Sur Les Surfaces de Référence du Champ de Gravité - V1, Février 2023 -

A la Mémoire du Professeur Helmut Moritz (1933-2022)

1 Introduction

Cette note est un hommage à l'éminent professeur de géodésie Helmut Moritz qui nous a quitté en octobre 2022. L'objet de cette note est de donner l'équation de la surface Γ qui définit le champ équipotentiel de pesanteur $U = U_0$ pour certains modèles du potentiel normal de gravité U. Nous commençons par un rappel des définitions.

Le phénomène fondamental qui régit la forme de la Terre est la pesanteur. Elle est le résultat de l'attraction newtonienne du corps terrestre et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre autour de son axe. Voyons ce-ci en détail.

Soit le repère $OXYZ$ tel que O soit le centre de gravité de la Terre (de masse m') et OZ son axe de rotation. Le plan OXZ contient le méridien de Greenwich. Soit un point $M(X, Y, Z)$ de masse unité.

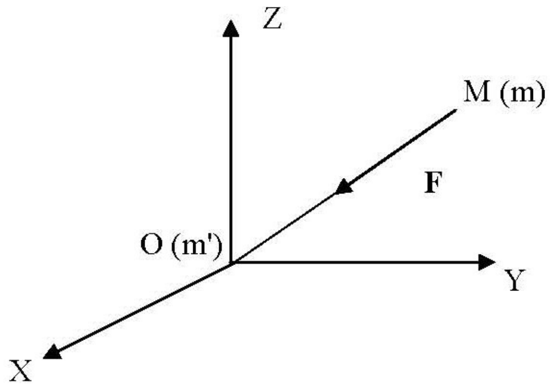

FIGURE 2 – Le Repère 3D

1.1 Le Champ du Potentiel

On appelle champ du potentiel la fonction scalaire V définie par :

$$V = \frac{Gmm'}{r} = V(X, Y, Z) \tag{1}$$

où G est la constante universelle de gravitation.

1.1.1 Gradient

On appelle gradient d'une fonction scalaire $U(X, Y, Z)$ le vecteur noté $\boldsymbol{grad}U$ et de composantes :

$$\boldsymbol{grad}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial Z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Exemple 1 : $U = X^2 + Y^2 + Z^2$, $\boldsymbol{grad}\,U$ est le vecteur de composantes :

$$\boldsymbol{grad}U = (2X, 2Y, 2Z)^T = \begin{pmatrix} 2X \\ 2Y \\ 2Z \end{pmatrix} \tag{3}$$

où T désigne transposé.

Exemple 2 :

$$U = \frac{1}{r} \tag{4}$$

comme :

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \Longrightarrow 2rdr = 2XdX + 2YdY + 2ZdZ$$

d'où :

$$\boldsymbol{grad}U = \left(\frac{-X}{r^3}, \frac{-Y}{r^3}, \frac{-Z}{r^3}\right)^T \tag{5}$$

Si on pose :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{6}$$

Alors :

$$\mathbf{grad}U = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{7}$$

Calculons le gradient de la fonction scalaire donnée par l'équation (1) c'est-à-dire le champ du potentiel V. En utilisant l'exemple 2., on a :

$$\mathbf{grad}V = \mathbf{grad}\left(\frac{Gmm'}{r}\right) = Gmm'\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -Gmm'\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{8}$$

Remarquons si on pose :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{9}$$

On a $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire porté par $\boldsymbol{OM}$ et dans la direction $\boldsymbol{OM}$. L'expression de la force $\boldsymbol{F}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{n} = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n} \tag{10}$$

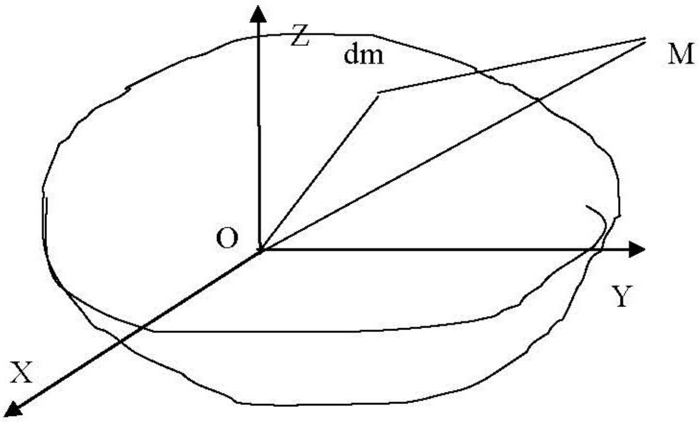

FIGURE 3 – Le Potentiel

comme :

$$\boldsymbol{grad}V = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n} \tag{11}$$

D'où :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad}V \tag{12}$$

On dit que la force $\boldsymbol{F}$ dérive du champ de potentiel V.

1.2 Le Champ Réel ou Champ du Potentiel de la Pesanteur

Soit un point $M(X,Y,Z)$ de masse unité est soumis au potentiel V de gravitation et au potentiel Φ de la force centrifuge due à la rotation de la terre.

L'expression de V est :

$$V = G\iiint_{Terre}\frac{dm'}{r} \tag{13}$$

Malheureusement, cette expression n'est pas calculable car nous ignorons la distribution des masses à l'intérieur de la Terre. L'expression du potentiel Φ de la force centrifuge est donnée par :

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2\left(X^2+Y^2\right) \tag{14}$$

où ω est la vitesse de la rotation de la Terre.

Définition 1.1: Le Potentiel du Champ

On appelle W le potentiel du champ réel ou le potentiel de la pesanteur la somme des potentiels V et Φ :

$$W = V + \Phi \tag{15}$$

Définition 1.2: Vecteur de Gravité

On appelle vecteur de gravité le vecteur $\boldsymbol{g}$ tel que :

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{grad}\, W \tag{16}$$

$g = \|\boldsymbol{g}\|$ mesure la gravité ou la pesanteur, a la dimension d'une accélération et exprimée en m/s^2(Unité Système International) ou en cm/s^2 ($1cm/s^2 = 1gal$ en hommage à Galilée). g mesure 978 $gals$ à l'équateur et 983 $gals$ aux pôles.

2 Présentation des Coordonnées Ellipsoïdiques ou de Jacobi

Soit $E(a,b)$ ou $E(a,e)$ l'ellipsoïde de référence où a,b,e désignent respectivement le demi-grand axe, le demi-petit axe et la première excentricité. Un point M est défini par ses coordonnées tridimensionnelles (X,Y,Z) dans un repère orthonormé $\mathscr{R}(O,e_1,e_2,e_3)$ ou $\mathscr{R}(O,X,Y,Z)$. On considère une famille d'ellipsoïdes de demi-petit axe $u, u>0$, de demi-grand axe $\sqrt{u^2+\epsilon^2}$, avec :

$$\epsilon^2 = a^2 - b^2 \tag{17}$$

Le point M appartient à l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{X^2+Y^2}{u^2+\epsilon^2} + \frac{Z^2}{u^2} = 1 \tag{18}$$

Soit ϕ l'angle $\angle(OM, OM')$ (Fig.**??**) appelé la latitude réduite correspondante au point M, on a alors :

$$sin\phi = \frac{HM'}{OM'} = \frac{HM'}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}} \tag{19}$$

Par définition de l'ellipse méridienne passant par M, on a le rapport d'affinité :

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}} = \frac{HM}{HM'} \Longrightarrow HM = \frac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}.HM' \tag{20}$$

D'où :

$$sin\phi = \frac{HM'}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}.\frac{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}{u}.HM = \frac{HM}{u} \tag{21}$$

Soit :

$$Z = HM = u.sin\phi \tag{22}$$

Et :

$$X = OH.cos\lambda = OM'cos\phi.cos\lambda \tag{23}$$

$$Y = OH.sin\lambda = OM'cos\phi.sin\lambda \tag{24}$$

En résumé, on a les coordonnées du point M exprimées en fonction des coordonnées de Jacobi (u,ϕ,λ).

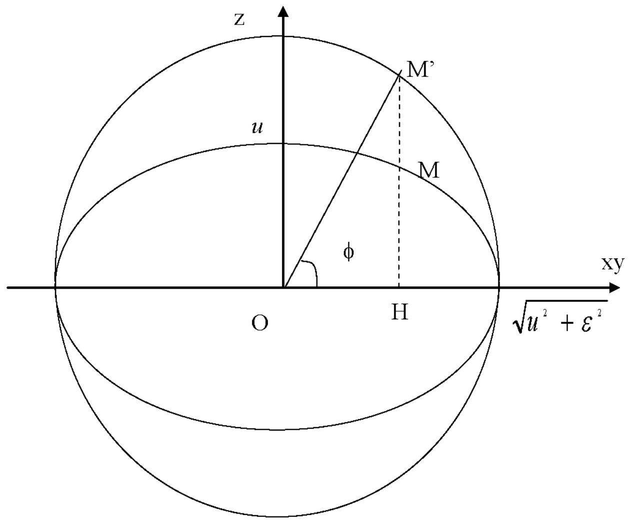

FIGURE 4 – Les Coordonnées de Jacobi

Définition 2.1: Les Coordonnées de Jacobi

Les coordonnées de Jacobi d'un point M sont définies comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} X = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi cos\lambda \\ Y = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi sin\lambda \\ Z = u.sin\phi \end{array} \right. \tag{25}$$

avec $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in \mathbb{R}^*$. Si $u = b$, on retrouve l'équation de l'ellipsoïde de référence E :

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \tag{26}$$

3 Le Premier Modèle : Le modèle sphérique

Pour ce modèle on ne considère pas le potentiel Φ, on a donc :

$$U = \frac{Gm'}{r} \quad m' \text{ masse de la Terre} \tag{27}$$

Si on fixe le rayon de la sphère à R_0, on obtient $U_0 = \dfrac{Gm'}{R_0}$, alors la surface équipotentielle du champ de pesanteur est la sphère d'équation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R_0^2 = \frac{G^2 m'^2}{U_0^2} \tag{28}$$

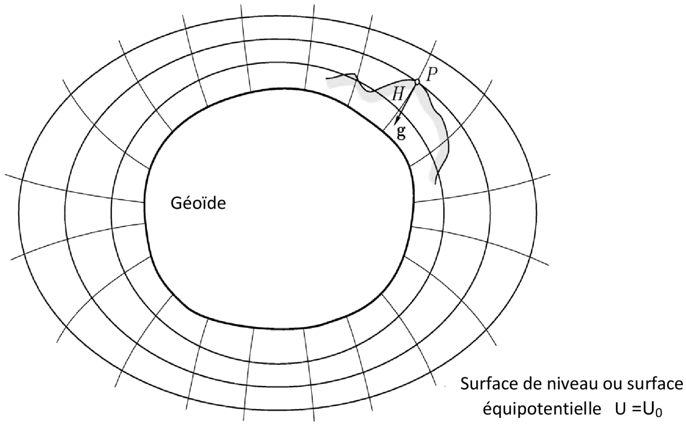

FIGURE 5 – Les surfaces équipotentielles $U = U_0$ [1]

4 Le Deuxième Modèle : Le modèle sphérique + le potentiel Φ

On a alors :

$$U = \frac{Gm'}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\left(X^2+Y^2\right)$$

La surface équipotentielle du champ de pesanteur U_0 est définie par :

$$\frac{Gm'}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\left(X^2+Y^2\right) = U_0 \tag{29}$$

qu'on écrit sous la forme :

$$G^2m'^2 = (X^2+Y^2+Z^2)\left(U_0 - \frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2)\right)^2 \tag{30}$$

C'est une surface polynômiale de **degré 6**.

$$H(X,Y,Z) = (X^2+Y^2+Z^2)\left(\frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2) - U_0\right)^2 - G^2m'^2 = 0 \tag{31}$$

5 Le Troisième Modèle : Le Sphéroide de Bruns

Pour ce modèle appelé sphéroide de Bruns [1] ([1], page 81, [2]), on considère le potentiel normal U du champ de pesanteur qui donné par la formule :

$$U = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_2}{r^2} + \frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2) \tag{32}$$

1. H. Bruns (1848-1919) : un mathématicien et astronome allemand. Il s'est spécialisé notamment dans la géodésie théorique.

où Y_0, Y_2 sont les harmoniques sphériques de surface d'ordre 0 et 2 (voir [1],pages 30-31). L'équation de la surface équipotentielle du potentiel normal $U = U_0$ est donnée en détail (voir [1],page 82) par :

$$\frac{Gm'}{r} + \frac{G}{2r^5}\left[(B+C-2A)X^2 + (C+A-2B)Y^2 + (A+B-2C)Z^2\right] + \frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2) = U_0$$

avec A, B, C les moments d'inertie principaux de la Terre relatives aux axes OX, OY et OZ. De l'équation précédente on obtient l'équation de la surface équipotentielle U_0 sous la forme :

$$H(X,Y,Z) = 4(X^2+Y^2+Z^2)^5\left[\frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2) - U_0\right]^2$$

$$-G^2\left[2m'(X^2+Y^2+Z^2)^2 + \left[(B+C-2A)X^2 + (C+A-2B)Y^2 + (A+B-2C)Z^2\right]\right]^2 = 0$$

On obtient que $H(X,Y,Z)$ est une fonction polynômiale de **degré 14** en X, Y, Z.

6 Le Quatrième modèle : le Sphériode de Helmert

Pour ce modèle de Helmert [2] [3], je laisse à titre d'exercice au lecteur la détermination de l'équation de la surface équipotentielle du potentiel normal $U = U_0$. On donne (voir [1], page 73) :

- $U = \dfrac{Gm'}{r}\left[1 - J_2\dfrac{a^2}{r^2}P_2(cos\theta) - J_4\dfrac{a^4}{r^4}P_4(cos\theta)\right] + \dfrac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2)$. a, J_2, J_4 sont des constantes.
- $P_0(t) = 1,\ P_1(t) = t,\ P_2(t) = \dfrac{3t^2-1}{2},\ P_3(t) = \dfrac{5t^3-3t}{2},\ P_4(t) = \dfrac{35t^4-30t^2+3}{8}$,

On rapelle les formules des coordonnées sphériques :

$$M = \left| \begin{array}{l} X = rsin\theta cos\lambda \\ Y = rsin\theta sin\lambda \\ Z = rcos\theta \end{array} \right. \tag{33}$$

Par suite, on obtient : $cos\theta = \dfrac{Z}{r} = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.

Montrer que l'équation de la surface équipotentielle du potentiel normal $U = U_0$ est une fonction polynômiale de **degré 22** en X, Y, Z.

Février 2023

2. F.R. Helmert (1843-1917) : Géodésien et statisticien allemand avec importante contribution à la théorie des erreurs.

Références

[1] **W.A. Heiskanen & H. Moritz**. 1967. *Physical Geodesy.* Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria. 364p.

[2] **F.R. Helmert**. 1884. *Die Mathematischen Und Physikalischen Theorieen Der Höhereen Geodäsie*, **vol.2**. Leipzig, B.G. Teubner (reprinted 1962).

[3] **H. Bruns**. 1878. *Die Figur der Erde*. Berlin, Publ. Preuss. Geod. Inst.

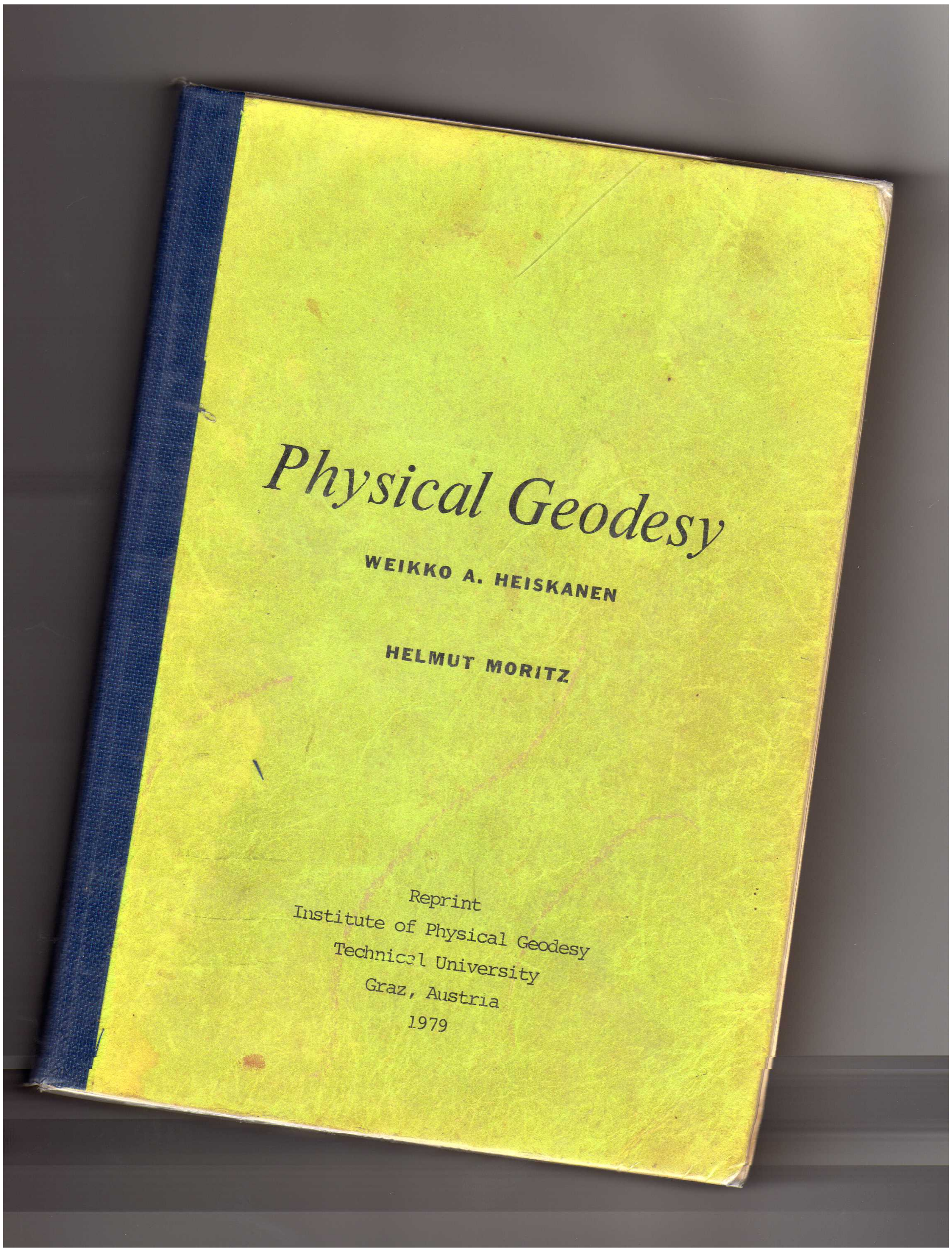

FIGURE 6 – L'ouvrage de référence de la Géodésie Physique par **Helmut Moritz** depuis 1967 !