FLUID DYNAMICS EQUATIONS, A POSSIBLE ANALYTICAL SOLUTION.

Guillermo Ayala-Martínez

ABSTRACT

Fluid equations have practical importance in aeronautical and naval engineering, and in meteorology. An analytical solution is proposed, that reduces the equations to a single equation and also to heat equation, the solutions of the one-dimensional equation allows obtaining analytical solutions in two and three dimensions. Analytical solutions allow a better understanding of fluids in motion.

ECUACIONES DE LA DINAMICA DE LOS FLUIDOS, UNA POSIBLE SOLUCIÓN

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de los fluidos, ecuaciones de Navier-Stokes, pueden reducirse a una única ecuación y también a la ecuación del calor para obtener soluciones en dos y tres dimensiones. La dinámica de los fluidos tiene aplicaciones prácticas en ingeniería aeronáutica, naval y Meteorología, por esto son importantes las soluciones analíticas para entender mejor el movimiento de los fluidos.

I. Ecuaciones de Navier-Stokes 2D, fluido viscoso e incompresible.

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + n\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$$

(2) $$\frac{\partial v}{\partial t} + u.\frac{\partial v}{\partial x} + v.\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + n\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v$$

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(4) Si $s = A.x + B.y$ con A, B constantes

(5) $\frac{\partial u}{\partial x} = A.\frac{\partial u}{\partial s}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = B.\frac{\partial u}{\partial s}$ y sustituyendo en (1):

(6) $$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0\,.\frac{\partial u}{\partial s} = -A\frac{\partial p}{\partial s} + n(A^2 + B^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(7) Con U_0 =A.u+B.v U_0 es constante respecto a s

(8) $\frac{\partial U_0}{\partial s} = (Au_s + Bv_s) = (u_x + v_y) = 0$ ecuación de continuidad

Con la ecuación (2) igual resultado cambiando u por v.

Podemos resumirlo en una sola ecuación:

(9) $$\frac{\partial U}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial U}{\partial s} = -E.\frac{\partial P}{\partial s} + \mathrm{n}(A^2 + B^2)\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$$

(10) $\mathrm{U} = \mathrm{u}, \mathrm{v} \quad \mathrm{E} = \mathrm{A}, \mathrm{B}$

De este modo se han reducido las ecuaciones (1), (2), (3) a una sola ecuación lineal. Con las soluciones de la ecuación reducida se pueden encontrar las soluciones de las ecuaciones de N-S en 2D.

II. Ecuaciones de Navier Stokes 3D, fluido viscoso e incompresible.

La ecuación reducida es:

(11) $$\frac{\partial U}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial U}{\partial s} = -E.\frac{\partial P}{\partial s} + \mathrm{n}(A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial^2 U}{\partial\, s^2}$$

(12) $\mathrm{U}=\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \quad \mathrm{E}=\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$

La demostración es la misma que en dos dimensiones.

III. Como resolver la ecuación reducida

La ecuación (9) se desdobla en dos ecuaciones:

(13) $$\frac{\partial U}{\partial t} - \mathrm{n}(A^2 + B^2)\frac{\partial^2 U}{\partial\, s^2} = \phi$$

(14) $$(\mathrm{E}\frac{\partial p}{\partial s} + U_0 \frac{\partial U}{\partial s}) = -\phi$$

(15) $\phi=\phi(\mathrm{t}, \mathrm{s})$

La función ϕ no es arbitraria pues debe satisfacer las condiciones de contorno e iniciales de la componente de U correspondiente, lo mismo con las constantes A, B, C.

La ecuación (13) es la ecuación del calor, de la que se conocen diversas soluciones. Una vez resuelta, la solución de (14) no debe tener dificultad alguna.

IV. Una cuestión matemática.

¿Puede haber soluciones en las que haya aumento ilimitado en el tiempo? La respuesta es NO porque la ecuación reducida depende de la ecuación del calor, siendo imposible por su naturaleza física.

En cuanto al fenómeno de *la turbulencia* está el hecho que las ecuaciones de N-S se basan en hipótesis simplificadas, no incluyen fenómenos, posiblemente a pequeña escala, que sí son físicamente importantes.

VI. Bibliografía.

Puig Adam. Ecuaciones diferenciales, Edit. Roberto Puig 1980.

William F. Hughes. Ph D. and John Brigton D. Fluid Dynamics Mc G. H.

Guillermo Ayala-Martínez, Procedure to solve N-S equations viXra

Charles L. Fefferman, Existence and Smoothnees of the Navier-Stokes Equation.