УДК 512.1

Разность квадратов нечётных чисел и гипотеза Била

Ведерников Сергей Иванович, *пенсионер*

РФ, г. Москва

Аннотация. Цель работы – доказательство гипотезы Била. Доказательство основано на методах, не используемых в настоящее время элементарной математикой. Понятие о них отсутствует в справочных источниках. Во – первых это представление о возможности выражения чётного числа, имеющего множитель 8 разностью квадратов двух нечётных чисел. Кроме того, применена особенность целочисленного решения квадратного уравнения пифагоровыми тройками. В результате полностью доказана гипотеза Била, с учётом сопутствующей Последней теоремы Ферма, простыми методами.

Ключевые слова: разность квадратов двух нечётных чисел, разложение на множители, чётные числа, нечётные числа, пифагоровы тройки.

Proof. Beal's hypothesis.

Vedernikov Sergey Ivanovich, pensioner

Russian Federation, Moscow

Annotation. The purpose of this work is to prove Beal's conjecture. The proof is based on methods not currently used by elementary mathematics. The concept of them is absent in the reference sources. Firstly, this is an idea of the possibility of expressing an even number that has a factor of 8 by the difference of the squares of two odd numbers. In addition, a feature of the integer solution of the quadratic equation by Pythagorean triples is applied. As a result, Beale's conjecture was completely proved, taking into account the accompanying Fermat's Last Theorem, by simple methods. Keywords: difference of squares of two odd numbers, factorization, even numbers, odd numbers, Pythagorean triples.

Доказательство.

Посыл. Примем за основу утверждение, что любое чётное число, имеющее множителем 2^n при n $\geq$ 3, можно выразить разностью квадратов двух нечётных чисел.

Чётное число при $n \geq 3$ содержит множителем число 8. Сумма и разность двух нечётных чисел числа чётные, но одно из них имеет множителем только одно число 2, а второе – минимум 2^2, а в общем случае $2^{(n-1)} \cdot k^n$, где $2 \cdot 2^{(n-1)} = 2^n$ при n > 2 есть множитель чётного числа, выраженного произведением этой суммы и этой разности. Рассмотрим детальнее этот посыл.

Имеется два нечётных числа: $(2 \cdot k_1 + 1)$ и $(2 \cdot k_2 + 1)$, сумма которых есть $(2 \cdot k_1 + 1 + 2 \cdot k_2 + 1) = 2 \cdot (k_1 + k_2 + 1)$, где $2 \cdot (k_1 + k_2 + 1)$ «сумма» в дальнейшем, а разность $(2 \cdot k_1 + 1 - 2 \cdot k_2 - 1) = 2 \cdot (k_1 - k_2)$, где $2 \cdot (k_1 - k_2)$ «разность» в дальнейшем. Поскольку k_1 и k_2 могут быть любой чётности, рассмотрим все возможные случаи их сочетаний.

Случай 1. $k_1 > k_2$ - чётные.

Рассмотрим формулу «суммы», где $k_1 = 2 \cdot k_3$, а $k_2 = 2 \cdot k_4$. $2 \cdot (k_1 + k_2 + 1) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 + 2 \cdot k_4 + 1)$.

Итак, сумма нечётных чисел $(2 \cdot k_1 + 1)$ и $(2 \cdot k_2 + 1)$ при чётных k_1 и k_2 имеет только один множитель 2.

Рассмотрим формулу «разности» при чётных $k_1 = 2 \cdot k_3$ и $k_2 = 2 \cdot k_4$. $2 \cdot (k_1 - k_2) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 - 2 \cdot k_4) = 4 \cdot (k_3 - k_4)$.

Следовательно, разность нечётных чисел $(2 \cdot k_1 + 1)$ и $(2 \cdot k_2 + 1)$ при чётных k_1 и k_2 содержит множителем минимум число 4.

Случай 2. k_1 и k_2 – нечётные, $k_1 = (2 \cdot k_3 + 1)$; $k_2 = (2 \cdot k_4 + 1)$. «Сумма» выглядит так: $2 \cdot (k_1 + k_2 + 1) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 + 1 + 2 \cdot k_4 + 1 + 1) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 + 2 \cdot k_4 + 3)$. Сумма в этом случае имеет множителем только одно число 2.

Рассмотрим формулу «разности»: $2 \cdot (k_1 - k_2) = 2(2 \cdot k_3 + 1 - 2 \cdot k_4 - 1) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 - 2 \cdot k_4) = 4(k_3 - k_4)$. То есть разность содержит множителем минимум число 4.

Случай 3. k_1 – чётное, k_2 – нечётное. $k_1 = 2 \cdot k_3$; $k_2 = (2 \cdot k_4 + 1)$. «Сумма»: $2 \cdot (k_1 + k_2 + 1) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 + 2 \cdot k_4 + 1 + 1) = 4 \cdot (k_3 + k_4 + 1)$. Множитель суммы минимум число 4.

«Разность»: $2 \cdot (k_1 - k_2) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 - 2 \cdot k_4 - 1)$. Множитель - одно число 2.

Случай 4. k_1 – нечётное $(2 \cdot k_3 + 1)$; k_2 – чётное $(2 \cdot k_4)$. «Сумма»: $2 \cdot (k_1 + k_2 + 1) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 + 1 + 2 \cdot k_4 + 1) = 4 \cdot (k_3 + k_4 + 1)$.
Множитель минимум число 4.

«Разность»: $2 \cdot (k_1 - k_2) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 + 1 - 2 \cdot k_4) = 2 \cdot (2 \cdot k_3 - 2 \cdot k_4 + 1)$. Множитель – одно число 2.

Итак, посыл обоснован.

Особое место при этом занимает уравнение $X^2 + Y^2 = Z^2$, где квадрат чётного числа пифагоровой тройки, имеющей множителем число 4, можно выразить числом, содержащим множитель $4^2 = 2^4$. То есть случаи целочисленных решений уравнения $X^2 + Y^2 = Z^2$ попадают под выше обозначенное условие о разложении разности квадратов двух нечётных чисел на произведение суммы и разности этих чисел. Строго говоря, формула $X^2 + Y^2 = Z^2$ для простейшей пифагоровой тройки должна выглядеть так: $X^2 + 2^4 \cdot Y_1^2 = Z^2$, подразумевая Y чётным числом, а именно: $Y = 2^2 \cdot Y_1$.

Рассмотрим порядок выделения множителей числа Y^n и целых чисел Z, X пифагоровой тройки (5, 12, 13). [1]

Имеем: $X^2 + Y^2 = Z^2 \leftrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$. Преобразуем данное выражение и разложим на множители.

$$Z^2 - X^2 = Y^2 \leftrightarrow 13^2 - 5^2 = 12^2. \quad (2)$$

$$Z + X = Y_1 \leftrightarrow 13 + 5 = 18. \quad (3)$$

$$\mathrm{Z} - X = Y_2 \leftrightarrow 13 - 5 = 8. \quad (4)$$

Сложим почленно ф. (4) и ф. (3).

$$2 \cdot Z = Y_1 + Y_2 \leftrightarrow 18 + 8 = 26, \quad Z = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \leftrightarrow \frac{2 \cdot (9+4)}{2} = (3^2 + 2^2) = 13. \quad (5)$$

Вычтем почленно ф. (4) из ф. (3).

$$2 \cdot X = Y_1 - Y_2 \leftrightarrow 18 - 8 = 10, \quad X = \frac{Y_1 - Y_2}{2} \leftrightarrow \frac{2 \cdot (9-4)}{2} = (3^2 - 2^2) = 5. \quad (6)$$

Из ф. (5) и ф. (6) видно, что первое нечётное число Z является половиной суммы множителей (Z+X) + (Z-X), а второе нечётное число X – половиной разности множителей (Z + X) – (Z – X). Рассмотрим близкий вариант квадратному уравнению с одинаковым показателем n > 2, что является темой Теоремы Ферма.

Имеется: $X^n + Y^n = Z^n$. X, Y, Z, n – натуральные числа, X, Y, Z – взаимно простые числа, n > 2 .

Доказать: уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ (1) не имеет решений в целых числах.

Пусть Z > X > Y. Определимся с чётностью чисел X, Y и Z. То есть: два из этих чисел должны быть нечётными, а одно чётным. Пусть X и Z нечётные числа, а Y чётное число, поскольку особой разницы между числами X и Y нет. Выразим общую формулу этого разложения, соответствующую посылу.

$$c^2 - a^2 = b^n = (c+a)(c-a) = (2 \cdot b_1^n) \cdot (2^{(n-1)} \cdot b_2^n).$$

Вариантов разложения чётного числа в степени n≥ 3 по формуле разности квадратов двух нечётных чисел может быть столько, сколько возможно сочетаний пар множителей числа, удовлетворяющих этому условию, однако для каждой пары возможен только один вариант такого разложения. И множители разложения не должны иметь общего делителя, кроме числа 2. То есть сопутствующие множители числам 2 и $2^{(n-1)}$ должны быть в степени n при соблюдении условия о взаимно простых X, Y, Z. (При этом надо заметить, что значения множителей разложения могут быть противоположными.)

Как уже было условлено, чётным числом в уравнении (1) является Y. <u>Имеются два случая соответствующие чётному Y: это чётное n уравнения (1),</u> нечётное n уравнения (1). Третий случай - чётное Z. Выразим каждый из этих случаев соответствующей формулой.

Чётное n: $Z^n - X^n = (Z^{\frac{n}{2}})^2 - (X^{\frac{n}{2}})^2 = Y^n = (a_1^2 - b_1^2).$ (1b)

Нечётное n: $Z^{(2n+1)} - X^{(2n+1)} = Y^{(2n+1)} = (a_2^2 - b_2^2).$ (2b)

Чётное Z и нечётное n: $X^{(2n+1)} + Y^{(2n+1)} = Z^{(2n+1)} = (a_3^2 - b_3^2).$ (3b)

Случай с чётным n и чётным Z не имеет решений, как сумма двух полных квадратов, не равных третьему квадрату.

Рассмотрим уравнение (1b) как самый наглядный пример доказательства.

$$Y^n = (a_1^2 - b_1^2) = (Z^{\frac{n}{2}})^2 - (X^{\frac{n}{2}})^2 = \left(Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}}\right)\left(Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}}\right), \text{ где}$$

$$\left(Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}}\right) = 2 \cdot Y_1^n, \quad (4b) \qquad \left(Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}}\right) = 2^{(n-1)} \cdot Y_2^n. \quad (5b)$$

Сложим правые, отдельно, и левые, отдельно, части уравнений (4b) и (5b).

$$2 \cdot Z^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_1^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_2^n. \qquad Z^{\frac{n}{2}} = Y_1^n + 2^{(n-2)} \cdot Y_2^n. \quad (6b)$$

Вычтем из левой части уравнения (4b) правую часть уравнения (5b), а из правой части – правую часть уравнения (5b).

$$2 \cdot X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_1^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_2^n. \qquad X^{\frac{n}{2}} = Y_1^n - 2^{(n-2)} \cdot Y_2^n. \qquad (7b)$$

Рассматривая правую часть уравнения (6b) и правую часть уравнения (7b), как варианты формул суммы и разности n – х степеней, и их разложение на множители, приходим к выводу, что $Z^{\frac{n}{2}}$ и $X^{\frac{n}{2}}$, а так же Z^n и X^n не есть степени целых чисел, то есть число Y^n уравнения (1b) так же не может быть степенью целого числа. Для наглядности разложим уравнение (7b).

$$X^{\frac{n}{2}} = (Y_1 - \sqrt[n]{2^{(n-2)}} \cdot Y_2) \cdot (Y_1^{(n-1)} + \cdots + 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{n}} \cdot Y_2^{(n-1)}).$$

Соответствие левых и правых частей уравнений (2b) и (3b), поясним разложив левую часть уравнения (2b) как разность кубов двух нечётных чисел.

$$Z^3 - X^3 = (Z - X)(Z^2 + Z \cdot X + X^2) = Y^3.$$

Здесь число Y^3 - чётное, произведение чисел чётного $(Z - X)$ и нечётного $(Z^2 + Z \cdot X + X^2)$. В одинаковой степени это относится к разности и сумме нечётных n – х степеней, имея ввиду уравнения (2b) и (3b). С другой стороны $Y^{(2n+1)}$ уравнения (2b) равно разности квадратов нечётных чисел: $a_2^2 - b_2^2 = (a_2 + b_2)(a_2 - b_2)$, т. е. произведению двух чётных чисел. Имеем:

$$Z^{(2n+1)} - X^{(2n+1)} = Y^{(2n+1)} = a_2^2 - b_2^2. \qquad (8b)$$

Разложим правую часть уравнения (8b) на множители.

$$Y^{(2n+1)} = a_2^2 - b_2^2 = (a_2 + b_2)(a_2 - b_2).$$

Примем далее:

$$(a_2 + b_2) = 2 \cdot Y_3^{(2n+1)}, \quad (9b) \qquad (a_2 - b_2) = 2^{2n} \cdot Y_4^{(2n+1)}. \quad (10b)$$

Сложим левые, отдельно, и правые, отдельно, части уравнений (9b) и (10b).

$$2\cdot a_2 = 2\cdot Y_3^{(2n+1)} + 2^{2n}\cdot Y_4^{(2n+1)};\quad a_2 = Y_3^{(2n+1)} + 2^{(2n-1)}\cdot Y_4^{(2n+1)}.\quad (11b)$$

Вычтем из левой части уравнения (9b) левую часть уравнения (10b), а из правой части уравнения (9b) правую часть уравнения (10b).

$$2\cdot b_2 = 2\cdot Y_3^{(2n+1)} - 2^{2n}\cdot Y_4^{(2n+1)};\quad b_2 = Y_3^{(2n+1)} - 2^{(2n-1)}\cdot Y_4^{(2n+1)}.\quad (12b)$$

Разложим уравнение (12b) как вариант формулы разности n – x степеней.

$$b_2 = \left(Y_3 - 2^{\frac{(2n-1)}{(2n+1)}}\cdot Y_4\right)\cdot\left(Y_3^{2n} + \cdots + 2^{\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)}}\cdot Y_4^{2n}\right).\quad (13b)$$

Итак, второе нечётное число уравнения (2b) невозможно разложить на целые множители, оно не является степенью целого числа. Тот же результат следует и для первого нечётного числа. Это значит, что число $Y^{(2n+1)}$ не является степенью целого числа. То же самое это означает и для слагаемых левой части уравнения (8b). Т. е. $Z^{(2n+1)}$ и $X^{(2n+1)}$ не есть степени целых чисел.

Для примера произведём разложение на множители числа 12^3.

$$12^3 = 3^3\cdot 4^3 = 3^3\cdot(2^3\cdot 2^3) = (2\cdot 3^3)\cdot(2^2\cdot 2^3) = 54\cdot 32.$$

Согласно ф. (5) $\frac{2\cdot 3^3+2^2\cdot 2^3}{2} = 2\cdot\frac{3^3+2\cdot 2^2}{2} = 3^3 + 2\cdot 2^3 = 43.$ (1 – е число)

Согласно ф. (6) $\frac{(2\cdot 3^3-2^2\cdot 2^3)}{2} = 2\cdot\frac{3^3-2\cdot 2^3}{2} = 3^3 - 2\cdot 2^3 = 11.$ (2 – е число)

$$12^2 = 43^3 - 11^2 = (43+11)(43-11) = 54\cdot 32.$$

Это общее правило разложения на множители любого чётного числа в степени n>2 по формуле разности квадратов двух нечётных чисел, если множители разложения не имеют общего делителя кроме чисел 2 и $2^{(n-1)}$, а вторые составляющие этих множителей должны быть в степени n. В противном случае числа уравнения (1) имели бы общий делитель.

Рассмотрим уравнение (3b), где $X,\ Y$ нечётные, Z – чётное, n – нечётное.

Разложим левую часть уравнения на множители.

$$(X+Y)(X^{2n}-\cdots+Y^{2n})=Z^{(2n+1)}=(a_3+b_3)(a_3-b_3). \quad (14b)$$

В уравнении (14b) чётное $Z^{(2n+1)}$ равно произведению чётного множителя $(X+Y)$ и нечётного $(X^{2n}-\cdots+Y^{2n})$, как суммы нечётных слагаемых. Тем самым рассмотрение уравнения (3b) соответствует рассмотренному выше доказательству уравнения (2b), т. е. уравнение (3b) не имеет решения в целых числах, как и уравнение (1) в общем виде. То есть Теорема Ферма доказана.

Вернёмся к пифагоровым тройкам из-за особенности этого частного случая уравнения общего вида, основанного на целочисленных их решениях в квадратном уравнении. Рассмотрим тот же вариант (5, 12, 13), упомянутый ранее, где было показано, что квадратное уравнение $X^2+Y^2=Z^2$ для неё может выглядеть так при $Y^2=4^2\cdot Y_1^2=2^4\cdot Y_1^2=2^2\cdot 2^2\cdot Y_1^2=2^2\cdot 2^2\cdot 3^2$.

$$Z^2-X^2=Y^2 \leftrightarrow 13^2-5^2=2^2\cdot 2^2\cdot 3^2. \quad (1a)$$

Разложим уравнение (1a) на множители.

$$Z+X=Y_2 \leftrightarrow 13+5=2\cdot 3^2. \quad (2a)$$

$$Z-X=Y_3 \leftrightarrow 13-5=2\cdot 2^2. \quad (3a)$$

В результате, один множитель 2^2 чётного числа Y поделен пополам между множителями разложения Y_2 и Y_3. Т. е. уравнение (1a) можно записать так:

$$Z^2-X^2=2^2\cdot Y_4^2 \leftrightarrow 13^2-5^2=2^2\cdot 6^2=2^2\cdot(2^2\cdot 3^2). \quad (4a)$$

И «чудесным» образом получается, что при квадратном множителе $(2^2\cdot 3^2)$ появился дополнительный множитель 2^2, который при выделении нечётных чисел разности квадратов Z и X теряется. (См. (5) И (6).) Т. е. «потеря лишнего» числа 2^2 обеспечила целочисленное решение пифагоровой тройки, а нечётные числа Z, X явились результатом суммы и разности квадратов второго множителя уравнения (4a). Тот же результат: потеря числа 2^2, наблюдается при разложении на множители уравнения (1) для чётных и нечётных, отдельно, показателей n. (См. пример 12^3.) Предположим, что для целочисленного решения уравнения (1), при чётном n>2, чётному Y^n нужно добавить множитель 2^2. А именно:

$$Z^n - X^n = 2^2 \cdot Y^n. \quad (5a)$$

Разложим на множители уравнение (5а).

$$Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_5^n; \quad (6a) \qquad Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot 2^n \cdot Y_7^n = 2 \cdot Y_6^n. \quad (7a)$$

В уравнении (6а) число Y_5^n нечётное, а число $Y_6^n = 2^n \cdot Y_7^n$ чётное. Сложим левые, отдельно, и правые, отдельно, части формул (6а) и (7а).

$$2 \cdot Z^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_5^n + 2 \cdot 2^2 \cdot Y_7^n. \qquad Z^{\frac{n}{2}} = Y_5^n + 2^n \cdot Y_7^n = Y_5^n + Y_6^n. \quad (8a)$$

Вычтем из левой части ф. (6а) левую часть ф.(7а), а из правой части ф.(6а) правую часть ф.(7а).

$$2 \cdot X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_5^n - 2 \cdot 2^n \cdot Y_7^n. \qquad X^{\frac{n}{2}} = Y_5^n - 2^n \cdot Y_7^n = Y_5^n - Y_6^n. \quad (9a)$$

Разложим на множители уравнение (9а).

$$X^{\frac{n}{2}} = (Y_5 - Y_6)\left(Y_5^{(n-1)} + \cdots + Y_6^{(n-1)}\right).$$

Очевидно, что уравнения (8а) и (9а) допускают целочисленные решения, и целочисленные решения уравнения (1) возможны только при виде уравнения в следующей форме (при этом, возможно, не только для n = 2):

$$X^n + 2^2 \cdot Y^n = Z^n. \quad (10a)$$

Гипотеза Била.

Утверждается, что гипотеза Эндрю Била – это обобщение уравнения Ферма. Рассмотрим её формулировку.

Если $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, C,\ x, y, z$ есть положительные целые числа при x, y, z≥ 3, тогда A, B, C имеют общий простой множитель.

Эквивалентно:

Уравнение $A^x + B^y = C^z$ не имеет решений в натуральных числах и попарно взаимно простых целых числах $A, B, C,$ если x, y, z≥ 3.

Рассмотрим её доказательство в соответствии с уточнённой формулировкой аналогично вышеизложенному доказательству для теоремы Ферма.

Имеется: $A^x + B^y = C^z$ или $C^z - A^x = B^y$. (1)

В уравнении (1), как и ранее, примем C и A нечётными числами, а B чётным числом. Поскольку показатели степеней всех трёх чисел больше 2, то число B^y можно выразить разностью квадратов двух нечётных чисел. Т. е. формула (1) будет выглядеть так:

$$C^z - A^x = B^y = (B_1^2 - B_2^2) = (B_1 + B_2)(B_1 - B_2). \quad (2)$$

Выразим множители уравнения (2), как соответствующими выражению чётного числа, имеющего множителем число 8.

$$B_1 + B_2 = 2 \cdot B_3^y; \quad (3)$$

$$B_1 - B_2 = 2^{(y-1)} \cdot B_4^y. \quad (4)$$

Сложим левые, отдельно, и правые, отдельно, части уравнений (3) и (4).

$$2 \cdot B_1 = 2 \cdot B_3^y + 2^{(y-1)} \cdot B_4^y; \qquad B_1 = B_3^y + 2^{(y-2)} \cdot B_4^y. \quad (5)$$

Вычтем левую часть уравнения (4) из левой части уравнения (3), а правую часть уравнения (4) из правой части уравнения (3).

$$2 \cdot B_2 = 2 \cdot B_3^y - 2^{(y-1)} \cdot B_4^y; \qquad B_2 = B_3^y - 2^{(y-2)} \cdot B_4^y. \quad (6)$$

Правую часть уравнения (5) можно рассматривать как вариант формулы суммы n – x степеней, а правую часть уравнения (6) как вариант формулы разности n – x степеней. Разложим уравнение (6) на множители.

$$B_2 = (B_3 - \sqrt[y]{2^{(y-2)}} \cdot B_4)(B_3^{(y-1)} + \cdots + 2^{\frac{(y-2)(y-1)}{y}} \cdot B_4^{(y-1)}). \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что разложение уравнений (5) и (6) на целочисленные множители невозможно, а это значит, что число B^y не является произведением целых, рациональных, чисел, вместе с тем и числа C^z и A^x не есть рациональные, значит целочисленное решение уравнения (1) невозможно.

Рассмотрение доказательства с (1) по (8) уравнение достаточно как для чётного показателя (y), так и для нечётного показателя.

(Доказательствами невозможности целочисленных решений уравнения (1) при чётном C^z достаточно считать рассмотренные выше: См. уравнение (3b), а также с (8b) по (13b) доказательства теоремы Ферма).

Таким образом, гипотеза Била, а также Великая теорема Ферма доказаны.

Список литературы.

1. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959.

2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика, Справочные материалы. М.: Просвещение, 1990.