

# Title: Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos

## Abstract

Este documento es un consolidado de todos los experimentos que se han revisado de GR hasta la fecha, resueltos con relatividad especial de campos.

**Autor:** Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.  
Ingeniero Industrial.

**Email:** enrique\_pinos@yahoo.es

Málaga, 26 de Enero de 2024 (revisado: 3 de Mayo de 2024)

## Table of Contents

Introducción.....	1
Lagrangiano: ecuaciones de movimiento.....	2
Regímenes de velocidad.....	3
Factor de Lorentz generalizado.....	4
Bosones (fotones y gravitones).....	4
Fermiones.....	5
Experimentos de relatividad general.....	6
Experimentos con bosones (fotones).....	7
Deflexión de fotones en campo gravitatorio.....	8
Corrimiento al rojo gravitacional: experimento de Pound-Sneider.....	9
Retardo Shapiro: experimento de viking landers.....	11
Experimentos con fermiones.....	13
Precesión del perihelio de mercurio.....	13
Gravity probe b.....	14
Variación temporal en distintos sistemas de referencia: relojes de Maryland.....	16
Predicciones de la teoría.....	17
Anexo I: Ecuación para el redshift.....	18
Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre.....	20
Anexo III: Expresión explícita de la variación de la velocidad.....	20
Anexo IV: Combinación de fuerzas gravitatorias y electromagnéticas.....	23
Referencias.....	24

## Introducción

La relatividad especial de campos (SRF) surge al revisar los experimentos de relatividad general, tratando de explicarlos con una relatividad especial (SR) ‘ligeramente modificada’. El enfoque actual (porque ha tenido muchos cambios de enfoque, que quedan patentes en previos documentos) que es congruente con los 6 experimentos ‘tipo’ revisados, exige un cambio radical en la forma de ver las ecuaciones. Por un lado, la restricción de la componente tangencial de la aceleración concluimos

que depende del tipo de campo en consideración, mientras que el factor de Lorentz (generalizado), depende de la partícula sobre la que se hace el cálculo.

Resumiendo, se concluye que los gravitones tienen distinta velocidad que los fotones, pero su mismo rango; esto es, tienen su propia ecuación de ondas y su propia 'relatividad especial', simplemente cambiando en las fórmulas de relatividad especial la velocidad de la luz, con la de los gravitones. La velocidad de los gravitones se determina en el ajuste con los experimentos.

Precisaremos de otra modificación en las ecuaciones de movimiento, y cambiando también la forma en que se escribe la ecuación de Euler-Lagrange se mantiene la forma del Lagrangiano relativista.

## Lagrangiano: ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) del movimiento de la partícula quedan,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{\vec{v}}{\gamma}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{m\gamma} \left( \vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Nótese la aparición del factor de Lorentz en ambas ecuaciones. Ésta es la ecuación dinámica para la partícula en tiempo del observador.

Se obtiene a partir del Lagrangiano relativista,

$$L = \frac{-c^2}{\gamma} - V.$$

Donde V es el potencial del que derivan las fuerzas.

Mediante la ecuación de Euler-Lagrange,

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = 0, \quad q_i = \{x, y, z\}, \quad v_i = \{v_x, v_y, v_z\}$$

Que se diferencia en que la velocidad que aparece en el Lagrangiano es velocidad en tiempo (propio) de la partícula, y se deriva respecto a esa 'velocidad propia'. Pero el tiempo t representa al tiempo del observador.

Este Lagrangiano nos lleva a la ecuación mecánica,

$$\frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Que podemos despejar en función a la velocidad, quedando las ecuaciones (1), que indicamos al principio.

Nótese que el factor de Lorentz en esa ecuación sirve a dos propósitos. Por un lado, dejar las ecuaciones como en las (1) al expresar la velocidad de manera explícita. Y por otro lado, sirve como factor de escalado temporal. De ahí parte de la confusión en la interpretación del mismo.

Las ecuaciones en tiempo propio serían,

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{v},$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \frac{1}{m} \left( \vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c^2} \right).$$

La primera es la velocidad propia; esto es, la velocidad de la partícula medida en tiempo propio. Mientras que el vector velocidad  $\vec{v}$  dividido por el factor de Lorentz, representa la velocidad en tiempo del observador.

Para resolver un sistema dinámico, como el sistema solar, debemos expresar todas las ecuaciones en tiempo del observador. El tiempo del observador simplemente permite expresar las ecuaciones de movimiento respecto a un sistema de referencia común, respecto al que se han medido las velocidades y posiciones de cada partícula, y se ha referido el potencial de referencia.

Para el caso de movimiento del fotón en campo gravitatorio, el sistema de referencia que define el tiempo del observador, ve al fotón en su tránsito viajando a la velocidad del gravitón y precisa de un escalado para expresar el tiempo propio del sistema que realiza una medida de tiempo. Se verá un poco más claro en el apartado siguiente.

La expresión de las ecuaciones de relatividad especial con la velocidad explícita se encontraron inicialmente en la referencia [1], pero se puede llegar a ella razonando sólo con el movimiento del fotón y extrapolando los resultados a todas las partículas<sup>[3]</sup>. En el ‘Anexo III: Expresión explícita de la variación de la velocidad’ se incluye una demostración de cómo se obtiene la expresión en explícitas.

## Regímenes de velocidad

Las ecuaciones que hemos indicado se han supuesto en relatividad especial en campo fotónico y la  $c$  representa a la velocidad de los fotones. Si estamos resolviendo las ecuaciones en campo gravitatorio, debemos expresar las ecuaciones en relatividad especial en campo gravitatorio y la  $c$  es la velocidad de los gravitones ( $c_m$ ), que se determina igual a  $c_m = c/\sqrt{2}$ ; esto es, unos 200,000 km/s. En los cálculos, tomamos para  $c$  el valor,

$$c = 299,792,458 \text{ m/s.}$$

Para simular partículas que se mueven en campo gravitatorio más rápido que la velocidad de los gravitones, vamos a recurrir a un escalado en el tiempo del observador, y vamos a suponer que las partículas se mueven a la velocidad máxima del campo gravitatorio, que es la velocidad del gravitón.

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma_g}.$$

Con el factor de Lorentz que relaciona ambos campos,

$$\gamma_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_m}{c}\right)^2}} = \sqrt{2}.$$

Y siendo  $\tau$  el tiempo propio del sistema de referencia que hace una medida,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nótese que, en el tiempo propio del sistema de referencia, se medirá la velocidad del fotón igual a  $c$ . Porque, aunque en el tiempo del observador se verá que la luz tarda más en recorrer una distancia dada, al convertir al tiempo propio del sistema que hace la medida de tiempo, tenemos que reducir el tiempo del observador por el factor raíz de dos, que hace que el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia sea el correcto.

## Factor de Lorentz generalizado

Cada tipo de partícula presenta su propio factor de Lorentz generalizado. El factor de Lorentz en las ecuaciones diferenciales (1), sólo cambia la ley horaria del movimiento, pero no la trayectoria de la partícula. Lo definimos en base al experimento en cuestión, guiado por la expresión de relatividad general.

El incremento de tiempo se expresa como la diferencia del tiempo propio del sistema que realiza la medida, menos el tiempo del observador,  $\Delta t = \tau - t$ .

## Bosones (fotones y gravitones)

En base al experimento del retardo Shapiro establecimos (incorrectamente),

$$\frac{d \Delta t}{dt} = -z.$$

Donde definimos (incorrectamente) el redshift ( $z$ ) mediante,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - 1.$$

Para mantener la compatibilidad con el experimento de Pound-Sneider, definimos el incremento temporal como,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = 1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right).$$

Con la referencia del potencial en el origen del sistema de referencia respecto al que integramos la ecuación.

Y mantenemos para el redshift la expresión (ver Anexo I: Ecuación para el redshift),

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

La referencia para el potencial se tomaría al principio de la trayectoria (posición en  $t=0$ ) a lo largo de la que deseamos calcular el redshift.

Si el experimento que vamos a predecir es para gravitones,

$$\Delta t = \tau - t.$$

Si, en cambio, vamos a hacer el calculo para fotones,

$$\Delta t = \tau - \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Y el problema requiere escalado temporal.

La expresión de la ecuación del tiempo propio del sistema de medida define el factor de Lorentz generalizado; respectivamente,

$$\frac{d\tau}{dt} = 2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right),$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right).$$

En ambos casos el factor de Lorentz generalizado ( $\gamma'$ ) se define mediante,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma'}.$$

Obviamente, la ecuación para gravitones no se ha probado y es una extensión del caso de fotones.

## Fermiones

En base al experimento de tipo Hafele-Keating de los 'relojes de Maryland' (se comenta en su apartado) establecimos el incremento de tiempo como,

$$\frac{d\Delta t}{dt} = \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2 - v_0^2}{2c^2}.$$

O, suponiendo velocidades inferiores a la del gravitón,

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2 - v_0^2}{2c^2}.$$

Que vamos a extrapolar en base a los resultados con bosones a,

$$\frac{d\tau}{dt} = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1)\right).$$

Con el factor de Lorentz definido sobre la velocidad de los fotones,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Que da el factor generalizado de Lorentz,

$$\frac{1}{\gamma'} = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1)\right).$$

O,

$$\gamma' = \exp\left(\gamma - 1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right).$$

Esto permite que cuando el incremento de potencial sea nulo,

$$\gamma' = \exp(\gamma - 1),$$

y, en el límite de bajas velocidades, el factor de Lorentz generalizado se corresponda con el factor de Lorentz habitual,

$$\gamma' \simeq \gamma.$$

Como cabría esperar.

Nótese que la referencia de potencial, como la referencia respecto a la que se define la velocidad del factor de Lorentz, se hacen en base al sistema de referencia respecto al que integramos la ecuación.

## Experimentos de relatividad general

Analizaremos los siguientes:

1. Deflexión de fotones en campo gravitatorio.
2. Corrimiento al rojo gravitacional: Pound & Snider
3. Retardo Shapiro: viking landers
4. Precesión del perihelio de mercurio.
5. Gravity probe b.
6. Variación temporal de relojes en distintos sistemas de referencia (tipo Hafele-Keating): experimento de los relojes de la Universidad de Maryland.

Los detalles de cada experimento se encuentran en su referencia correspondiente, salvo el último. Aquí sólo vamos a hacer un consolidado de las ecuaciones, que han ido cambiando. Todos los experimentos se realizaron en influencia del campo gravitatorio, por lo que usaremos relatividad especial gravitatoria. O sea, que hay que usar las relaciones relativistas con la velocidad de los gravitones (salvo para el factor de Lorentz generalizado, que depende sólo del tipo de partícula en cuestión). Las ecuaciones (1) con este enfoque quedan,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v},$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \gamma' \left( \vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{v}}{c_m^2} \right).$$

Donde, como hemos indicado, el factor de Lorentz generalizado sólo se usa para las ecuaciones diferenciales. Para las expresiones del Lagrangiano, la energía y restantes, usamos el factor de Lorentz (normal) acorde al tipo de campo (gravitatorio usa la velocidad de los gravitones y el electromagnético la de los fotones).

En condiciones de ambigüedad entre qué factor de Lorentz usar (generalizado o normal), recordar que el factor generalizado de Lorentz se define en base a la ecuación del tiempo propio respecto al tiempo del observador; por lo que al convertir la EDO (que da la trayectoria) al tiempo propio, todos los factores de Lorentz generalizados deben simplificarse. Obviamente, en derivación (total) de magnitudes respecto al tiempo del observador, siempre va a aparecer un factor de Lorentz generalizado. También, recordar que la trayectoria de una partícula no puede depender de un factor de Lorentz generalizado, sólo intervienen en la ecuación horaria (cómo se recorre esa trayectoria).

El factor de Lorentz generalizado controla la velocidad con que se observa un sistema; esto es, si lo vemos a cámara rápida, o lo vemos a cámara lenta. Nadie espera que el ver a cámara rápida o lenta una carrera de coches, los coches cambien de trayectoria.

Nótese también que la limitación de velocidad (el motivo por el que hacemos escalado temporal en campo gravitatorio) viene dado por la forma de la EDO de la velocidad. Si la partícula iguala o supera la velocidad del gravitón, al restar al vector fuerza 'F' toda su componente tangencial, dicha

fuerza no puede incrementar la velocidad de la partícula (la velocidad está limitada por el tipo de campo). También sería incorrecto introducir una velocidad superior a la del campo porque estaríamos restando a la fuerza 'F' más componente tangencial de la que posee.

Los experimentos y su influencia en las ecuaciones de relatividad especial de campos se resume en la siguiente tabla.

Resultado sobre el tipo de experimento	Partícula: bosón	Partícula: fermión
Factor de Lorentz generalizado	Retardo Shapiro: Viking landers	Tipo Hafele-Keating
Velocidad gravitones y papel del factor de Lorentz generalizado como factor de escala temporal	Curvado de luz en campo gravitatorio	Precesión del perihelio de mercurio
Forma del redshift	Pound & Sneider	Precesión del perihelio de mercurio
Forma ecuaciones de campo	-	Gravity probe B

## Experimentos con bosones (fotones)

Los experimentos con bosones se calculan con las ecuaciones en tiempo propio (o sea, no sale el factor generalizado de Lorentz). Si el experimento requiere una medida de tiempo, como el del retardo Shapiro, usaremos la ecuación del tiempo  $\tau$ , no es preciso en los otros experimentos.

Los tres primeros experimentos se explican con el mismo conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que son,

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -G_r (x(c_m^2 - p^2) - y p q), \\ \dot{q} &= -G_r (-x p q + y(c_m^2 - q^2)), \\ \dot{x} &= p, \\ \dot{y} &= q, \\ \dot{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m}\right). \end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned} G_r &= \frac{GM}{c_m^2} \frac{1}{[x^2 + y^2]^{3/2}}, \\ U &= \sum_i \frac{-GM}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \end{aligned}$$

Donde la referencia de potencial se toma sobre el origen del sistema que mide el tiempo propio.

Y el redshift  $z$ ,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Donde el incremento de  $U$  hace referencia a la diferencia de potencial entre el punto de origen y el de destino del fotón. Resaltar que la referencia de potencial para la ecuación del redshift es distinta que para el factor de Lorentz generalizado, como hemos indicado.

Recordando que estamos en SR gravitatoria y  $c_m$  es la velocidad de los gravitones.

Nótese que es posible eliminar del problema el tiempo del observador, aunque las ecuaciones que se obtienen no mantienen la forma de las (1).

## Deflexión de fotones en campo gravitatorio

En este experimento se mide la deflexión de fotones cuando realizan su tránsito en la vecindad de un objeto masivo<sup>[2],[3]</sup>. Es un test muy polémico porque, aunque se han realizado varios experimentos, como el de Eddington que dio fama mundial a Einstein, los experimentos más recientes (y exactos) se realizan con medidas astronómicas de VLBI. Por ejemplo, con el tránsito del cuásar 3C279 a su paso por el sol. Una medida no exenta de problemática, ya que al parecer orientar una antena de esas dimensiones cara al sol, trae varias dificultades técnicas. Sin hablar de las dificultades que ya conlleva la medida, ya que para poder medir una deflexión, tiene que compararse dónde está el objeto, con dónde debería estar; y todo ello con mucha precisión.

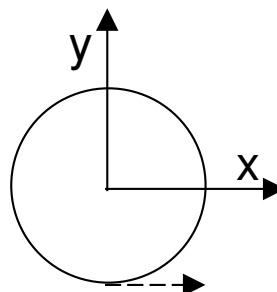
Hay otros experimentos que miden la deflexión de luz usando la gravedad de Júpiter, pero son medidas de deflexiones de mili-arcosegundos, y podrían estar sujetas a otros efectos adicionales. Al tiempo en que se analizó este experimento, no había test de ondas gamma (Fermi LAT) con la precisión requerida para confirmar este test.

Por todo ello, vamos a realizar el test con la referencia del resultado de relatividad general, que predice una deflexión de  $\delta = 1.7497$  arcosegundos, el doble de la que se predice usando sólo la gravedad de Newton. Este valor predicho, donde la deflexión es máxima, se encuentra sólo para fotones que pasan por la vecindad del sol tangencialmente a su superficie y por el ecuador del mismo.

Este experimento se resuelve con las 4 primeras de las EDOs y las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} p &= c_m, \\ q &= 0, \\ x &= 0, \\ y &= -R. \end{aligned}$$

Siendo  $R$  el radio del sol.



Suponemos que el fotón avanza inicialmente en la dirección del eje  $x$ , y calculamos su deflexión cuando deja de evolucionar (se ha ido lo bastante lejos de la influencia gravitatoria). Multiplicamos



el resultado por dos, porque hemos realizado sólo medio tránsito. Éste procedimiento es el seguido por Soldner en un cálculo similar y simplifica mucho el problema. Los datos del sol,

$$R = 6.371 \times 10^6 \text{ m},$$

$$GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

La deflexión la calculábamos con,

$$\delta = 2 \operatorname{atan}\left(\frac{q}{p}\right).$$

Que da una deflexión  $\delta = 1.7497$  arcosegundos.

Si usamos la solución al problema de los dos cuerpos para trayectorias hiperbólicas, el resultado que se predice es<sup>[9]</sup>,

$$\delta = \frac{2GM}{Rv^2}.$$

Sustituyendo la velocidad ( $v$ ) de los gravitones, se obtiene la misma predicción que GR, si expresamos el resultado en función de la velocidad de los fotones,

$$\delta_{GR} = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

Que da exactamente el mismo resultado,  $\delta = 1.7497$  arcosegundos.

## Corrimiento al rojo gravitacional: experimento de Pound-Sneider

Otro test con bastante polémica es éste. Confiamos en el resultado de este último que, esperamos, sea el más exacto. En este experimento se mide el redshift (desplazamiento en frecuencia hacia el rojo) de fotones cuando se mueven contra el campo gravitatorio terrestre<sup>[2],[3]</sup>. Dicho coloquialmente, los fotones se mueven hacia el cielo.

Este experimento se resuelve con las 4 primeras de las EDOs y la del redshift (algebraica) y las condiciones iniciales,

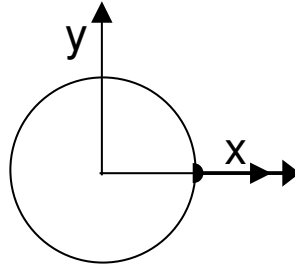
$$p = c_m,$$

$$q = 0,$$

$$x = R,$$

$$y = 0.$$

Siendo  $R$  el radio del sol.



Hacemos coincidir con el eje x la dirección de partida del fotón. Con el origen de coordenadas en el centro de la masa gravitacional, de masa M y radio R. El fotón partirá desde su superficie paralelamente a la gravedad.

El sistema de ecuaciones sólo dice que el rayo sale de la superficie de la tierra y va en línea recta. Y es la expresión del redshift la que predice el resultado (ver Anexo I: Ecuación para el redshift).

Combinando la ecuación del redshift,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

Con el incremento de potencial dado en el 'Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre',

$$z = \exp\left(\frac{gh}{c^2}\right) - 1.$$

Resulta en la aproximación del redshift,

$$z \simeq \frac{gh}{c^2},$$

Al realizar el experimento, se midió tanto el camino de ascensión (redshift) como el de descenso (blueshift, por tanto, negativo) y luego se restó al primero el segundo; por lo que el  $z_{\text{exp}}$  reportado es el doble del valor del redshift que vamos a calcular ( $z_{\text{teo}}$ ), así que lo multiplicaremos por dos para comparar el resultado,

$$z_{\text{exp}} = z_{\text{redshift}} - z_{\text{blueshift}} = 2 z_{\text{redshift}},$$

Sustituyendo los valores del experimento de Pound & Snider (1965),

$$\begin{aligned} h &= 22.5552 \text{ m (74 pies)}, \\ g &= 9.82 \text{ m/s}^2, \\ c &= 299,792,458 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

queda,

$$\begin{aligned} z_{\text{exp}} &= 4.905 e^{-15}, \\ z_{\text{teo}} &= 4.9296 e^{-15}. \end{aligned}$$

Donde  $z_{\text{exp}}$  es el valor que reportaron en el artículo de Pound y  $z_{\text{teo}}$  el valor que hemos calculado. A pesar de la diferencia con el valor obtenido por Pound, la expresión que evaluamos da lo mismo que el resultado de relatividad general. Ver la referencia [3] para los detalles.

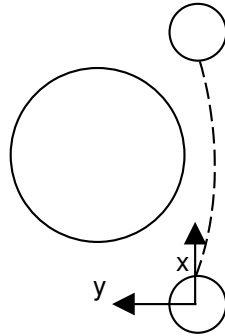
## Retardo Shapiro: experimento de viking landers

En este experimento se predice el tiempo de ida y vuelta de un fotón entre la tierra y marte, cuando pasa por la vecindad del sol<sup>[4]</sup>.

En este caso usamos todas las EDOs, y definimos el potencial de referencia para el factor de Lorentz generalizado, sobre la superficie de la tierra.

$$U_o = U_o(R_e, 0)$$

Donde  $R_e$  es el radio de la tierra.



Como muestra la figura, suponemos que el rayo (línea a trazos) sale de la superficie de la tierra en el punto  $(R_e, 0)$  y llega a marte en el punto  $(R_{ep} - R_m, 0)$ . Siendo  $R_m$  y  $R_e$  el radio de marte y el radio de la tierra respectivamente; y  $R_{ep}$  la distancia que separa los baricentros (tierra-marte). Ver Figure 1.

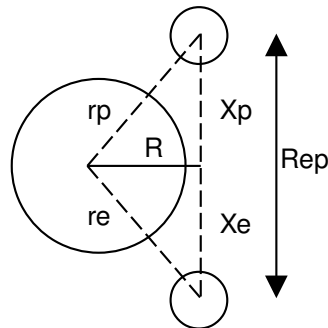


Figure 1: Esquema de distancias

Este sistema se integra con las condiciones en  $t=0$  para el camino de ida,

$$\begin{aligned} p &= \delta_x, \\ q &= \delta_y, \\ x &= R_e, \\ y &= 0, \\ \tau' &= 0. \end{aligned}$$

El vector de velocidades inicial  $(\delta_x, \delta_y)$  debe ajustarse para que cuando  $x=R_{ep}-R_m$  se cumpla también  $y=0$  (valores en el instante de llegada) Y su módulo debe ser  $\sqrt{(\delta_x^2, \delta_y^2)}=c_m$  (la velocidad del gravitón)

Para el camino de vuelta, las condiciones iniciales quedan,

$$\begin{aligned} p &= \delta_x', \\ q &= \delta_y', \\ x &= R_{ep} - R_m, \\ y &= 0, \\ \tau' &= 0. \end{aligned}$$

y el vector de velocidades inicial  $(\delta_x', \delta_y')$  debe ajustarse para que cuando  $x=R_e$  se cumpla también  $y=0$ .

La deflexión que hace falta para conseguir acertar con el camino deseado es muy pequeña respecto al eje x, en ambos casos (del orden de un arcosegundo). Para el camino de ida, los signos del vector velocidad inicial quedan (+,-) y para el de vuelta (-,-). El ángulo de salida no coincide en ida y vuelta, porque tampoco el sol se encuentra a mitad del camino entre tierra y marte.

Los datos astrométricos los tomamos de Horizons, el servicio del JPL de la NASA. Resultando,

re	1.476451407E+08
rp	2.268514296E+08
Rep	3.744933357E+08
R	7.606447132E+05

El retardo predicho por relatividad general es 243 micro-segundos, y el obtenido en el cálculo 257.51 micro-segundos (con la corrección de tiempo por la velocidad terrestre)

El curvado de la luz por sí sólo introduce una corrección en el retardo Shapiro del orden de 19.33 nano-segundos en este experimento, por lo que es despreciable. Hacer el cálculo suponiendo que el rayo de luz traza una línea recta, da un resultado sólo ligeramente peor, y simplifica mucho los cálculos.

También se puede sacrificar más precisión, con un resultado similar, si sólo se considera la presencia del sol; en este caso es posible una integración a mano. Obteniendo, sólo para el término del retardo Shapiro,

$$\begin{aligned} \Delta t'_{ida} &= \frac{GM}{c_m^3} \left( \ln \left| \frac{r_e + X_e}{r_p - X_p} \right| - \frac{R_{ep}}{r_e} \right) = 136.75 \mu s, \\ \Delta t'_{vuelta} &= \frac{GM}{c_m^3} \left( \ln \left| \frac{r_e + X_e}{r_p - X_p} \right| - \frac{R_{ep}}{r_p} \right) = 149.09 \mu s, \\ \Delta t' &= \frac{GM}{c_m^3} \left( 2 \ln \left| \frac{r_e + X_e}{r_p - X_p} \right| - R_{ep} \left( \frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_p} \right) \right) = 285.84 \mu s \end{aligned}$$

Mientras que el retardo obtenido con las integración de las EDO, sin la corrección por la velocidad de la tierra,

$$\Delta t' = 134.27 + 148.58 = 282.85 \mu s.$$

La forma del cálculo sí que difiere de la que se emplea en las referencias de la NASA. Ver referencia [4] para los vínculos a esos tests. Para el experimento de 'viking landers' se tiene,

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \ln \left| \frac{r_e + r_p + R_{ep}}{r_e + r_p - R_{ep}} \right| = 243.37 \mu s.$$

Mientras que para el experimento de la sonda cassini,

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \ln \left| \frac{4r_p r_e}{R^2} \right| = 243.37 \mu s.$$

Dando ambas el mismo resultado y no incluyendo corrección alguna por la velocidad de la tierra.

## Experimentos con fermiones

### Precesión del perihelio de mercurio

La precesión del perihelio de mercurio hace referencia a un movimiento de giro de la elipse que describe mercurio entorno al sol. Dicha elipse gira en el 'plano de movimiento' de mercurio con un eje que pasa por el sol (que está en un foco de dicha elipse).

La magnitud que varía es el ángulo que forma el semieje mayor de la elipse entre dos instantes de tiempo (por ejemplo, se puede definir de otras maneras)

Este test es complejo de realizar y precisa de muchos datos de Horizons y varios ajustes. Sin embargo las ecuaciones son sencillas de plantear, pero costosas computacionalmente (se usó fortran)

Resumidamente, vamos a definir al ángulo de precesión calculando el instante en que se produce el perihelio, integrando las ecuaciones de n-body para los cuerpos celestes desde el Sol hasta Neptuno<sup>[5]</sup>. Si el cuerpo celeste es un sistema con lunas, tomamos el baricentro del sistema (sólo sol, mercurio y venus se excluyen de esto)

El valor que existe en la literatura para la precesión del perihelio, no representa correctamente la evolución temporal (por no ser realmente una evolución lineal) y el pretender obtenerlo exige un postprocesado de los resultados de cada perihelio excesivamente complejo, a mi entender (ver los resultados del JPL; puede encontrarse la referencia al documento del JPL en el documento detallado de este experimento<sup>[5]</sup>)

Es cierto, y poco costoso, que el ajuste de mínimos cuadrados muestra resultados mucho más parecidos a lo que se espera, por lo que usaremos esta métrica para los resultados obtenidos.

El no poder obtener el valor teórico nos exige comprobar el resultado mediante otro procedimiento, y para ello se usa el kernel de JPL DE405 ascii. O sea, que repetimos la simulación de la evolución temporal usando los datos del kernel de la NASA y ajustamos la evolución con mínimos cuadrados, como hicimos con los resultados de la integración de las ecuaciones de n-body.

Para obtener el resultado correcto, es preciso añadir un término en las ecuaciones de mercurio que tiene en cuenta la inducción de campo gravitomagnético del sol sobre mercurio (ley de Faraday)

Aunque los efectos relativistas, evaluados mirando la diferencia entre la energía que predice el Lagrangiano de Newton frente al de relatividad especial de campos, sólo son apreciables en los cuerpos celestes desde mercurio a Júpiter ambos incluidos, puede realizarse la simulación poniendo a uno todos los factores (generalizados) de Lorentz sin pérdida significativa de resolución. Los efectos importantes son la modificación de la fuerza tangencial, y la inducción de campo gravitatorio; este último sólo en el caso de mercurio.

Si realizamos la simulación durante 100 años, manteniendo una resolución de 0.1 segundos en la localización del perihelio, obtenemos la tabla siguiente,

Tipo de simulación	Arcseg
Sólo con fuerzas de Newton	515.66
Términos ecuaciones de relatividad especial de campos (SRF)	28.88
Término de inducción de Faraday (sol a mercurio sólo)	14.04
	<b>558.58</b>

El valor que se obtiene con el kernel ascii es 558.51 arcseg con una resolución de 0.6 segundos (lo máximo) en la localización del perihelio (EphemUtil con código C clonado del código fortran) La aportación de GR teórica sería 42.98 arcosegundos; SRF+Faraday obtiene 42.92.

Mercurio completa 416 perihelios en total.

Las fechas del último perihelio tampoco terminan por cuadrar y se parecen más a los valores que suministra el kernel que al resultado que aporta Horizons.

Tipo de simulación	Resolución (segundos)	Fecha último perihelio (@416)
Datos Horizons	10	Sun Feb 17 02:28:50 2013
Kernel ascii DE405 con EphemUtil en C	0.6	Sun Feb 17 03:27:44 2013
Código fortran (real*16)	0.1	Sun Feb 17 03:14:20 2013

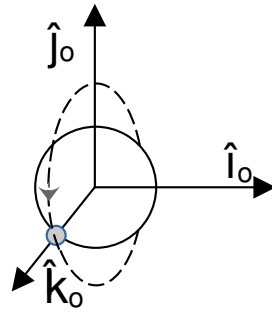
La simulación a 2000 años suma aproximadamente 10 arcosegundos más sin llegar al valor teórico ( $574.10 \pm 0.65$  arcseg)

## Gravity probe b

El ‘gravity probe b’ o ‘gbp’ es un test que prueba la influencia del campo gravitomagnético terrestre en dos efectos denominados ‘geodetic precesion’ y ‘frame dragging precesion’. La primera se refiere al efecto del campo gravitatorio de la tierra sobre un objeto que orbita entorno a ella, es un efecto puramente relativista (de relatividad especial); y, el segundo, se refiere al efecto del campo gravitomagnético de la tierra sobre un objeto (no necesariamente en movimiento). El objeto de prueba es un giróscopo y el efecto que se produce sobre el mismo es la precesión del eje de giro<sup>[6]</sup>.

Este test presenta un cálculo de cierta complejidad, pero es el único que podemos integrar a mano y obtener una expresión cerrada fácilmente.

Necesitamos modelar matemáticamente la órbita del giróscopo que circunda a la tierra. El giróscopo (esfera pequeña en la figura) lo vamos a suponer realizando una órbita elíptica (línea a trazos) entorno a la tierra; como se indica en la figura, con su vector de posición inicial alineado con el eje  $k_0$ .



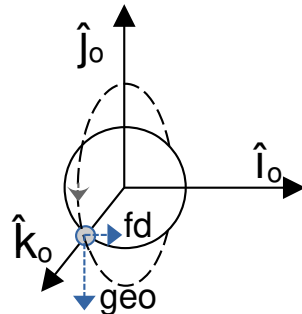
El eje de rotación de la tierra se encuentra alineado con el eje  $j_o$ , y el eje de rotación del giróscopo se encuentra alineado con el eje  $k_o$  en todo momento. En realidad no es así y hay un pequeño ángulo con ambos ejes que vamos a despreciar.

Tal como se ha descrito, el giróscopo tiene una trayectoria que pasa por los dos polos consecutivamente.

Vamos a suponer que la trayectoria es tal que el perigeo (punto en que la distancia es la menor al objeto orbitado) y el apogeo (punto en que la distancia es la mayor al objeto orbitado) se producen en el plano ecuatorial de la tierra, con el apogeo en la posición inicial que hemos fijado.

Tenemos, pues, dos sistemas de referencia que se mantienen paralelos; el sistema 0 (indicado en la figura) y el sistema 'g' (del giróscopo; no indicado) que acompaña al giróscopo en su giro entorno a la tierra, pero manteniendo sus ejes coordenados paralelos en todo momento a los del sistema 0.

La precesión geodética provoca el giro del eje de rotación del giróscopo según el eje  $i_o$ , y la precesión frame-dragging provoca el giro según el eje  $j_o$ . Ver la figura siguiente.



El efecto del campo gravitomagnético sobre el giróscopo lo vamos a modelar mediante el momento dipolar (gravito)magnético y la ecuación de precesión de Larmor.

Los resultados se listan en la tabla,

Precesión	Medido (mas/año)	Obtenido	ratio
geodética	$6601.8 \pm 18.3$	4399.74	1.50032
frame-dragging	$37.2 \pm 7.2$	24.59	1.51281

Hemos obtenido correctamente el signo de la precesión pero en ambos casos la predicción ha sido defectiva por un factor de 3/2 aproximadamente. Con esto en mente, se propone una modificación de las ecuaciones del gravitomagnetismo.

Las ecuaciones de Maxwell son,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\nabla V.\end{aligned}$$

y las análogas del campo másico,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}_g &= -4\pi G \rho_g, \\ \nabla \cdot \vec{B}_g &= 0, \\ \nabla \wedge \vec{E}_g &= -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B}_g &= \frac{4\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}, \\ \vec{B}_g &= \nabla \wedge \vec{A}_g, \\ \vec{E}_g &= -\nabla V_g.\end{aligned}$$

Se propone el cambio,

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \vec{E}_g &= -\frac{2}{3} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B}_g &= \frac{6\pi G}{c_m^2} \vec{J}_g + \frac{3}{2c_m^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}.\end{aligned}$$

El primer cambio para mantener el resultado establecido en [5], y el segundo para que cuadren los resultados de este experimento. No es el único arreglo posible, otros autores optaron por introducir coeficientes en expresiones como la de Larmor. Ver referencia [6] para los detalles de cálculo.

## Variación temporal en distintos sistemas de referencia: relojes de Maryland

Es un experimento del tipo Hafele-Keating. Se calcula la diferencia en el paso de tiempo entre dos sistemas; bajo la influencia de dos factores: una diferencia de potencial y una diferencia de velocidad. El experimento, mucho más controlado que el de Hafele-Keating, se realizó en la universidad de Maryland en Septiembre de 1975<sup>[8]</sup>.

Para medir la diferencia temporal se usaron dos relojes atómicos sincronizados. Uno de ellos se mantiene en un vuelo controlado tanto en altura como en velocidad. El tiempo de vuelo y la altura del mismo se lista en la tabla.



Tiempo (h)	Altura h (m)
5	7,620
5	9,144
5	10,668

El ensayo duró 15 horas y se realizó a una velocidad de 138 m/s (velocidad del avión relativa al centro de control en tierra)

Como comentamos, se usará la relación dada en relatividad general,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

Con el potencial referido al centro de control en tierra. La expresión del incremento de potencial, si h es la altura de vuelo y g la gravedad terrestre, (ver Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre),

$$\frac{\Delta U}{c^2} = \frac{g h}{c^2}.$$

Por lo que,

$$\frac{d \Delta t}{dt} = \frac{g h}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

Tenemos que integrar esta ecuación por tramos para las 15 horas del experimento, ya que la altura va cambiando. Si hacemos esto, obtenemos,

$$\begin{aligned} \Delta t_U &= 53.95 \text{ ns}, \\ \Delta t_v &= -5.72 \text{ ns}, \\ \Delta t &= 48.23 \text{ ns}. \end{aligned}$$

Son los valores para la predicción teórica (el primer valor la contribución del término del potencial, y el segundo el término de velocidad)

Los datos medidos fueron,

$$\Delta t = 52.8 - 5.7 = 47.1 \text{ ns}.$$

Las constantes que se usaron,

$$\begin{aligned} g &= 9.82 \text{ m/s}^2, \\ c &= 299,792,458 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

## Predicciones de la teoría

La teoría predice, por ejemplo:

1. La velocidad de los gravitones es  $c_m = c/\sqrt{2}$ . Este extremo podría probarse observando en un acelerador de partículas quasi-rectangular, dispuesto de forma vertical, la tasa de aceleración que las partículas adquieren en sucesivas vueltas al circuito del acelerador. Se aplicaría la energía precisa

para mantener el haz dentro del acelerador en las curvas del rectángulo y en la ascensión contra la gravedad; y se dejaría que la gravedad fuera acelerando el haz en el tramo de bajada.

2. Las trayectorias de partículas materiales, bajo la influencia de un campo gravitatorio, con velocidades entre la del gravitón y la del fotón, son las mismas. Para comprobar este extremo, haría falta un experimento como el del retardo Shapiro pero usando partículas másicas a distintas velocidades relativistas  $v$ , con  $c_m \leq v < c$ . Sería también muy útil que se midiera su retardo temporal.

3. La velocidad máxima que puede adquirirse en caída libre bajo la acción de un campo gravitatorio es la velocidad del gravitón ( $c_m$ ).

## Anexo I: Ecuación para el redshift

Viendo la forma para la ecuación (1), notamos que de la fuerza que se aplica sobre la partícula, hay una parte que, dependiendo de la velocidad de la partícula, deja de causar efecto sobre la misma. Esta componente tangencial no se pierde, se invierte en modificar la energía de la onda asociada a la partícula. En el caso de los fotones, a su onda electromagnética. Por extensión, en el caso de gravitones, a su onda gravitacional. Y en el caso de partículas materiales, a su función de onda cuántica asociada.

Vamos a deducir de nuevo la expresión del redshift para bosones.

La definición del redshift es,

$$z = \frac{f_o}{f} - 1.$$

Donde  $f_o$  es la frecuencia inicial, y  $f$  la que se observa en el punto de recogida de la medición.

$$dz = \frac{-f_o df}{f^2}.$$

Introduciendo la definición del redshift en esta ecuación,

$$dz = -(1+z) \frac{df}{f}.$$

O,

$$-\frac{dz}{1+z} = \frac{df}{f}.$$

Que nos permite cambiar la variación de frecuencia por la variación del redshift.

Por otro lado, la ecuación de la energía cinética para las ondas electromagnéticas en campo gravitatorio sería,

$$E_c = m c_m^2 = hf.$$

(recuérdese que en campo gravitatorio hay que usar expresiones de relatividad gravitatoria) de donde podemos despejar la masa,

$$m = \frac{hf}{c_m^2}.$$

Como indicamos, el trabajo de la componente de la aceleración tangencial, se invierte en el cambio de frecuencia (redshift/blueshift),

$$\frac{dW_t}{2} = \frac{1}{2} \vec{F}_t \cdot d\vec{x} = h df.$$

El factor 1/2 hace referencia al hecho de que la onda electromagnética es una onda transversal; esto es, tiene dos planos de polarización ortogonales<sup>[7]</sup>, y cada plano absorbe la mitad de la energía disponible, dando,

$$\frac{dW_t}{2} = \frac{1}{2} m \vec{a}_t \cdot d\vec{x} = h df.$$

Como proyectamos la aceleración tangencial sobre la dirección de movimiento, podemos cambiar la aceleración tangencial por la aceleración sin alterar el resultado,

$$\frac{1}{2} m \vec{a} \cdot d\vec{x} = h df.$$

y sustituir la expresión para la masa,

$$\frac{1}{2} \frac{hf}{c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = h df.$$

De donde desaparece la constante de Planck.

$$\frac{1}{2c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = \frac{df}{f}.$$

Ahora sustituimos en ella la expresión para el redshift,

$$\frac{1}{2c_m^2} \vec{a} \cdot d\vec{x} = -\frac{dz}{1+z}.$$

Esta ecuación la podemos integrar a lo largo de un camino; si invertimos los miembros de la ecuación para dejar el redshift a la izquierda, y mantenemos el menos a la derecha,

$$\int \frac{dz}{1+z} = \frac{-1}{2c_m^2} \int \vec{a} \cdot d\vec{x}.$$

Donde la expresión de la derecha representa el trabajo de las fuerzas (por unidad de masa).

Supongamos que tenemos fuerzas conservativas y no conservativas. Las conservativas las podemos cambiar por su diferencia de potencial a lo largo del camino,

$$\ln|1+z| = \frac{\Delta U - W_{FNC}}{2c_m^2}.$$

O,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U - W_{FNC}}{2c_m^2}\right) - 1.$$

Que no necesita constantes de integración, porque cuando el trabajo de las fuerzas es cero, el redshift es cero también.

Con,

$$W_{FNC} = \int \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{x},$$

o,

$$\frac{dW_{FNC}}{dt} = \vec{F}_{NC} \cdot \vec{v},$$

Lo que resulta mas sencillo para el caso en cuestión.

Para el caso particular en que no hay fuerzas no conservativas o no realizan trabajo,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{2c_m^2}\right) - 1.$$

Que es el resultado que concuerda con el experimento de Pound & Sneider.

Nótese que la expresión en términos de la velocidad de la luz queda,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1.$$

## Anexo II: Incremento de potencial sobre la superficie terrestre

Vamos a calcular el incremento de potencial entre la superficie de la tierra y una altura por encima. Si  $h$  es la altura y  $R_T$  el radio de la tierra,

$$\Delta U = GM \left( \frac{-1}{R_T + h} + \frac{1}{R_T} \right).$$

Si sacamos el radio factor común, y desarrollamos el término entre paréntesis teniendo en cuenta que el radio es mucho mayor que la altura ( $R_T \gg h$ ),

$$\Delta U = \frac{GM}{R_T} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{R_T}} \right) \approx \frac{GM}{R_T} \frac{h}{R_T}.$$

Introduciendo la definición de la gravedad terrestre,

$$g = \frac{GM}{R_T^2},$$

queda,

$$\Delta U = gh.$$

## Anexo III: Expresión explícita de la variación de la velocidad

Usaremos las expresiones,

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \quad (2)$$

Que, en función del cuadrado del factor de Lorentz,

$$\gamma^2 = 1 + \frac{v^2 \gamma^2}{c^2}. \quad (3)$$

Junto con la variación del factor de Lorentz con el tiempo,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} (v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z). \quad (4)$$

Partimos de la expresión de la cantidad de movimiento relativista, donde vamos a obviar la masa,

$$\frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = \vec{a}.$$

Para la componente x,

$$\frac{d}{dt} (\gamma v_x) = a_x.$$

Desarrollando,

$$\frac{d\gamma}{dt} v_x + \gamma \frac{dv_x}{dt} = a_x.$$

Sustituyendo (4),

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x^2 \dot{v}_x + v_x v_y \dot{v}_y + v_x v_z \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_x = a_x.$$

Para las otras componentes,

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x v_y \dot{v}_x + v_y^2 \dot{v}_y + v_y v_z \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_y = a_y,$$

$$\frac{\gamma^3}{c^2} (v_x v_z \dot{v}_x + v_y v_z \dot{v}_y + v_z^2 \dot{v}_z) + \gamma \dot{v}_z = a_z.$$

Dando en forma de matriz (simétrica),

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} & \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z \\ \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & 1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2} & \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z \\ \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z & \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z & 1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Para invertir la matriz 'A' empezamos por calcular el determinante,

$$|\bar{\bar{A}}| = \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) + 2 \frac{\gamma^6}{c^6} v_x^2 v_y^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_y^2 v_z^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_y^2,$$

$$|\bar{\bar{A}}| = \left(1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_y^2\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} (v_x^2 v_z^2 + v_y^2 v_z^2 + v_x^2 v_y^2) - \frac{\gamma^6}{c^6} v_x^2 v_y^2 v_z^2,$$

$$|\bar{\bar{A}}| = 1 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2},$$

Pero por (3),

$$|\bar{\bar{A}}| = \gamma^2.$$

Ahora calculamos los adjuntos,

$$A_{xx} = \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} v_y^2 v_z^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_y^2 + v_z^2),$$

$$A_{xy} = \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y \left(1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^4}{c^4} v_x v_y v_z^2 = \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y,$$

$$A_{xz} = \frac{\gamma^4}{c^4} v_x v_z v_y^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z = -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z,$$

$$A_{yz} = \frac{-\gamma^4}{c^4} v_y v_z v_x^2 + \left(1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2}\right) \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z = \frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z,$$

Los restantes son análogos y queda el sistema con la matriz invertida,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_y^2 + v_z^2) & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z \\ -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_y & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_z^2) & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z \\ -\frac{\gamma^2}{c^2} v_x v_z & -\frac{\gamma^2}{c^2} v_y v_z & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Haciendo el producto de la matriz invertida con el vector e introduciendo el valor del determinante en el vector resultante,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} a_x + \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + \frac{1}{\gamma^2} a_y + \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + \frac{1}{\gamma^2} a_z + \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Cambiando el inverso del factor de Lorentz al cuadrado por (2),

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{v^2}{c^2} a_x + \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + a_y - \frac{v^2}{c^2} a_y + \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + a_z - \frac{v^2}{c^2} a_z + \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Y, simplificando términos,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{v_x^2}{c^2} a_x - \frac{v_x v_y}{c^2} a_y - \frac{v_x v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_y}{c^2} a_x + a_y - \frac{v_y^2}{c^2} a_y - \frac{v_y v_z}{c^2} a_z \\ -\frac{v_x v_z}{c^2} a_x - \frac{v_y v_z}{c^2} a_y + a_z - \frac{v_z^2}{c^2} a_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Extrayendo factor común cada componente de la velocidad (en la primera la x, la segunda la y, la tercera la z),

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_x \\ a_y - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_y \\ a_z - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{c^2} v_z \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}.$$

Que adquiere la representación vectorial,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma} \left( \vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})}{c^2} \vec{v} \right).$$

## Anexo IV: Combinación de fuerzas gravitatorias y electromagnéticas

Vamos a dar un esbozo de cómo podrían establecerse las EDOs; ya que cada fuerza impone su restricción en un rango de velocidades distinto. El problema aparecería para velocidades superiores a la del gravitón. Las ecuaciones quedarían,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma'} \left( \vec{F}_g - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_g)}{c_m^2} \vec{v} + \vec{F}_e - \frac{2(\vec{v} \cdot \vec{F}_e)}{c^2} \vec{v} \right).$$

Donde el vector 'Fg' son las fuerzas gravitatorias y 'Fe' las electromagnéticas. El dos que aparece con la restricción de las fuerzas electromagnéticas es debido a que, como hemos indicado, en campo gravitatorio la velocidad máxima es la del gravitón, y el problema precisa de escalado temporal.

Pero la restricción para las fuerzas electromagnéticas precisa que pongamos la velocidad real del objeto, no la del gravitón, por lo que a cada término de velocidad lo acompaña un factor raíz de dos. Este dos podemos absorberlo dentro de la velocidad de la luz para dar,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma'} \left( \vec{F}_g - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_g)\vec{v}}{c_m^2} + \vec{F}_e - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}_e)\vec{v}}{c_m^2} \right).$$

O,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma'},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma'} \left( \vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c_m^2} \right).$$

Con el vector 'F' agrupando todas las fuerzas, y las expresiones de relatividad de campo gravitatorio. Las expresiones de relatividad para campo fotónico sólo se usarían cuando no exista campo gravitatorio.

Es una propuesta tentativa, a la espera de encontrar algún test con que verificarla.

## Referencias

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic\\_mechanics](http://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_mechanics)
- [2] Extensión alternativa de la relatividad especial. <https://vixra.org/abs/2302.0124>
- [3] Desplazamiento en frecuencia gravitacional de fotones en relatividad especial. <https://vixra.org/abs/2211.0117>
- [4] Retardo shapiro en relatividad especial. <https://vixra.org/abs/2303.0133>
- [5] Mercury perihelion precession with special relativity of fields. <https://vixra.org/abs/2305.0030>
- [6] Análisis del experimento gravity probe b con relatividad especial de campos. <https://vixra.org/abs/2307.0013>
- [7] <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/node48.html>
- [8] Alley, C.O. (1979). "Relativity and Clocks". [https://user.it.uu.se/~marlu734/relativity/Alley1979-relativity\\_and\\_clocks.pdf](https://user.it.uu.se/~marlu734/relativity/Alley1979-relativity_and_clocks.pdf)  
Disponible en varias webs.
- [9] Deflection of photons in gravitational field. <https://vixra.org/abs/2211.0075>