

# 原子的稳定性、韧致辐射 自旋的本质和超导新机制

梅晓春

福州大学物理系

**内容摘要** 本文考虑质速公式，对电子在天线和原子核电场中的运动进行稳定性分析，指出天线辐射的本质是韧致辐射，证明如果原子核静止不动或运动速度不大，电子在原子核电场中的绕核运动是稳定的，就可以不辐射，由此解释了原子的稳定性。如果原子核存在热运动，电子不是做绕核运动，就可能产生韧致辐射。在此基础上，本文对经典电磁理论的欧姆定律给出严格证明，揭示了电阻的动力学本质，指出电阻是导体内局部电场强度与辐射阻尼力对时间的积分。并提出超导新机制，认为临界温度下原子核停止振动，电子在导体中运动不需辐射，是出现超导现象的根本原因之一。证明超导能隙是由于原子核停止振动后，绕核运动的电子基态能量降低引起。文章讨论了一维无限长晶格上原子核停止振动的条件，推导出单质元素超导体临界温度的计算公式，比 BCS 理论的公式更符合实验数据。以它为基础，可以根据不同超导材料的具体情况，计算合金与高温超导体的临界温度。本文阐明电子自旋的本质，指出所谓的自旋不是电子绕自身的旋转，而是绕原子核最外层 s 轨道的圆周运动。库珀对是在临界温度下，导体中自由电子的动能减少后，回归到束缚态，重新变成绕原子核外层的 s 轨道运动，动量和角动量方向相反的电子对。由此揭示 BCS 理论的库珀对形成的微观机制，给出明确图像，计算出库珀对电子之间存在的电声作用吸引力和库伦排斥力的大小和存在条件。与液氦的超流态类似，可以将这种状态称为超凝态。采用这种方式同样可以阐明导体的超导性，迈斯纳效应和其他热力学性质，并为高温超导体的多能隙、隙间、第二类超导体、以及 d 波等现象提供微观解释，为高温超导的理论和实验研究提供新思路，并对固体物理学产生重要影响。

**关键词**：质速公式，原子的稳定性，韧致辐射，高低温超导，库珀对，迈斯纳效应，抗磁性

## 一 前言

自从 1986 年发现了钇钡铜氧系高温超导材料以来，物理学家对高温超导材料进行了大量的研究，积累了大量的数据。但高温超导的理论解释存在很大的困难，严重地滞后于实验。这意味着目前的 BCS 超导理论存在某些根本性的缺陷，需要在基本观念方面进行改造。

本文作者认为，高温超导机制涉及到三个物理学的基本问题，一是原子的稳定性问题，二是微观粒子自旋的本质，三是韧致辐射的本质。只有把这三个问题搞清楚，才能正确理解 BCS 理论中产生库珀对的微观机制，同时把高温超导的机制弄清楚。

物理学发展到今天的高度，原子的稳定性仍然是一个没有解决的基本问题。按照经典电磁理论，带电粒子做加速运动要辐射电磁波，但绕原子核做圆周加速运动的电子却不辐射，原子是稳定的。

---

本文前半部分发表于 *Applied Physics Research*, Vol. 4, No. 2; 2012。

这个事实说明，经典电磁理论的带电粒子辐射机制存在问题。除此之外，还有以下实验事实证明，经典电磁理论的辐射机制不是完全正确的：

1. 带电粒子在均匀电场中做匀加速运动，即使接近光速时仍然不辐射（或很少辐射），这也是建造国际大型直线加速器可行性的理由。

2. 在电子感应加速器中，电子做加速运动不辐射，只有在同步回旋加速器中的带电粒子才辐射。

3. 无线电天线中，如果参数选择不适当，做周期加速运动的电子也不辐射，只有在满足天线振荡的条件下，电子才辐射。

因此，经典电磁辐射理论需要修正。本文作者 2012 年发表论文《带电粒子在电磁场中运动的稳定性分析与建造无辐射损耗的同步回旋加速器的可能性》，完成了这项工作【1】。

该文章考虑狭义相对论的质速公式，证明带电粒子的辐射与粒子在电磁场中的运动稳定性有关。带电粒子在磁场中运动时，如果磁场是均匀的，粒子就不会辐射。如果磁场不均匀，只要存在微小的干扰力，电子的运动就可能是不稳定的。电子的速度不但可能超光速，而且可能变成虚数。在这种情况下，电子就要辐射。通过辐射阻尼力，改变运动形式，使电子能够继续运动。

因此，经典电磁辐射的原因不是由于加速度，而是由于带电粒子在电磁场中运动的不稳定性。在此基础上，通过改变磁场环境和电子的运动方式，提出建造无辐射损耗高能回旋加速器的构想。

本文讨论电子在原子核电场中的运动，证明原子核静止的情况下，绕核电子的运动是稳定的，就不需要进行辐射，由此解释了原子的稳定性问题。本文指出，天线辐射的本质是韧致辐射，它与天线导体末端的电子在原子核附近的运动不稳定有关。

欧姆定律是经典电磁理论的基本定律，它实际上是一个经验规律，至今没有严格的理论证明。本文考虑电子在导体内的韧致辐射，给出欧姆定律的严格证明。指出电阻是导体内局部电场强度与辐射阻尼力对时间的积分，局部电场和辐射阻尼力抵抗外电场做的负功，数值上等于外电场做的正功。负功代表热耗散，外电场做正功使电流通过导体，电子获得定向动能，同时产生电阻，引起热耗散。由此就从电磁相互作用力的角度，揭示了电阻的动力学本质。

对于超导问题，本文指出，在临界温度以下，晶格上的原子核停止振动，是出现超导现象的根本原因之一。由于原子核停止热运动，电子就可以不辐射地穿过导体，就如绕原子运动的电子不辐射。但如果导体中电子的通道上存在原子核，电子无法绕行，不得不与原子核产生直接的碰撞，尽管在临界温度以下，电子仍然要辐射。这也是一般超导体都具有层状结构的原因，层状结构可以为电子提供合适的通路，使之可以无辐射地通过。

超导能隙则是由于原子核停止振动后，绕核运动的电子基态能量降低引起。对于高温超导体，由于存在复杂晶格结构，就会出现多能隙。对于常态的导体，由于温度的改变，也会出现隙能隙。

本文讨论了一维无限长晶格上原子核停止振动的条件，推导出单质元素超导体临界温度的计算公式。结果显示临界温度除了与导体的能隙有关，还和原子核的外层电子轨道半径与晶格中原子核之间距离的比值有关。本文推导的超导临界温度公式简单有效，比 BCS 理论的公式更符合实验数据。可以以它为基础，根据不同超导材料的具体情况，计算合金与高温超导体的临界温度。

关于自旋的本质，作者 2015 年发表题目为“量子力学的普适动量算符与微观粒子自旋的本质”的文章，对微观粒子的自旋问题做了详细的讨论【2】。文章指出，电子所谓的自旋不是电子绕自身的旋转，而是绕原子核最外层 s 轨道的圆周运动。微观粒子的自旋算符  $\hat{S} \sim \hbar/2$  只是一个量子数，用它可以方便对原子的轨道磁矩做计算。

计算结果显示，原子s轨道的角动量不是零，也不是 $\pm \hbar/2$ ，而是 $\pm \hbar$ 。此结果与泡利方程完全一致，该方程成功地描述氢原子光谱在磁场中分裂的塞曼效应。由此解释了自旋轨道回旋磁比率是轨道角动量回旋磁比率两倍的事实，以及在角动量量子数 $l=0$ 的s轨道上运动的基态电子为何能稳定存在，不落入原子核的原因。

在此基础上，本文揭示BCS理论的库珀对形成的微观机制。库珀对是在临界温度下导体中自由电子的能量减少后回归到束缚态，重新变成绕原子核的s轨道做圆周运动的电子对。受泡利不相容原理的限制，这两个电子的动量和角动量（即所谓的自旋）方向相反。

也就是说，在临界温度下，固体物质所有的原子核都停止振动。导体中的自由电子全部回归各自的原子系统，导体中不再有自由电子。由此形成一种新的物质状态，与临界温度下液氦的超流态对应，可以称这种物质状态为超凝态。

采用这种图像，可以很好地解释低温超导的迈斯纳效应，阐明库珀对电子之间既存在电声作用吸引力，又存在库伦排斥力的问题，计算了吸引力和排斥力的大小和存在条件。证明库珀对电子在外磁场的作用下会产生抗磁性，同时解释第二类超导体的磁学性质。由此，BCS理论与库珀对有关的平衡态与相变理论大部分都能得以保留。

本文解决了原子的稳定性问题，提出韧致辐射新理论，严格证明了欧姆定律，提出超导理论新机制，揭示了电子自旋的本质，将产生超导能隙的原因归结于原子核的热运动，认为高温超导应该考虑电子与晶格上原子核的强关联相互作用，从原子结构的角度，给出形成库珀对和产生迈斯纳效应的微观机制，可为高温超导的理论和实验研究提供新的思路，并对固体物理学产生重要影响。

## 二 带电粒子在周期电场中运动的稳定性

### 2.1 电子在自由空间中受周期电场力作用的运动

本节讨论天线辐射问题，证明天线的边界条件对天线是否辐射有至关重要的作用。先讨论电子在自由空间中受周期性电场的作用下的运动，所谓自由空间就是除了电子和电磁场外没有其他物质的空间，电子的运动不受边界条件的限制。在周期电场 $E = E_0 \sin \omega t$ 的作用下，考虑到狭义相对论的质速公式，电子的运动方程为：

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = -qE_0 \sin \omega t \quad (1)$$

将上式积分，得：

$$\frac{V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{V_0}{\sqrt{1-V_0^2/c^2}} = \frac{qE}{\omega m_0} (\cos \omega t - \cos \omega t_0) \quad (2)$$

令 $t = t_0$ 时 $V_0 = 0$ ，相角 $\theta_0 = \omega t_0 = \pi/2$ ，等价于 $t_0 = \pi/(2\omega)$ ，从上式得：

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{qcE_0 \cos \omega t}{\sqrt{(c\omega m_0)^2 + (qE_0)^2 \cos^2 \omega t}} \quad (3)$$

令 $t = t_0$ 时 $x = x_0$ ，再积分一次，得：

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t \frac{qcE_0 d \sin \omega t'}{\omega \sqrt{(c\omega m_0)^2 + (qE_0)^2 (1 - \sin^2 \omega t')}} \quad (4)$$

$$\text{令:} \quad qE_0 \sin \omega t' = y' \quad (c\omega m_0)^2 + (qE_0)^2 = b^2 \quad (5)$$

上式变为:

$$x - x_0 = \frac{c}{\omega} \int_{y_0}^y \frac{dy'}{\sqrt{b^2 - y'^2}} dy' = \frac{c}{\omega} \left( \arcsin \frac{y}{b} - \arcsin \frac{y_0}{b} \right) \quad (6)$$

由于  $t = t_0$  时  $\omega t_0 = \pi/2$ ,  $y_0 = qE_0$ , 就有:

$$\frac{\sin \omega t}{\sqrt{1 + (c\omega m_0 / qE_0)^2}} = \sin \left[ \frac{\omega}{c} (x - x_0) + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + (c\omega m_0 / qE_0)^2}} \right] \quad (7)$$

从 (3) 可知  $V/c < 1$ , 由于对  $x - x_0$  是没有限制的。我们总可以找到  $x$  和  $t$ , 使它们满足 (7) 式。因此电子在长度无边限制的周期性电场中的运动是可能的, 就没有必要通过辐射来改变运动状态。如果计算辐射功率, 将 (1) 式对时间微分, 可得加速度:

$$a = - \frac{qE_0 \sin \omega t (1 - V^2 / c^2)^{3/2}}{m_0} \quad (8)$$

代入辐射公式, 并用推迟时间来表示, 即令  $t^* = t$ , 电子的辐射功率为:

$$P_{11} = \frac{q^4 E_0^2 \sin^2 \omega t}{6\pi \epsilon_0 c^3 m_0^2} \quad (9)$$

设电场  $E_0 = 10^3$  伏/米, 频率  $\omega = 10^5$ ,  $\sin \omega t = 1$  时, 电子最大辐射功率为  $P_{11} = 1.75 \times 10^{-25} W$ , 最小为零, 平均辐射功率为  $\bar{P}_{11} = 8.80 \times 10^{-26} W$ 。按 (3) 式计算, 电子最大的速度为  $V = 0.99977c$ 。按相对论公式计算, 电子的最大动能为  $3.88 \times 10^{-12}$  焦耳, 平均动能为  $T = 1.94 \times 10^{-12}$  焦耳。要把这个动能全部辐射掉, 需要的时间是  $\Delta t = T / P_{11} = 2.20 \times 10^{13}$  秒, 约等于 70 万年。

将这个结果用于无限长交流电的输送过程, 设导线的平均电流强度  $I = 0.01$  安培, 电子速度取平均值  $V = 0.5c$ , 单位时间内通过导线截面的电子数则为  $4.17 \times 10^8$ 。也就是说一米长的导线内有  $4.17 \times 10^8$  个电子在做加速运动, 总辐射功率是  $3.67 \times 10^{-18}$  瓦。可见按照公式 (9) 计算, 辐射非常小, 以至于可以认为实际上不辐射。

然而问题在于, 如果电子在长度有限的天线中做周期性加速运动, 就有很强的辐射。比如一根 1 米长的天线, 用  $U = 1000$  伏的交流变压器为动力, 电场  $E_0 = 10^3$  伏/米。设 LC 电路的振荡频率为  $\omega = 10^5$  (波长为 478 米的中波), 电流强度同样是  $I = 0.01$  安培。取天线辐射等效电阻  $R_{rad} = 50$  欧姆, 天线辐射功率就为  $P = IR^2 / 2 = 12.5$  瓦, 比自由空间中受周期电场作用的电子的辐射功率大  $3.41 \times 10^{18}$  倍!

为什么在同样的条件下, 边界有限和边界无限时电子的辐射会有这样大的不同, 现有理论没有解释。这其中一定存在我们目前不了解的机制, 以下来讨论这个问题。

## 2.2 天线辐射的本质是韧致辐射

以下我们证明，在边界有限周期性电场中，电子的运动受到限制。天线末端高速运动电子会被迅速地减速，会产生韧致辐射。韧致辐射指带电粒子经过原子核附近，被核电场快速减速时导致的辐射，或者说辐射由电子被原子核减速引起。因此电子在周期性电场中的加速运动不是天线辐射的原因，电子运动方式受限导致的韧致辐射，才是天线辐射的本质原因。

同样取天线长度 1 米，电场  $E_0 = 10^3$  伏/米，频率  $\omega = 10^5$ ，有：

$$\left(\frac{c\omega m_0}{qE_0}\right)^2 = 4.55 \times 10^{-4} \ll 1 \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+(c\omega m_0/qE_0)^2}} \sim \arcsin \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

(7) 式可以简化为：

$$\sin \omega t \approx \sin\left(\frac{\omega}{c}(x-x_0) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (11)$$

设  $x_0$  是天线的中点，就有  $|x-x_0| \sim 0.5$  米，有：

$$\frac{\omega}{c}|x-x_0| \leq 1.67 \times 10^{-4} \ll \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

(11) 式左边的取值范围是  $-1 \sim +1$ ，但右边的取值范围在  $+1$  附近，因此 (11) 式一般不成立。比如  $t = \pi/\omega$  时 (11) 式左边等于零，但右边不可能等于零，除非  $\omega(x-x_0)/c \sim \pm\pi/2$ 。这意味着  $|x-x_0| = 471$  米，大大超出 1 米天线的限制。再如  $t = 3\pi/(2\omega)$  时  $\sin \omega t = -1$ ，按 (11) 式则有  $\omega(x-x_0)/c = \pm\pi$ ， $|x-x_0| = 942$  米。因此 (11) 式无法描述长度等于 1 米天线中电子的正常运动。

以上讨论中假设初始相角  $\theta_0 = \pi/2$ 。如果  $\theta_0 \neq \pi/2$ ，(4) 式无法积分。但由于物理过程与初相角取值无关，一般的情况下，以上结论仍然成立。比如忽略 (7) 式右边括号内第二项，考虑 (10) 式，就有：

$$\sin \omega t \approx \sin\left[\frac{\omega}{c}(x-x_0)\right] = -0.0085 \sim 0.0085 \quad (13)$$

这个关系仍然是一般不可能成立的。

然而长度 1 米， $E_0 = 10^3$  伏特/米和  $\omega = 10^5$  的天线是可以制造的，因此在这个天线中电子的实际运动方式只能如下。在  $\sin \omega t > 0$  时电场力为正，天线内的自由电子正向运动。到达天线的顶端时运动受阻，被迅速减速，所有的电子都静止在同一端，另一端则出现相应的正电荷。一直等到  $\sin \omega t < 0$  时电场力变负，所有电子同时反向运动，且最终又都静止在天线的另一端。

如此反复形成振荡，在天线的两个末端产生电磁波辐射，其物理图像可以用偶极子振荡来简化描述。如果天线足够长，电子不会在末端累积，只是交流电在导线中运动。天线不会发生振荡，就不会产生大量的辐射。虽然电子在导线中运动，与导线中的原子核碰撞，仍然会产生少量的辐射。

从微观的角度看，电子运动到天线的末端时无法脱离导线。在天线末端原子电场的作用下，电子会被突然减速，产生的辐射实际上是韧致辐射。由于所有的电子在导线末端都被突然减速，产生的韧致辐射就会很大。如果天线足够长，电子在周期电场作用下不会到达天线末端，就不存导线末端所有电子都被突然减速的事情，天线的辐射就被大大减少。

按照 (7) 式，天线发生振荡产生辐射，满足的条件是：

$$\frac{c\omega m_0}{qE_0} \ll 1 \quad \text{和} \quad \frac{\omega}{c}|x-x_0| < \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

对于  $E_0 = 10^3$  伏/米,  $|x - x_0| = 0.5$  米的天线, 辐射电磁波的最高频率为  $\omega = 9.42 \times 10^8$  (毫米波)。如果超出这个频率, 就没有电磁波辐射。比如  $\omega = 10^{10}$ , 就有:

$$\frac{\omega}{c}|x - x_0| = 16.7 \quad \frac{c\omega m_0}{qE_0} = 1.71 \times 10^4$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{c\omega m_0}{qE_0}\right)^2} \approx 1.71 \times 10^4 \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + (c\omega m_0 / qE_0)^2}} = 5.85 \times 10^{-5} \quad (15)$$

(7) 式变成:

$$\sin \omega t = 1.72 \times 10^4 \sin \left[ \frac{\omega}{c}(x - x_0) + 5.85 \times 10^{-5} \right] \quad (16)$$

上式可以成立, 就没有导线末端电子的韧致辐射, 这就是一般无线电发射天线无法发射红外光和可见光的原因。天线辐射实际上主要发生在天线的两个末端, 中间部分的辐射比较少, 虽然电子在天线的中间部分也是做加速或减速运动。

可见天线中间部分电子的加速运动不是天线辐射的原因, 发生在天线末端的韧致辐射才是天线辐射的主要原因。实验发现, 天线有较尖锐的转角, 就会产生强烈的辐射, 这也与电子在末端天线的单向运动受阻有关。在天线的中间部分, 电子受到前后原子核热运动的影响, 产生的辐射就构成电阻的热辐射, 只是这种辐射比末端的辐射小得多。

第三章详细讨论韧致辐射的具体机制, 说明它与带电粒子在原子核电场中运动的稳定性有关。

### 三 原子的稳定性与韧致辐射的本质

#### 3.1 电子在原子核向心力场中的运动方程

设原子核静止, 核电荷是  $Q$ , 电子电荷是  $q$ , 考虑到质速公式, 原子中单个电子的运动方程是:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = - \frac{qQ\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (18)$$

设电子在平面上运动, 采用平面极坐标, 令  $dr/dt = \dot{r}$ ,  $d\theta/dt = \dot{\theta}$ , 可以将 (18) 式改写为【3】:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \dot{r}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{m_0 r \dot{\theta}^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 0 \quad (20)$$

将 (19) 和 (20) 式积分, 得到电子在原子核场中的运动轨迹方程【4】:

$$r = \frac{p}{1 + E \cos(\sqrt{1 - \rho^2} \theta)} \quad (21)$$

其中:

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{Qq}{r} = \text{常数} \quad K = \frac{m_0 r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \text{常数} \quad (22)$$

$$\rho = \frac{Qq}{Kc} \quad p = \frac{K^2 c^2 - Q^2 q^2}{QqE} \quad (23)$$

(21) 式描述一个椭圆的进动轨道， $E$  是电子在原子电势场中的总能量， $K$  为电子绕核运动的角动量。(21) 式描述的轨道是稳定的和可实现的，意味着原子中做加速运动的电子不需要辐射。

如果不是这样理解，就会出现原子不稳定的问题。按照经典电磁理论的辐射公式：

$$P_{\perp} = \frac{q^2 a^{*2}}{6\pi\epsilon_0 c^3 (1-V^{*2}/c^2)^2} \quad (24)$$

式中  $V^*$  是推迟速度， $a^*$  是推迟加速度，假设电子做圆周运动，按照量子力学的计算，可以得到氢原子中基态电子的加速度  $a^*$  【5】。氢原子中基态电子的辐射功率则为：

$$P_{\perp} = \frac{q^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_0^2 r^4 (1-V^2/c^2)} \quad (25)$$

氢原子基态电子能量  $E_1 = 13.55eV = 2.17 \times 10^{-18}$  焦耳，其中一半是势能一半是动能。动能对应的速度是  $V/c = 5.14 \times 10^{-3}$ 。令  $r$  为第一波尔轨道半径，即  $r = 0.53 \times 10^{-10}$  米。将以上参数代入 (25) 式计算，得  $p_{\perp} = 4.60 \times 10^{-8}$  瓦特， $E_1/P_{\perp} = 4.72 \times 10^{-9}$  秒。意味着基态电子在  $4.72 \times 10^{-9}$  秒内就会丧失全部能量，落到氢原子核上，然而原子实际上是稳定的。

也许有人认为，按照量子力学，原子中的电子没有确定的轨道，谈论电子绕核的轨道运动没有意义。但这种说法没有意义，且不论电子是否有运动轨道，我们可以考虑宏观电流圈，比如超导线圈电流的辐射，证明 (25) 式不成立。

设有超导线圈中有  $10^{10}$  个自由电子，同样设电子以  $0.00514c$  的速度绕半径为  $R=0.05$  米的超导环运动。 $10^{10}$  个电子的总动能  $T = 1.09 \times 10^{-8}$  焦耳，电流强度  $I = 0.0031$  安培。电子的加速度  $a = V^2/R$ ，按 (25) 式计算，可得  $p_{\perp} = 1.84 \times 10^{-7}$  瓦特， $10^{10}$  个电子的动能全部辐射掉花费的时间  $\Delta t = T/P_{\perp} = 0.059$  秒。然而我们知道，超导线圈中电流是稳定的，根本不可能有这样大的辐射。

### 3.2 电子在原子核有心力场中的不稳定运动

以上讨论是原子核静止，电子绕核的椭圆轨道进动是稳定的，可以不需要辐射。如果电子不是做绕核运动，而是从远处高速射向原子核，情况就可能完全不一样。由于电子的初始位置和初始速度是任意的，加上原子核的随机运动，高速运动电子在原子核附近被减速时，就有可能偏离稳定的轨道，导致速度变成虚数或超光速，从而产生辐射，以下进行分析。考虑：

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \frac{V_x}{V} \frac{dV_x}{dt} + \frac{V_y}{V} \frac{dV_y}{dt} + \frac{V_z}{V} \frac{dV_z}{dt} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{a}}{V} \quad (26)$$

可以将 (26) 式左边的微分改写为：

$$\frac{m_0 \vec{a}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{m_0 \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{a})/c^2}{(1-V^2/c^2)^{3/2}} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (27)$$

用  $\vec{r}$  叉乘 (27) 式, 得到方程在与  $\vec{r}$  垂直方向的投影:

$$\frac{m_0(\vec{r} \times \vec{a})}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{m_0(\vec{r} \times \vec{V})(\vec{V} \cdot \vec{a})/c^2}{(1-V^2/c^2)^{3/2}} = 0 \quad (28)$$

对于电子在原子核电场中运动, 一般有  $\vec{r} \times \vec{a} \neq 0$ ,  $\vec{r} \times \vec{V} \neq 0$ ,  $\vec{V} \times \vec{a} \neq 0$ , 比电子在磁场中运动的情况复杂得多。如图 1 所示, 令  $\vec{e}_r$  和  $\vec{e}_\theta$  代表极坐标系中两个相互垂直的方向,  $\vec{V}$  和  $\vec{e}_\theta$  的夹角为  $\alpha$ ,  $\vec{a}$  和  $\vec{e}_\theta$  的夹角为  $\beta$ ,  $\vec{F}_E$  与  $\vec{e}_r$  方向相反。就有  $\vec{V} \cdot \vec{a} = Va \cos(\beta - \alpha)$ ,  $\vec{r} \times \vec{a} \sim ra \sin(\beta - \pi/2) = -ra \cos \beta$ ,  $\vec{r} \times \vec{V} = -\vec{V} \times \vec{r} \sim -Vr \sin(\pi/2 - \alpha) = -Vr \cos \alpha$ 。代入 (28) 式, 得到电子在与  $\vec{r}$  垂直方向上的运动满足的关系:

$$-\cos \beta - \frac{\cos \alpha \cos(\beta - \alpha)V^2/c^2}{1-V^2/c^2} = 0 \quad (29)$$

或: 
$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) / \cos \beta} \quad (30)$$

考虑到  $V/c < 1$ , 就应当有:

$$\frac{\cos \alpha \cos(\beta - \alpha)}{\cos \beta} = \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) < 0 \quad (31)$$

或: 
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < -1 \quad (32)$$

$\alpha$  位于第一和第三象限时  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ , 位于第二和第四象限时  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ 。如果  $\alpha$  位于第一和第三象限, 要使 (32) 式成立,  $\beta$  就应当位于第二和第四象限。如果  $\alpha$  位于第二和第四象限,  $\beta$  就应当位于第一和第三象限。同时还要满足 (32) 式, 否则电子的运动不稳定, 仍然要辐射。

假设  $\alpha$  位于第一象限, 图 1 的运动是不稳定的, 电子要辐射。图 2 的运动是可能的, 但还必须满足 (32) 式。令  $\beta = 270^\circ + \delta$ ,  $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \delta$ , (32) 式变成  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \delta > 1$  或  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \delta$ , 即  $\alpha > \delta$ 。如果  $\alpha < \delta$ , 电子的运动是不稳定的, 仍然要辐射。

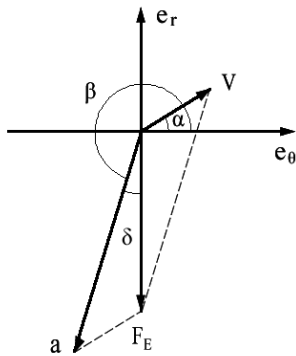


图 1 电子在有心力电场中不可能的运动方式 1, 电子要辐射。

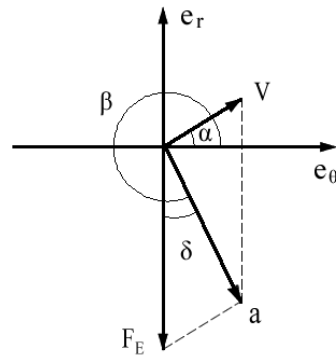


图 2 电子在有心力电场中可能的运动方式 1, 电子不辐射。

如果  $\alpha$  位于第四象限, 图 3 的运动是不可能的, 电子要辐射。图 4 的运动是可能的, 但要同时满足 (32) 式。令  $\beta = 270^\circ - \delta$ ,  $\alpha = -\Delta$ , 我们有  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \delta$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \Delta$ 。(32) 式变为  $\operatorname{tg} \Delta \operatorname{ctg} \delta > 1$



或  $\text{tg}\Delta > \text{tg}\delta$ ，即  $\Delta > \delta$ 。如果  $\Delta < \delta$ ，电子的运动是不稳定的，仍然要辐射。此外如果  $\vec{V} \cdot \vec{a} = 0$ ，电子在有心力电场中做圆周运动，也是不辐射的。事实上由于有  $\delta$  和  $\Delta$  两个自由度可供选择，电子在有心力场的中的相对论运动一般是可能的，电子不需要辐射，因此原子在一般情况下是稳定的。

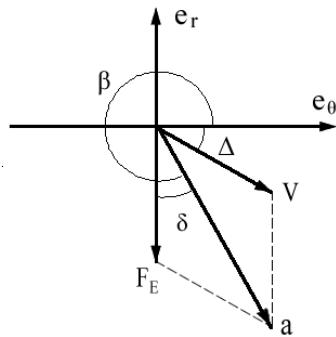


图 3 电子在向心力电场中不可能的运动方式 2，电子要辐射。

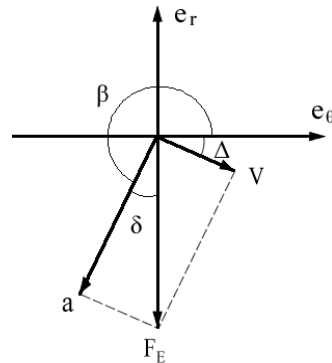


图 4 电子在向心力电场中可能的运动方式 2，电子不辐射。

在加速器的同步光源中，用振荡器和扭摆器使电子产生辐射。振荡器和扭摆器必须用方向交替变化的磁场【1】，不能用交替变化的电场，其道理就在此。在高速电子速度垂直的方向上施加周期电场，也会使电子的运动轨道发生摆动。然而如前所述，电子在自由空间中受周期电场作用的运动是稳定的，就不需要辐射。我们不可能通过交替电场的作用，来使自由电子产生激光。

### 3.3 韧致辐射的本质

按照现有的物理学理论，带电粒子的辐射有两种机制。一种是量子力学的受激跃迁辐射，电子吸收一个光子，跃迁到高能级，然后发射一个光子跃迁到低能级。在这种跃迁过程中，电子的运动轨道是不连续的。

第二种是经典电磁理论的辐射，即带电粒子在电磁场中被加速导致辐射。这种方式过程中，电子的轨道是连续变化的。本文以上讨论认为，这种方式机制需要修正。带电粒子的辐射不是由于加速度，而是由于在在电磁场中运动的不稳定性，才会导致辐射。如果电子的运动是稳定的，就不会辐射。

因此，本文对韧致辐射的机制理解与现有经典电磁理论的理解是不同的。按照经典电磁理论，韧致辐射是由于电子在原子核附近做减速度引起。按照本文，韧致辐射是由电子在原子核电场中的运动不稳定性引起。高速运动的电子接近原子核时，由于原子核的热运动，使核电场快速改变，扰乱了电子的运动轨道，导致电子的运动不稳定（如图 1 和图 3）。于是电子就不得不进行辐射，来使自己的运动成为可能。

从狭义上说，韧致辐射是高速带电粒子通过原子核电场时，被减速发出的高能辐射，比如 X 射线。从广义上说，电子在库仑场中的辐射都是韧致辐射，它的频率分布是很广的，从无线电波到红外光，可见光甚至 X 光。因此，电子在导体中运动时，如果晶格上的原子存在热运动，也会对电子的运动产生干扰，从而产生韧致辐射。虽然在温度不高时，这种韧致辐射的频率可能很低，可以从无线电波到红外线波段。但如果导体通过电流很强温度很高，就会产生高频的辐射，发出可见光。

## 四 电阻的本质和欧姆定律的证明

### 4.1 欧姆定律

导体电阻的观念最早起源于欧姆定律，1859年欧姆在实验发现，在导体中通电时，电压 $U$ 与电流密度 $I$ 成正比，比例系数就被称为电阻 $R$ ，三者之间的关系就是欧姆定律：

$$U = RI \quad (33)$$

欧姆定律是电磁学的一个基本公式，至今没有严格的推导。虽然有一些所谓的推导，但都非本质的。欧姆定律实际上是经验公式，它被称为定律，而不是成为定理。

所谓电阻，顾名思义，就是电子通过导体时遇到的阻力。然而什么原因导致电子在导体中受阻，实际上是一个仍然没有完全解决的问题。物理学上至今已经有许多方法推导电阻或电导率（电阻的倒数），但都是不完整的。只有把电阻与电子的韧致辐射的关系搞清楚，才能完全了解产生电阻的问题，从而把高温超导问题解释清楚。

本文考虑电子在导体中运动与原子核相互作用产生的韧致辐射，从动力学角度证明欧姆定律，并同时阐明电阻的真正意义，欧姆定律也就变成欧姆定理。

### 4.2 电阻的宏观解释

按照目前的一般的看法，导线通电后，导体内的自由电子在电场的作用下运动速度加快。电子与晶格上的原子核发生碰撞，将动能传递给原子核，使晶格振动加剧，导致导体温度上升。电子的动能转化为晶格振动热能，形成热耗散，就是所谓的电阻。

这种解释属于宏观上的解释，它不是完全正确的。它把电阻产生的原因归结为晶格振动产生热能，没有考虑到电子的散射和辐射对电阻的影响。它没有说清为什么电流加大后，导体会变红甚至发光。由于电子的质量比原子核小得多，在通电过程中，电子的碰撞对原子核运动速度的影响是很小的，原子核的加速度改变很小。由于原子核之间通过发射声子产生相互作用，如果产生辐射，其频率不会超过声子的频率，更不会发出红外光和可见光。

### 4.3 用输运理论推导电导率

事实上，所谓的碰撞是一种很粗糙的说法。更精确的说法是，电子经过原子核附近时，在原子电场的作用下轨迹发生改变，物理学有很精确的方法，来计算电子在散射过程的运动轨迹。

对电阻更为微观的解释是，考虑统计物理学中电子的输运过程，以及原子核对电子的散射，引入弛豫时间概念，将产生电阻的原因归结为原子的热运动对电子的散射。我们引用晶格动力学理论的提出者，黄昆先生的经典著作《固体物理》的两段话来说明电阻的来源【6】：

“在理想的完全规则排列的原子的周期场中，电子将处于确定的 $k$ 状态，不会发生跃迁，因此也就没有电阻可言。但是实际的原子并不静止地停留在格点上，由于不断的热振动，原子经常偏离格点。原子偏离格点的影响，可以看成是对周期场的微扰，从而引起电子的跃迁，这中散射机制常称为晶格散射”。“一般晶金属的电阻是由于原子的热振动对电子的散射引起，散射的概率与原子的位移的平方成正比，而后者在足够高的温度与 $T$ 成正比”。

在该书中，黄昆得到的电导率公式是【6】：

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau(E_F)}{m^*} \quad (34)$$

式中  $m^*$  是电子的有效质量， $n$  是电子密度。 $\tau$  是弛豫时间，它与绝对温度的关系是：

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\kappa T}{NMhc^2} f(E_F) \quad (35)$$

按照这种解释，如果晶格上的原子静止，就不会对电子产生散射，也就不会产生电阻。晶格上原子的振动不是产生电阻的直接原因，电子被原子散射才是的产生电阻的直接原因。

这种看法更接近事实真相，它与本文的电子运动不稳定导致辐射是一致的。然而，这种看法的缺点是，仍然没有解释清楚电子被原子散射后是否会产生辐射。从微观相互作用上看，晶格热运动会发出声子，晶格上的原子通过声子与电子相互作用。但声子不是真正的可以观察到的粒子，它只代表晶格能量转移的量子化，不是象光子一样是实际的存在。事实上根据计算，声子的频率很低，不高于  $10^{12} \text{ Hz}$ ，但可见光的频率在  $10^{14} \text{ Hz}$  以上，不足以解释导体的发光现象。

此外，在极低的温度下，原子核停止振动。按照经典电磁理论，电子经过原子核附近时，仍然要被减速并产生辐射，仍然会有电阻。但实际情况并不是这样，在极低温条件下，有些导体没有电阻，变成超导体，有些仍然有电阻不是超导体，情况是很复杂的。

#### 4.4 韧致辐射对电阻的影响

如果按照本文以上讨论，从韧致辐射的角度，就可以解释清楚电阻的产生原因。在临界温度以上，晶格上原子核振动。电子在晶格之间的运动受到干扰，变得不稳定，就不得不通过辐射来改变运动状态，使运动能够继续。电子在辐射过程产生辐射阻尼力，构成电阻的主要成分之一。

也就是说电阻除了要考虑原子对电子的散射，还要考虑被散射电子辐射，而电子的辐射就是韧致辐射。事实上按照定义，电子在库仑场中的辐射就是韧致辐射，它的频率分布很广，从无线电波到红外光、可见光甚至 X 光。它可以覆盖电阻的所有辐射波段，不同的只是强度的大小。除此之外，我们没有找不到更好的机制，来解释导体通电后电阻热辐射的来源。

在低温条件下，原子核的振动停止。按照本文的计算，电子经过原子核附近时，可以不辐射地绕过。但电子若直接与原子碰撞，仍然会发出辐射。当导体的温度升高时，原子核的运动干扰电子的运动，为了使运动能够继续，电子就不得不辐射。导体中晶格上原子的热运动就是通过这种方式影响电子的运动的，只有按照这种方式，我们才可能从微观上把产生电阻的原因讲清楚。

#### 4.5 欧姆定律的证明

以下我们从电子在导体中运动受力的情况，来证明欧姆定律，并进一步说明电阻的物理意义。

一般的材料在整体上是电中性的，在外部观察不到电荷。但在材料内部，由于各种原子正负电荷分布的不均匀性，从局部上看就不是电中性的。将这种电场称为局部电场，加上原子的热运动导致电荷分布的改变，自由电子在材料中的运动是要受局部电场的严重影响的。

经典电磁理论中所谓的导体内电场强度为零，指的是定向电场，而不是局部电场。事实上，物体内的原子分子就是靠电磁相互作用来维系的。如果内部如果没有电磁力作用，物体内的原子分子都将分崩离析，根本不会有材料物质存在。

在经典电磁理论中，电阻是通过欧姆定律的公式 (33) 式来定义的，其中  $U$  是电压（实际上是电压差）， $R$  是电阻， $I$  是电流强度。距离为  $l$  的两点之间的电压的定义是，单位正电荷在外电场

力的作用下经过路程  $l$  所做的功。

导体通电时，假设外电场强度是  $\vec{E}_0$ ，导体内局部电场强度是  $\vec{E}_1$ 。电子在原子核电场中运动产生韧致辐射，单位电荷受到的辐射阻尼力是  $\vec{E}_2$ 。单位时间内通过任一截面的电子数是  $n$ ，电子受合力做功为：

$$\begin{aligned} dU' &= nq(\vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot d\vec{l} = nq(\vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt \\ &= nq(\vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \vec{V} dt = (\vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \vec{I} dt \end{aligned} \quad (36)$$

$\vec{I} = nq\vec{V}$  是电流强度。假设在此合力作用下，系统达到平衡后，电子以匀速运动， $\vec{V} = \text{常数}$ ，电子所受到的合力变为零。将 (36) 式对时间积分，就有：

$$\int dU' = \vec{I} \cdot \int (\vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2) dt = 0 \quad (37)$$

其中外电场力做的功就是电压差：

$$\Delta U = nq \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \vec{I} \cdot \int \vec{E}_0 dt \quad (38)$$

由于力对时间的积分等于冲量，按照 (38) 式，电压又等于电流强度与电冲量的乘积。将 (38) 代入 (37) 式，得到：

$$-\vec{I} \cdot \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) dt = \Delta U \sim U = IR \quad (39)$$

因此，我们可以将电阻定义为：

$$R = \left| \int \vec{E}_1 dt \right| + \left| \int \vec{E}_2 dt \right| = R_1 + R_2 \quad (40)$$

(40) 式表示，电阻等于电子在导体中匀速运动经过某距离时，导体内局部电场和辐射阻尼力对经历的时间的积分。其中  $R_1$  在本质上就是 (34) 式描述的，电子被晶格散射导致的电阻。 $R_2$  则是电子韧致辐射导致的电阻，这部分电阻至今一直被忽略，但它是不可忽略的。

(41) 考虑到电场强度  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  是坐标的函数，通过求解力学运动方程，可以得到电子的坐标对时间的依赖关系  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ，我们原则上可以通过 (40) 式对时间的积分，求出电阻的具体数值。临界温度下出现超导性，就要求  $R_1 = R_2 = 0$ 。

(39) 式表示，导体内局部电场和辐射阻尼力抵抗外电场做的负功，数值上等于外电场做的功，负功代表热耗散。因此外电场做正功使电流通过导体，电子获得定向动能，同时产生电阻，引起热耗散。由此，我们就证明了欧姆定律，阐明了电阻的电动力学本质。

## 五 超导新机制

### 5.1 BCS 理论的能隙与临界温度公式

1957 年提出的 BCS 理论，对于低温超导问题是有效的。对于 1986 年后发现的高温超导现象，BCS 理论难以解释【7】。尽管目前已经提出许多对 BCS 理论的修正理论【8】，但仍然无法处理高

温超导问题。这类修正理论都非常复杂，很难有效地用于实际情况。高温超导需要一个更简单有效的方法，计算临界温度。

BCS 理论认为，电声相互作用导致电子形成库珀对，产生超导能隙。这种解释对于低温超导是有效的，但也存在物理图像不是很清晰的问题。尤其对高温超导体，会出现多能隙和赝能隙等许多反常现象，用 BCS 理论难以解释【9】。

在 BCS 理论的原始论文中，通过非常复杂的推导，得到超导体的临界温度  $T_c$  与能隙  $\Delta$  的关系【10】：

$$\frac{2\Delta(0)}{\kappa T_c} = 3.52 \quad (41)$$

式中  $\kappa$  是玻尔兹曼常数。对大多数低温超导体，(41) 式与实验基本一致，但对某些超导体则偏差比较大【11】。比如对于铅，实验证明 (41) 式右边等于 4.3，对于汞则等于 4.6。(1) 式与超导材料的晶体结构无关，也是与实际情况不符的。对于高温超导，(41) 式则是完全不符的【12】。

1968 年，麦克米兰导出更为复杂的临界温度公式。结合实验参数后，断定常规超导体的临界温度有一个上限 40K，被称为麦克米兰极限【13】。然而 1986 年以来发现的大量高温超导体，临界温度都超过麦克米兰极限。至今为止，物理学家一直没有找到没有合适的公式，可用来计算高温超导体的临界温度。

本文附录通过详细计算证明，(41) 式是不成立的。原因在数学方面，BCS 理论推导该公式时，对一个关键式的积分存在严重的错误。(41) 式右边的数字 3.52 实际上是拼凑出来的，而不是计算出来的。因此 (41) 式是没有意义的，超导理论需要寻找新的临界温度计算公式。

本文从原子核与核外电子相互作用的角度，来讨论超导能隙的起源和超导温度。认为在临界温度下导体中的原子核停止振动，是出现超导现象的更重要的原因。按照这种想法，本文证明超导体中能隙是由于导体中原子核热运动的位移，使核外电子产生的势能差引起，并给出计算单个能隙和多个能隙的方法。

在此基础上，本文根据经典力学理论，讨论一维无限长晶格上原子核停止振动的条件，通过一个简单的方法，导出一般元素超导体临界温度的公式：

$$\frac{2\Delta}{kT_c} = \frac{1}{2.36N} \frac{R^3}{r^3} \quad (42)$$

式中  $r$  是原子核外层电子的轨道半径， $R$  是晶格上两个原子核之间的距离， $N$  是考虑电子屏蔽后原子核的有效正电荷数。按照 (42) 式，临界温度除了与能隙有关外，与  $R/r$  的三次方成正比。取  $N = 2$  和  $R/r = 2.55$  时，(42) 式就与 (41) 式一样。对于铅、汞和其他用不合物 (41) 式计算的超导体，用 (42) 式计算，能够得到与实际测量完全一样的结果。

因此对于低温超导体，本文公式比 BCS 理论的公式更符合实验。对不同的复合超导体和高温超导材料，按照本文的方法和 (42) 式，可以得到类似的临界温度表达式。

## 5.2 超导能隙起源于原子核的热运动

### I) 单能隙

先讨论一个原子核与一个电子的情况，假设在临界温度以下时，原子核静止在坐标原点上，没

有运动速度，电子在原子核势场中的电势能为：

$$U_0 = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (43)$$

在临界温度以上时，原子核存在热运动，原子核的中心坐标就会偏离坐标原点的距离是  $\delta$ 。在任意时刻，电子的电势能改写为：

$$U = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r+\delta} \quad (44)$$

结果导致电子势能的改变，电子从超导态跃迁到正常态时，就需要吸收更多的能量，导致超导能隙。

假设原子核在临界温度时，偏离坐标原点的最大距离为  $\pm\delta$ ，且有  $\delta/r \ll 1$ 。令电子的电荷为  $-q$ ，考虑原子的内层电荷的屏蔽作用，原子核的有效正电荷为  $Q = Nq$ 。令原子核沿  $x$  轴方向振动，电子在原子核电场中势能的平均值为：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(U_+ + U_-) = -\frac{Nq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{(x+\delta)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\delta)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= -\frac{Nq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{\sqrt{1+2x\delta/r^2 + \delta^2/r^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-2x\delta/r^2 + \delta^2/r^2}} \right) \\ &\approx -\frac{Nq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\delta^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

与 (43) 式比较，将临界温度以下和临界温度时电子在原子核电场中的势能差看做超导能隙，则有：

$$\Delta = U_0 - U = \frac{Nq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta^2}{r^2} \quad (46)$$

按照 (46) 式，只要知道临界温度时原子核的振动幅度，就可以计算出超导体的能隙，我们有：

$$\delta^2 = \frac{\Delta 4\pi\epsilon_0 r^3}{Nq^2} \quad (47)$$

已知汞的临界温度  $T_c = 4.2K$ ，令 (41) 式右边等于 4.6，得到  $\Delta = 1.33 \times 10^{-22} J$ 。汞晶体的两个原子核之间的距离（晶格常数） $R = 3 \times 10^{-10} m$ 。假设原子最外层电子轨道半径是晶格上两个原子核之间的距离的一半，即  $r = R/2 = 1.5 \times 10^{-10} m$ 。电子电荷  $q = 1.60 \times 10^{-19}$ ，介电常数  $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12}$ ，将这些数据代入 (47) 式计算，可得：

$$\delta^2 = \frac{1.95 \times 10^{-24}}{N} \quad \delta = \frac{1.40 \times 10^{-12} m}{\sqrt{N}} \quad (48)$$

汞原子核的正电荷数是 80，如果取  $N = 80$ ，则有  $\delta = 1.57 \times 10^{-13} m$ 。汞原子内层的电子数是 78，如果取  $N = 2$ ，就有  $\delta = 10^{-12} m$ 。因此在临界温度附近，汞原子核热运动的位移为  $10^{-12} \sim 10^{-13} m$ ，是电子绕核运动轨道半径的  $10^{-2} \sim 10^{-3}$ ，这在数量级上是合理的。

## II) 双能隙

对于由许多不同原子组成的晶格，温度的改变对电子势能的影响是复杂的，有可能出现多能隙。假设电子在晶体中的运动受两个原子核的影响，在临界温度以下，两个原子核都静止在坐标原点上，没有运动速度，电子在原子核势场中的电势能为：

$$U_0 = -\frac{Q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} - \frac{Q_2 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} \quad (49)$$

在临界温度时，热运动使两个原子核的中心坐标都偏离坐标原点。设原子核沿  $x$  轴方向振动，偏离坐标原点的最大距离为  $\pm \delta_1$  和  $\pm \delta_2$ ，电子的平均电势能改写为：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(U_+ + U_-) = -\frac{N_1 q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_1 + \delta_1)^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \delta_1)^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right) \\ &\quad - \frac{N_2 q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_2 + \delta_2)^2 + y_2^2 + z_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_2 - \delta_2)^2 + y_2^2 + z_2^2}} \right) \\ &\approx -\frac{N_1 q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} \left( 1 + \frac{\delta_1^2}{r_1^2} \right) - \frac{N_2 q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} \left( 1 + \frac{\delta_2^2}{r_2^2} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

于是就出现两个能隙：

$$\Delta_1 = \frac{N_1 q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \frac{\delta_1^2}{r_1^2} \quad \Delta_2 = \frac{N_2 q^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \frac{\delta_2^2}{r_2^2} \quad (51)$$

比如南京大学闻海虎小组 2016 年在铁基 ( $L_{Ti-x}F_{ex}$ )OHFeSe 超导体中发现的双超导能隙，其中一个能隙是  $\Delta_1 = 14.3 \times 10^{-3} eV$ ，另外一个  $\Delta_2 = 8.6 \times 10^{-3} eV$  【14】。由于材料结构的复杂性，这两个能隙实际上是多个原子形成的某两个正电荷中心热运动的平均结果，而不仅仅是两个原子核。

按照这种看法，对临界温度以上的导体，同样会原子核偏离平衡位置的问题，出现能隙也是正常的。如果按照 BCS 理论，多能隙和能隙是难以理解的。按照本文的方法，只要合理考虑原子核在临界温度附近的热运动产生的位移，它们都是可以计算的。

### 5.3 临界温度计算公式的推导

#### I) 单质元素超导临界温度

以下按照临界温度下原子核停止振动的观点，来推导超导体的临界温度。为简单起见，先考虑单质元素超导体。假设在临界温度以下，导体中晶格上的原子停止振动。接近临界温度时，原子开始做一维振动。

假设晶格上有三个相同的原子核，它们处于一条直线上。临界温度以下时，中间的原子核位于平衡点，离左右原子核的距离相等，所受的合力等于零。在临界温度时，中间的原子核从平衡位置向右边位移了  $x$  的距离，两个原子核之间的距离  $R \gg x$ 。考虑内层电子的屏蔽作用，令原子核的有效正电荷是  $Q = Nq$ ，左边的原子核对中间的原子核的库伦排斥力的大小是：

$$f_1 = \frac{N^2 q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R+x)^2} \quad (52)$$

右边的原子核对中间原子核的排斥力的大小则是：

$$f_2 = \frac{N^2 q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R-x)^2} \quad (53)$$

中间原子核受到的两个力方向相反，合力是：

$$\begin{aligned} F &= f_1 - f_2 = \frac{N^2 q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(R+x)^2} - \frac{1}{(R-x)^2} \right] \\ &= \frac{N^2 q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[ \frac{1}{1+2x/R+x^2/R^2} - \frac{1}{1-2x/R+x^2/R^2} \right] \\ &\approx -\frac{N^2 q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{4x}{R} = -\frac{N^2 q^2 x}{\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned} \quad (54)$$

这个力是原子核正电荷之间的排斥力，力的大小与原子的位移  $x$  成正比，它的作用总是使中间的原子核回归到平衡的位置。从经典力学可知，这样的力会使原子核绕平衡点做周期振动。

如果考虑一维无限长晶格，中间原子核还要受到晶格上其他原子核的排斥力的影响。我们只考虑中间原子核的位移，无限长晶格的合力相当于对以下级数求和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(nR+x)^2} - \frac{1}{(nR-x)^2} \right] = -\frac{x}{R} \left( 4 + \frac{1}{2} + \frac{4}{3^3} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \approx -\frac{4.72x}{R} \quad (55)$$

(54) 式就变成：

$$F = -\frac{4.72}{4} \frac{N^2 q^2 x}{\pi\epsilon_0 R^3} \quad (56)$$

在这个力的作用下，在临界温度时，原子核位移了  $x = \delta$  的距离，电场力做功转化成动能，有：

$$E = \int_0^{\delta} |F| dx = \frac{4.72}{8} \frac{N^2 q^2 \delta^2}{\pi\epsilon_0 R^3} \quad (57)$$

另一方面，由于原子做一维运动，在临界温度时有  $E = \kappa T_c / 2$ ， $\kappa = 1.38 \times 10^{-23}$  是玻尔兹曼常数。再利用 (47) 式，可以将 (57) 式写为：

$$\kappa T_c = 4.72 N \Delta \frac{r^3}{R^3} \quad (58)$$

因此按照本文，临界温度不但与能隙有关，还与原子核的有效正电荷数和比值  $r/R$  的三次方有关。

## II) 超导的同位素效应

将 (56) 式的作用力写为：



$$F = -\beta x \quad \beta = \frac{4.72 N^2 q^2}{4 \pi \epsilon_0 R^3} \quad (59)$$

按照晶格动力学理论，解原子核的振动方程  $mx'' = -\beta x$ ，得到色散关系【15】：

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{\beta}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (60)$$

原子核的振动能：

$$\hbar \omega = 2 \hbar \sqrt{\frac{\beta}{M}} \left| \sin \frac{\lambda a}{2} \right| = \frac{\kappa T_c}{2} \quad (61)$$

可知临界温度  $T_c \sim m^{-1/2}$ ，就得到超导温度的同位素效应。

### III) 与 BCS 理论的比较

为了与 (41) 式比较，将 (58) 式改写 (42) 式。对于铅元素，按照实验，(42) 式右边等于 4.3。铅的核电荷数是 82，内层电子数是 80。若考虑完全屏蔽，取有效核电荷数  $N = 2$ 。按照 (42) 式，相当于  $r/R = 0.46$ 。

对于汞元素，核正电荷数是 80，内层电子数是 78。按照实验，(42) 右边等于 4.6。若考虑完全屏蔽，有效核正电荷数为 2。相当于  $r/R = 0.45$ 。因此本文的 (58) 式比 (41) 式能更好地描述低温导体的临界温度。

$r/R < 0.5$  表示两个原子的外层电子轨道没有互相渗透。按照 (58) 式，临界温度确定时， $N$  的数值变大，比值  $r/R$  要变小。能隙  $\Delta$  可以通过实验测量，也可以通过理论计算。原子核有效电荷数  $N$  可以采用斯莱特法则计算，或者其他有效的方法来确定【16】。因此我们在原则上可以通过 (58) 式来确定临界温度。

### IV) 合金与高温超导体的临界温度

(1) 式与超导体的晶格结构无关，这与实际实验也是不符的，需要进行修正。目前对 BCS 理论已经提出许多修正理论，但这些修正都非常复杂，还涉及多个参数选择的任意性【12】。尤其对高温超导体的临界温度，用修正的理论来计算实际上是很困难的。

本文的推导方法和公式 (18)，可以作为计算成分复杂的合金和高温超导材料临界温度的基础。假定临界温度以下原子核停止振动，按照 (46) 式计算出每个晶胞的能隙，或者通过实验确定能隙。原子外层轨道半径和晶格常数可以通过实验或理论计算获得，因此可以按照 (58) 式计算合金和高温超导体的临界温度。

由于一般高温超导体有多个能隙，材料的组分也非常复杂，得到的临界温度公式可能是很复杂的，我们需要对具体问题做具体分析。对此本文不拟讨论，但可以用 (58) 式做初步的估计。

比如闻海虎小组发现的铁基  $(L_{1-x}F_x)O\text{HFeSe}$  超导体，采用大的一个能隙  $\Delta = 14.3 \times 10^{-3} \text{ eV}$  做计算，临界温度与能隙的关系是【14】：

$$\frac{2\Delta}{\kappa T_c} = 8.7 \quad (62)$$

这个比值远大于(41)式的 3.52, 是 BCS 理论无法解释的。因此闻海虎等人认为, 铁基超导体不是通过简单的电声耦合实现的。如果按照本文的(42)式, 结果相当于  $R^3/r^3 = 20.53N$ 。比值  $R/r$  或  $N$  的数值可以根据具体晶体结构来确定。比如取  $N=2$ , 就得到  $R/r=2.74$ , 解释实验结果是没有问题的。由于 OHFeSe 材料结构的复杂性, 这里的  $R/r$  和  $N$  的数值只能看成是多个原子核与电子的平均结果, 而不仅仅是一个原子核与一个电子。

再如对高温超导体, 假设某个晶胞中能隙  $\Delta = 8 \times 10^{-22} J = 5 \times 10^{-3} eV$ , 原子核的有效正电荷数  $N=2$ , 令  $r/R=0.57$ , 代入(58)式得到  $T_c=100 K$ 。令  $r/R=0.72$ , 可得到  $T_c=200 K$ , 令  $r/R=0.82$ , 可得  $T_c=300 K$ , 这就是常温超导了。如果取  $\Delta = 8 \times 10^{-22} J$  和  $N=10$ , 在  $r/R=0.47, 0.59, 0.68$  时, 临界温度则分别是  $T_c=100K, 200K, 300K$ 。 $r/R > 1/2$  时, 两个原子的外层电子轨道是相互渗透的。

从(58)式可知, 通过提高能隙, 加大原子核有效正电荷数, 都可以提高临界温度。尤其是临界温度与  $r/R$  的三次方成正比, 加大这个比值, 比如对超导体施加高压, 可以有效地提高临界温度。

## 5.4 电子自旋的本质

为了说明低温超导体形成库珀对, 产生迈斯纳效应的微观机制, 需要阐明微观粒子自旋的本质。众所周知, 通过求解氢原子的量子力学薛定谔方程, 得到氢原子核外电子的角动量表达式:

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad l=0, 1, 2, 3\cdots \quad (63)$$

角量子数  $l=0$  的轨道被称为  $s$  轨道, 在  $s$  轨道上运动的电子被称为基态电子或  $s$  电子。然而按照(60)式,  $s$  轨道的电子的角动量等于零。角量子数  $l=1$  的电子则被称为  $p$  电子, 角量子数  $l=2$  的电子被称为  $d$  电子, 角动量都不等于零。

另一方面, 按照量子力学的计算, 氢原子  $s$  轨道半径为:

$$\alpha = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} \quad (64)$$

它是一个常数, 被称为玻尔第一轨道半径, 表示  $s$  轨道是一个圆。于是就导致一个很奇怪的结果, 基态电子在原子核中心力场中的  $s$  轨道上做圆周运动, 角动量却为零, 这是相互矛盾的。

1927 年施特恩—格拉赫采用银原子做了实验, 在外加磁场下基态银原子会发生偏转, 说明银原子具有磁矩。由于银原子最外层电子为  $s$  态电子, 按照量子力学的理解,  $s$  态电子没有轨道角动量, 因此不存在轨道磁矩, 就不得认为电子具有自旋  $\hat{S}$  的内秉特性。自旋角动量空间任何方向上的投影只能取两个值, 即  $S = \pm\hbar/2$ 。

根据斯特恩和格拉赫实验, 量子力学认为电子存在内秉自旋角动量。然而这样的解释是有问题的, 如果原子最外层的  $s$  电子有自旋, 但没有轨道角动量, 电子是不可能原子核外稳定存在, 它一定会被原子核的正电荷吸引而掉进原子核。就如地球只有自转, 没有绕太阳的公转, 就必然会落入太阳。

在目前的量子力学中, 原子核最外层的  $s$  电子到底处于什么样的运动状态, 是一直没有说清楚

的。之所以出现这样的问题，原因在于量子力学的角动量算符是不完备的，它实际上不能完备地描述微观粒子绕核运动的角动量。

之后，狄拉克提出相对论性的量子力学运动方程，自动导出粒子自旋角动量，使量子力学的角动量算符变得完备，但仍然没有说清自旋角动量的真正含义。电子的自旋即不是绕电子自身的转动，也不是绕原子核的转动，处于一种完全朦胧的状态。

事实上，物理家从来没有在实验上观察到自由电子存在自旋角动量。如果施特恩—格拉赫的实验中不是用银原子，而是用自由电子，通过磁场时是不可能观察到电子束分开成两束的。这个事实上说明自由电子不存在所谓的自旋角动量，或者说自旋不是微观粒子的内秉特征。按照张永德的计算，如果电子自旋是绕自身转动，电子表面的切向运动速度将达到光速的 137 倍【17】，这显然是不可能的。

按照作者文章【2】，用量子力学的动量算符计算粒子的动量时，与粒子真实的动量在方向上存在微小的差别。这种差别不影响粒子的动能，但却会影响粒子的角动量，因此需要引入附加动量和附加角动量进行修正。通过阐明附加角动量与微观粒子自旋的关系，可以解决了量子力学这个没有搞清楚的问题，并且被长期掩盖的基本问题。

该文章证明，量子力学的自旋算符  $\hat{S}$  只是一个合适的量子数，它既不代表自旋角动量，也不代表轨道角动量，但用它可以方便地、精确地计算电子绕原子核轨道运动的角动量。对于在氢原子  $s$  轨道上运动的电子（轨道量子数  $l=0$ ），计算的结果是，角动量即不是零，也不是  $\pm\hbar/2$ ，而是  $L_s = 2S = \pm\hbar$ 。此结果与描述氢原子光谱在磁场中分裂的塞曼效应的泡利方程完全一致【5】：

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi_1 + U(r)\psi_1 + \frac{eH}{2\mu c}(\hat{L}_z + \hbar)\psi_1 &= E\psi_1 \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi_2 + U(r)\psi_2 + \frac{eH}{2\mu c}(\hat{L}_z - \hbar)\psi_2 &= E\psi_2 \end{aligned} \quad (65)$$

式中  $(\hat{L}_z + \hbar)\psi_1 = (m+1)\hbar\psi_1$ ， $(\hat{L}_z - \hbar)\psi_2 = (m-1)\hbar\psi_2$ ，轨道角动量  $\hat{L}$  在  $z$  轴方向上的分量与自旋算符产生的  $\pm\hbar$  是并列的，表示与电子自旋算符对应，原子  $s$  轨道的真实角动量是  $\pm\hbar$ ，而不是  $\pm\hbar/2$ 。由此说明了微观粒子自旋的本质，同时也解决了在  $s$  轨道上运动的电子不会落入原子核的问题。

揭示电子自旋的本质，是弄清 BCS 理论的库珀对概念，阐明物质低温超导机制的关键一步，同时对认识高温超导机制有极其重要的作用。

## 5.5 库珀对是绕原子外层 $s$ 轨道运动的电子对

BCS 理论的核心是，在临界温度以下两个自旋与动量方向相反的电子形成库珀对。意味着两个费米子形成一个玻色子，变成玻色凝结体系。用库珀对电子的概念来研究超导体的平衡态热力学和相变性质，应该说是有效的。用库珀对概念来解释导体的无电阻性质，却是差强人意的。

根据计算，库珀对两个电子的距离大约  $10^{-6}$  米，是晶格间距的一万倍。为什么一个电子会与如此远的某个电子形成库珀对，而不是与自己相邻的电子形成库珀对，这是库珀对概念常被诟病的问题。

另外一个没有被考虑的问题是，两个动量相反的电子只会相互远离。由于微观粒子的运动速度一般都很大，这样的系统是不可能稳定存在的，除非库珀对的两个电子以相反的角度做相互环绕

运动。由于两个电子的电荷相同，它们之间排斥力太大，电声相互作用产生的吸引力太小，根本不可能使它们做相互环绕运动。

按照现有的理论，金属中存在自由电子，金属的导电性就是自由电子在外电场作用下的运动。金属中的自由电子来自原子核最外层的  $s$  电子（以及  $p$  和  $d$  电子），在常温下  $s$  电子脱离原子核电场的束缚，成为游离的自由电子。

因此我们有理由认为，在临界温度以下，金属中自由电子的动能减少，会被原子核电场重新俘虏，又回到绕核运动的状态。已知原子的  $s$  壳层包含两个电子，按照泡利不相容原理，这两个电子的动量和自旋角动量的方向是相反，实际上就构成库珀对。也就是说在临界温度的条件下，超导体中的大部分自由电子都重新回到  $s$  壳层，变成绕核运动的电子对，就形成 BCS 理论所谓的库珀对。

事实上，在超导材料中观测到一个单位的量子磁通涡旋，意味着它们是以成对电子导电的形式存在。因为一个磁通量子需要至少两个电子一起形成环流【18】。而在铜氧化物高温超导体中，量子磁通涡旋可以在实验上直接观测到，库珀对的存在被认为是非常真实的。但这些量子磁通涡旋都不是在存在超导电流的条件下出现的，而是在超导体处于平衡态是存在的。这说明所谓的库珀对就是在原子外层的  $s$  轨道上运动的两个电子，不可能是在导体中迁移的电子对。关于库珀对的起源，这是最简单最合理的结论。

实验发现高温超导体中存在  $d$  波和  $p$  平波以及它们与  $s$  原子轨道的交集和杂化，如果这些电子对不是固定在各自的原子核范围内，而是在导体内迁移，是不可能出现这样的现象的。所有这一切都只能说明，在临界温度以下，自由电子回归各自的原子核轨道，导致超导体相变，产生各种物理新现象。

## 5.6 库珀对电子的排斥力和吸引力

对于某个包含  $N$  个正电子的原子核，内层有  $N-2$  个电子，外层有 2 个  $s$  电子。考虑内层电子的屏蔽作用，可以将原子简单地看成 2 个正电子和两个电子的体系，两个电子绕着原子核在平面上做圆周运动，如图 5 所示。

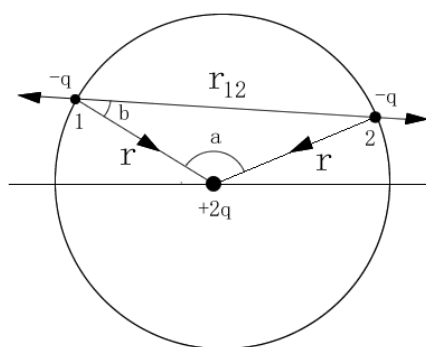


图 5 两个  $s$  电子绕核平面圆周运动的排斥力和吸引力

设原子  $s$  轨道半径为  $r$ ，两个电子任意时刻位于 1 和 2 的位置。电子 1 受到的力是原子核正电荷的吸引力和电子 2 的排斥力的合力：

$$\vec{F}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (66)$$

考虑到:

$$r_{12}^2 = 2r^2(1 - \cos a) \quad 2b + a = \pi \quad (67)$$

$\vec{F}_1$  在两个电子连线方向的投影是:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{r^2} \cos b + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2r^2(1 - \cos a)} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{r^2} \sin(a/2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2r^2(1 - \cos a)} \end{aligned} \quad (68)$$

如果电子 1 受到的是排斥力, 则有  $F_1 > 0$ , 从 (66) 式可得:

$$-2\sin(a/2) + \frac{1}{2(1 - \cos a)} > 0 \quad (69)$$

或:

$$(1 - \cos a) \sin(a/2) < 1/4 \quad (70)$$

比如  $a = 30^\circ$  时, 有:

$$(1 - 0.866) \times 0.5 < 0.25 < 1/4 \quad (71)$$

令  $q = 1.60 \times 10^{-19} C$ ,  $r = 10^{-10} m$ ,  $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12}$ ,  $a = 30^\circ$ , 可得  $F_1 = 7.388 \times 10^{-6} N$ 。

如果电子 1 受到的是吸引力, 则有  $F_1 < 0$ , 即:

$$(1 - \cos a) \sin(a/2) > 1/4 \quad (72)$$

比如  $a = 120^\circ$  时, 有:

$$(1 + 0.5) \times 0.866 = 1.299 > 1/4 \quad (73)$$

以及  $F_1 = -1.226 \times 10^{-6} N$ , 吸引力与排斥力是同一数量级的。这时就出现 BCS 理论所说的, 库珀对的两个电子受电声相互作用导致的吸引力。当  $a = \pi$  时, 电子 1 受到的是吸引力为最大:

$$F_1 = -\frac{3q^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} \quad (74)$$

当  $a = 0$  时  $F_1 \rightarrow \infty$ , 电子 1 受到的是排斥力为无穷大的。实际的情况是电子在三维空间运动, 描述会更复杂一点, 同样会出现排斥力和吸引力, 但两个电子的距离不会太接近, 排斥力无穷大的情况不会发生。

因此按照本文, 就解释了库珀对电子之间存在的吸引力和排斥力。这两种力与原子核的参与有关, 由电子绕原子核所处的位置决定, 它们不是同时出现, 而是轮流出现。

## 5.7 外电场作用下库珀对的消失

如果对超导体施加电场, 在电场的作用下, 原子  $s$  壳层中的两个电子被重新激发, 又变成自由电子, 库珀对消失。但由于临界温度下原子核的运动被冻结, 电子在超导体内可以不受阻力地运动, 形成超导电流。

按照 BCS 理论对库珀对的理解, 引入外加电场非常容易破坏两个电子之间微弱的吸引力, 导致

库珀对的解体，因此超导电流是不可能以库珀对的形式运动的。以下我们用一个简单的计算来说明。

假设用电场强度为 $10^{-3}$ 伏/米的电压，对某个超导线圈通电，产生超导电流后再将电压撤掉。假设电场的方向与库珀对中的一个电子运动方向相同，与另外一个电子的运动方向相反。假设开始时库珀对的两个电子在质心坐标系中以每秒 10 米的速度沿相反方向运动，根据力学公式：

$$F = qE = ma \quad (75)$$

在电场的作用下，电子的加速度是：

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-3}}{9.1 \times 10^{-31}} = 0.18 \times 10^8 \text{ m/s}^2 \quad (76)$$

该电场对一个电子做加速，对另外一个电子做减速，有 $V = at = 1$ ， $t = V/a = 10/a = 5.6 \times 10^{-9} \text{ s}$ 。也就是在 5 ~ 6 纳秒的时间内，就可以使库珀对中运动速度与电场方向相反的电子停止运动，然后变成与电场方向相同的方向运动。这意味着只要对超导线圈一通电，库珀对中的两个电子的运动方向就会变相同，库珀对也就被破坏。因此按照 BCS 理论理解的库珀对，是不可能解释在外电场作用下的超导电流的。

## 5.8 迈斯纳效应的本质

### I) 迈斯纳效应的 BCS 理论解释

迈斯纳和奥克森菲尔德 1933 年发现，锡和铅被冷却到大约 3K 时变成超导体，显现出完全的抗磁性。此时超导体内没有任何磁感应强度，磁力线被完全排斥出导体，这种现象被称为迈斯纳效应。

对迈斯纳效应进行理论解释的是 1935 年提出的伦敦方程，该方程描述了超导体中电流密度和磁场之间的关系，认为超导体表面存在一个屏蔽电流，产生的磁场与外加磁场在超导体内部相互抵消。伦敦方程是一种唯象理论，不能揭示迈斯纳效应的微观机制。1957 年提出的 BCS 理论，被认为从微观层面解释了迈斯纳效应，有它的合理性，但也存在一些根本性的问题。

按照 BCS 理论，当超导体低于临界温度时，它内部的自由电子会形成库珀对。库珀对是两个相反自旋的电子通过相互吸引而形成的一种物质状态，其总自旋为零。当外加磁场时，库珀对在超导体表面形成一个电流层。这个电流层会产生一个与外场完全抵消的磁场，从而使得超导体内部没有磁感应强度。这就是用 BCS 理论 a 的迈斯纳现象的微观机制，它实际上仍然是物理图像不清的。

比如对于碱金属钠、钾、铷、铯等，它们的内部都存在自由电子。但这些碱金属都不是超导体，也没有迈斯纳效应的。为什么碱金属没有迈斯纳效应呢？为什么超导体在磁场中产生的电流是表面电流，而不是整体的电流？这些都是 BCS 理论无法解释的，或者无法合理解释的。

### II) 超导体的抗磁性

按照本文对库珀对的理解，在临界温度以下，导体内的自由电子回归绕核运动的  $s$  圆周轨道。由于泡利不相容原理的限制，两个电子的动量和角动量的方向相反，就形成库珀对，电子的角动量方向是随机分布的。如果加入外磁场，电子的绕核运动的速度会发生改变，导致顺磁性和反磁性。

一个电子的角动量的取向变得与磁场的方向一样，另外一个电子的角动量的方向与磁场的方向相反，就得到反磁性的结果。这就是一般所说的超导体的抗磁性，被称为第一类超导体，常见的第

I 类超导体有汞、铅、锡、铝等单质金属。

如果外磁场能量足够大，足以使两个电子的角速度取向变得磁场的方向相同，就会得到顺磁性的结果。超导体的顺磁性已经在许多实验中被发现【19】，介于抗磁性与顺磁性之间的状态超导体被称为第二类超导体。目前发现的大部分超导材料都是第 II 类超导体，包括部分单质如铌、钒等、部分金属合金、金属间化合物、氧化物等等【20】。

以下计算引自文献【21】，说明为什么低温超导体在外磁场的作用即可以形成抗磁体，也可以形成顺磁体。如图 7 所示，假设有两个电子，受泡利不相容原理的限制，在相同的圆周上沿相反的方向运动。设圆周半径为  $r$ ，电子质量为  $m$ ，角速度为  $\pm\omega$ ，角动量为  $\pm m\omega r^2$ 。两个角动量相加后，总的角动量为零。

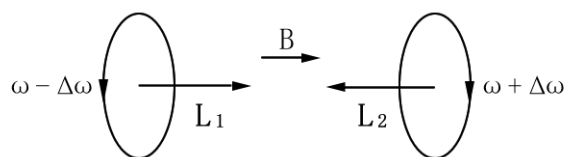


图 7. 两个角动量方向相反的电子在外磁场中产生抗磁性

加上一个外磁场  $B$ ，其方向与第一个电子的角动量  $L_1 = m\omega r^2$  方向相同，与第二个电子的角动量  $L_2 = -m\omega r^2$  的方向相反。根据经典力学计算，磁场的引入会使第一个电子的角速度减少  $\Delta\omega$ ，有：

$$\Delta\omega = \frac{eB}{m} \quad (77)$$

第一个电子的角动量就变为：

$$L'_1 = m(\omega - \Delta\omega)r^2 \quad (78)$$

磁场对第二个电子在作用则使该电子的角速度增加  $\Delta\omega$ ，角动量变成：

$$L'_2 = -m(\omega + \Delta\omega)r^2 \quad (79)$$

因此引入外磁场后，两个电子最初的两个角动量仍然是相互抵消，总角动量由增加的角速度决定，变成：

$$L' = L'_1 + L'_2 = -2m\Delta\omega r^2 \quad (80)$$

可见加上外磁场后，两个电子的总角动量不为零，且方向与磁场的方向相反。根据磁矩与角动量的关系，这两个电子在磁场中产生的磁矩为：

$$M' = \frac{e}{2mc} L' = -\frac{e^2 B r^2}{cm} \quad (81)$$

该磁矩的方向与磁场的方向相反，就出现反磁性。

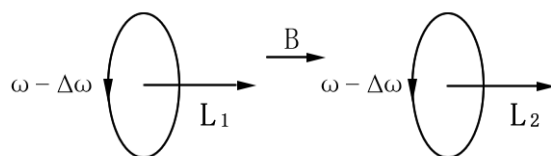


图 6. 两个角动量方向相同的电子在外磁场中产生顺磁性

由于外加磁场产生的附加角动量的方向相同，等价于形成一个小电流圈。超导体内所有相邻的两个小电流圈的电流相互抵消，从总体上看只剩下导体表面边界上的电流。在外加磁场不是很强的情况下，该表面电流产生的磁场与外加磁场相互抵消，导致超导体内没有磁场。

### III) 第二类超导体

另一方面，外加磁场足够强大，也有可能使两个角速度方向相反的电子变成角速度相同，从而把抗磁体变成顺磁体的，如图 8 所示。在这种情况下，总的磁矩是：

$$L' = L'_1 + L'_2 = 2m(\omega - \Delta\omega) r^2 \sim 2m\omega r^2 \quad (82)$$

也就是说，由于外加磁场引起的附加磁矩比电子轨道运动的磁矩小很多，导致的总磁矩仍然与外磁场的方向一致，两个电子的圆周运动导致的就是顺磁性。

比如对于第二类超导体，磁通可以部分地穿入导体，而不是完全抗磁的。某些无序的高温超导材料会显示出弱的顺磁性【22】。Geim 等人对半径为  $0.3 \sim 3\mu\text{m}$  的介观铝盘进行研究，发现铝盘的磁性会在抗磁和顺磁之间进行转换。温度为  $0.4\text{K}$  时，如果磁场强度  $H < 2.5 \times 10^{-3}\text{T}$ ，样品是完全抗磁性的；如果  $H > 5 \times 10^{-3}\text{T}$ ，样品是顺磁性的；磁场强度在  $2.5\text{T} \sim 5 \times 10^{-3}\text{T}$  的区间时，样品在抗磁性与顺磁性之间振荡【23】。

又比如迈斯纳在 1933 年发现，锡和铅在温度大约为  $3\text{K}$  时出现抗磁性迈斯纳效应。然而迈斯纳和汉斯在 1957 年又发表文章说，他们发现锡和汞在低温和某些特殊条件下出现顺磁性【24】。

BCS 理论用  $d$  波理论来解释这类现象，但按照库珀对的概念是说不通的，因为顺磁性就意味着两个电子的自旋角动量相同，库珀对就被破坏。按照 BCS 理论，超导体的这种顺磁性是无法解释的。因为它意味着库珀对的两个电子的动量和角动量的方向都变得一样，也就无所谓库珀对。

高温超导体中的很多磁现象，是用库珀对无法解释的，其中最大的困难是电子和电子之间存在强的关联行为。对于电子声子耦合方式形成的 BCS 超导电性，电子配对主要是因为和晶格发生相互作用，因为配对电子相隔的空间距离为  $10^{-6}\text{m}$ ，大约是晶格长度的几倍甚至几十倍，电子和电子之间是不可能存在强烈的相互作用的。

然而在高温超导材料中，一切变得很不一样。高温超导体中强烈的磁性相互作用，导致自旋磁矩静态上会形成反向排列的反铁磁态。如果挪动一个电子/空穴的位置，那么自旋和电荷是一起挪走的，相邻的两个位置就突然变成了同向排列的铁磁态，于是就不得不尝试恢复反铁磁的状态。结果就是自旋磁矩发生翻转，诱发出一串自旋链条的涨落涟漪。因为自旋关联效应是非常强烈且长程的，结果就是牵一发而动全身，几乎材料中所有的电子磁矩都会为之动荡【25】。

如果按本文的解释，配对电子就是原子  $s$  轨道上的两个电子，它们之间的距离是  $10^{-10}\text{m}$ ，电子间的相互作用就要大得多，高温超导中出现的现象就不足以为奇了。

## 5.9 原子外层轨道运动电子的迈斯纳效应

在常压条件下，以上第一种情况适用于原子最外层含有两个  $s$  电子的大部分金属超导体，如钛 ( $\text{Ti}$ ,  $3d^24s^2$ )，汞 ( $\text{Hg}$ ,  $5d^{10}6s^2$ )、锌 ( $\text{Zn}$ ,  $3d^{10}4s^2$ )、钇 ( $\text{Y}$ ,  $4d^15s^2$ )，锆 ( $\text{Zr}$ ,  $4d^15s^2$ )、



得 (Tc,  $4d^5 5s^2$ )、镉 (Cd,  $4d^{10} 5s^2$ ) 等, 它们在外磁场的作用下产生反磁性的迈斯纳效应。其中某些单质还具有第二类超导体的性质, 如钒 (V,  $3d^3 4s^2$ )。

对于原子最外层只有一个电子的金属导体, 在低温条件下没有迈斯纳效应的问题, 可以有两种解释。一是导体内原子的核外电子非常活泼, 即使在临界温度以下仍然处于自由态, 不可能回到原子核的束缚态, 如碱金属元素。

二是原子核外层只有一个  $s$  电子, 回到束缚态后不能形成库珀对, 也就不可能产生抗磁性, 只能产生顺磁性, 如铬 (Cr,  $3d^5 4s^1$ ), 铜 (Cu,  $3d^{10} 4s^1$ ), 银 (Ag,  $4d^{10} 5s^1$ ), 金 (Au,  $5d^{10} 6s^1$ )。

超导体内还有另外一种可以产生库珀对的机制, 即两个相邻原子, 每个原子的最外层只有一个  $p$  电子, 在临界温度下也回归到各自的原子轨道内运动。这两个电子的运动速度和角动量方向相反, 也可以形成库珀对。在外加磁场时, 也可能使导体变成抗磁体。

比如金属铝 (Al,  $3s^2 3p^1$ ), 镓 (Ga,  $4s^2 4p^1$ ) 和铟 (In,  $5s^2 5p^1$ ) 等。其中每个原子的最外层有三个电子, 在常温下可以成为自由电子。在临界温度以下, 除了每个原子的两个  $s$  电子可能形成库珀对外, 不同的原子的两个  $p$  电子也可能形成库珀对。在外磁场的作用下可以变成抗磁体, 也可以不形成库珀对, 成为第二类超导体。

原子核最外层只有一个  $s$  电子, 但却仍然可以是超导体, 有迈斯纳效应的元素, 有钌 (Ru,  $4p^7 5s^1$ ) 和铌 (Nb,  $4d^7 5s^1$ )。它们的两个不同原子的  $s$  电子可以形成一个库珀对产生抗磁性, 也可以不形成库珀对, 产生顺磁性, 成为第二类超导体。

原子最外层有两个  $s$  电子的还有碱土金属, 以及锰 (Mn,  $3d^5 4s^2$ ), 铁 (Fe,  $3d^6 4s^2$ ) 钴 (Co,  $3d^7 4s^2$ ), 镍 (Ni,  $3d^8 4s^2$ ) 等。这类单质没有超导性的原因可能有晶格结构有关, 在临界温度以  $s$  电子  $d$  和回归原子轨道后, 在外磁场的作用下电子的轨道角动量方向的改变很复杂, 磁性行为也很复杂。

从经典电磁理论可知, 物质的磁性是一个非常复杂的问题。在外磁场的作用下, 物质的顺磁性和抗磁性不但与原子外层电子的运动形式有关, 还与原子内层电子的运动形式有关。在临界温度下, 物质的抗磁性也与原子内层电子的运动形式有关, 对不同的超导体需要根据实际情况做具体的分析。

以上讨论的是纯元素超导体, 对于合金和高温超导体, 不同原子的外层电子形成共价键和杂化轨道, 在低温条件下也可以用这种方法来理解库珀对的形成。不同原子的  $s$  轨道与  $p$  轨道和  $d$  轨道杂化, 可能成  $d$  波和  $p$  波等, 在高温超导中扮演重要的角色【7】。

## 5.10 超导体的层状结构

在临界温度条件下, 固体物质晶格上的原子核被冻结。假设物质中存在自由电子, 电子运动接近晶格上的原子核时, 原子核的电场是静止的。如果电子没有直接与原子核对撞, 就可以选择势能最低的通路, 绕开原子核, 不辐射地通过导体, 如图 2 和图 4 的情况, 就形成低温超导。

如果晶格中有原子核直接挡在电子的运动路径上电子绕不开, 仍然会与原子核产生碰撞 (实际上是非常接近原子核, 相互作用力比较大), 导致运动的不稳定。在这种情况下, 电子就得通过韧致辐射, 产生辐射阻尼力, 使自己的继续运动成为可能。因此超导性与导体的晶体结构有很大的关系, 应当去找存在电子自由通路的材料作为超导体。

一个典型的例子是二硼化镁 ( $MgB_2$ ), 其结构是两层六边形的 Mg, 夹着一层六边形的 B。它超导的转变极其陡峭, 即使是粉末样品, 从 39 K 降温就突然出现了零电阻和抗磁性。产生超导的原因在于, 它的层状结构为电子运动提供了自由的通路【26】。

又比如白锡是四方晶系, 晶胞的中心没有原子核, 电子有自由通路, 在低温下有超导性。灰锡

为金刚石形立方晶系，晶胞中心有原子核，在低温下没有超导性。大多数碱金属都是体心结构，晶胞中心的原子核挡住电子的运动通道，在常压下就没有超导性。

事实上许多超导体，比如高温超导铜氧化物，在导电方面存在的各向异性，沿 Cu-O 面方向比垂直于 Cu-O 面方向的超导电性大得多。这是因为在沿 Cu-O 层面方向没有其他原子核在阻挡，在垂直于 Cu-O 面方向有其他原子核的阻挡【27】。其后发现的铁基超导体【28】，以及铁硒（FeSe）超导体【29】，也都有层状结构。事实上，超导电子都是沿这种层面结构传输的。在临界温度下，原子核的运动冻结，电子就会自动地寻找合适的通路通过超导体，而不需要进行电磁辐射。

有报道说，在高温超导材料的研究中发现，用结构尺寸较大的分子甚至是有机分子，对铁硒超导体进行插层，让铁硒层与层之间尽可能地分开，这样载流子就高度集中在单一的铁硒原子层里面了，类似单层铁硒超导薄膜，临界温度能提升到 48 K 以上【30】。这实际上是给载流子提供一条更顺畅的通路，使它们不与原子核直接碰撞地通过导体。

### 5.11 电荷局域化和莫特绝缘体

低温条件下导体中的自由电子回归原子轨道后，材料明明是导体，但在导带中却没有自由电子，变成类似与莫特绝缘体。实验上发现，在高温超导体中电荷可能是局域化的。这说明在临界温度以下，电荷回归各自的原子，导体中不再有大量的自由电子。同一个  $s$  轨道上有两个电子沿相反方向运动，会导致电子之间库仑排斥力的增加，这种情况与常温下的莫特绝缘体有点相似。莫特绝缘体被认为由电子的库仑排斥作用导致的，是一种量子关联导致的电子局域化效应【31】。

莫特绝缘体通常与高温超导体有关，它被认为是大多数高温超导体的母体化合物。根据能带理论，如果某些材料是导体，其能带部分被电子占据，这些电子可以在材料中自由移动并导电。然而莫特绝缘体却表现出绝缘体的特性，其中的电子不导电。这主要因为莫特绝缘体中的所有电子都被锁住无法象自由电子那样流动，但电子自旋没有被冻结。

### 5.12 超导理论应当考虑电子与原子核的直接相互作用

按照现有的 BCS 超导理论，电子通过原子核时对原子核的运动产生干扰，使原子核产生很小的位移，从而影响了其他电子的运动。低温条件下导体内的自由电子通过微弱的电-声相互作用，形成库珀对，使它们能够无阻地通过导体，即所谓的低温超导。

在这种机制中，晶格上原子核的存在和运动只是作为背景和电子之间的电声相互作用的媒介，不被看成是形成超导的主要因素。BCS 理论实际上不考虑具体的晶体结构，完全忽略的物质结构本身对电子运动和电阻的影响，只考虑温度对电阻的影响，是与事实不相符的。

BCS 理论对低温超现象有效，但对高温超导是失效的。尽管在高温超导过程中，电子间的电声相互作用仍然可以存在，但它不可能是导致高温超导的主要原因。超导问题需要重点考虑的是电子与原子核的强耦合相互作用，而不是电声弱耦合相互作用。

已知超导体有同位素效应，晶格上原子核的质量越大，就需要更低的临界温度。BCS 理论关于同位素效应的解释是有效的，但与实验并不完全吻合。如果考虑韧致辐射效应，同位素效应是很好理解的。由于原子核的质量越大，就需要越低的温度才能使原子核静止下来。原子核的振动能量与质量的开平方成反比，说明了同位素效应与原子核有关的本质。

超导性不但与温度有关，还与压力有关。有些在常压下没有超导性的材料，在高压下也显示出超导性。这说明超导性与晶体结构有关，高压使晶格上原子振动幅度变小甚至停止，电子可以无辐射地从中穿过。

如果按照 BCS 理论，是无法解释这些现象的。对于常温下的导体，无法形成库珀对，按照 BCS 理论，就不会有能隙。因为高压只对晶格上原子核有作用，对电子之间的电声相互作用甚少。如果认为在常压下，电子无法形成库珀对，施加高压后就会形成库珀对，这是说不通的。

### 5.13 超导和迈斯纳效应的机制不完全一样

按照以上讨论，产生超导的机制与产生迈斯纳效应的机制是不完全一样的。对于超导问题，只要晶格上的原子在临界温度下停止振动，导体内电子运动的直接通路上没有原子核存在，电子在电场的作用下可以自由地运动，不产生韧致辐射，就会使导体变成超导体，不需要库珀对的概念。

产生迈斯纳效应则需要考虑电子形成库珀对，库珀对的形成与温度和原子核的壳层结构有关。由于产生低温超导和产生迈斯纳效应的机制不完全一样，这两个效应就有可能不是共生的。有可能某些材料在低温条件下有迈斯纳效应，但却不是超导材料。某些材料在低温下没有迈斯纳效应，但却有超导性。因此在寻找超导体问题上，应当以没有电阻为主，不必过分介意迈斯纳反磁性效应。

### 5.14 物质的超流态、超凝态和超导态

简而言之，在某个压力和某个临界温度下，固体物质所有的原子核都停止振动，导体中所有的自由电子全部回归各自的原子系统，导体中不再有自由电子。由此形成一种新的物质状态，可以称为超凝态。与此对应的是，临界温度以下液氦的超流态。

不同的是，液氦原子的正负电荷分布具有球对称性，使液氦原子成为一个电中性的原子。在临界温度以下，不同的氦原子之间不再有电磁相互作用。每个液氦原子可以独立地流动，甚至在平面上形成单原子层的分布。但一般固体物质的原子的电荷分布是不对称性的，在临界温度下原子之间仍然存在电磁相互作用，晶格仍然是固化的，没有超流性。

至于超凝态物质是否具有电超导性，则取决于物质的晶体结构。在外电场的作用下会使电子激发，超凝态导体中仍然会出现自由电子。如果导体中存在合适通路，比如层状结构，使自由电子可以不产生韧致辐射地通过，这样的超凝态导体就是超导体。如果导体的晶体结构不存在合适的通路，电子经过时会与原子核直接碰撞产生韧致辐射，这样的超凝态导体就不是超导体。

## 六 结 论

本文对经典物理学的辐射理论进行修正，指出加速度不是带电粒子辐射电磁波的主要原因，带电粒子在原子核电场中运动的不稳定，才是辐射的根本原因。如果原子核静止不动，原子内的电子在原子核电场中的运动是稳定的，就不会辐射。如果原子核存在热运动，则会使电子的运动不稳定。在这种情况下，电子需要通过辐射来改变状态，使运动成为可能。由此解释了原子的稳定性问题，只要原子核不存在剧烈的运动，电子绕原子核运动是不需要辐射的。

本文指出，超导能隙是由于原子核停止振动后，绕核运动的电子基态能量降低引起。超导问题应当研究电子与原子核之间的强关联相互作用，而不仅仅是电子与电子之间的电声弱相互作用。

再此基础上，本文提出一个简单的方法，推导出单质元素超导体临界温度的计算公式。该公式比 BCS 理论的公式更符合实验数据，可以以它为基础，计算复杂合金与高温超导体的临界温度。

本文阐明电子自旋的本质，指出电子自旋角动量实际上是电子绕原子核最外层的 s 轨道运动的角动量。库珀对是临界温度下导体中的自由电子回归到束缚态，重新变成绕原子核的 s 轨道做圆周运动的电子对。采用这种图像，可以计算出库珀对电子之间存在的吸引力和排斥力，很好地解释低温超导的抗磁性迈斯纳效应，同时也可以解释某些情况下超导体出现的顺磁性，以及第二类高温超导体的磁学性质。

本文提出超凝态概念，统一阐明原子的稳定性和导体热辐射的本质，解释低温下产生库珀对和超导能隙的微观机制，认为超导理论应当考虑电子与原子核的强关联相互作用，可以为高温超导的理论和实验研究提供新的思路，并对固体物理学产生重要影响。

## 附录：BCS 理论的超导临界温度公式的积分计算存在错误

按照 BCS 理论的推导，在绝对温度  $T=0$  时，超导体内电子能量  $\hbar\omega$ （以下计算简写为  $\omega$ ）与能隙  $\Delta$ （ $\Delta$  与  $\omega$  有关）的关系是【9,10】：

$$\Delta = N(0)V \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta d\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \quad (1)$$

然后将（1）式简化为（相当于假设  $\Delta$  与  $\omega$  无关）：

$$1 = N(0)V \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \quad (2)$$

式中  $N(0)$  是费米面处正常态电子的态密度， $V$  是描述电子间吸引力强度的参数， $\omega_D$  是德拜频率。

在绝对温度  $T \neq 0$  时，热激发使有些库珀电子对分离而成为正常电子，超导电子数下降，因而能隙变小。当温度接近临界温度时，能隙变成一微量，可以在（1）式中删去  $\Delta$ ，同时把（1）式改写为：

$$1 = N(0)V \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega} \text{th} \frac{\omega}{2T_c} \quad (3)$$

将（2）和（3）式积分，得到：

$$\Delta(T=0) = 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right) \quad (4)$$

$$T_c = 1.14\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right) \quad (5)$$

可知（4）与能隙有关，（5）式与能隙无关。从（4）和（5）式就得到：

$$\frac{2\Delta(0)}{T_c} = 3.52 \quad (6)$$

（6）式是 BCS 理论最重要的结果之一，BCS 理论对临界温度的修正都是以（6）式为基础的。

作者仔细阅读了 BCS 的原始论文，没有发现对 (4) 和 (5) 式的详细计算。同时考察了大量关于 BCS 理论的教科书和文献，也没有找到对 (4) 和 (5) 式的详细推导。所有的教科书和文献都只是默认并直接接受 (4) 式和 (5) 式的结果。

以下证明，(4) 和 (5) 式的计算结果是错误的，从 (2) 和 (3) 式不可能得到 (6) 式。首先考虑 (1) 式的积分，如果令  $\Delta = 0$ ，(1) 式两边都等于零。因此 (1) 式没有意义，只能考虑 (2) 式。在 (2) 式中令  $\Delta = 0$ ，积分的结果是：

$$\begin{aligned} 1 &= N(0)V \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega} = N(0)V \ln \omega \Big|_0^{\omega_D} \\ &= N(0)V (\ln \omega_D - \ln 0) = N(0)V \ln \omega_D + \infty \end{aligned} \quad (7)$$

式中包含  $\infty$ ，是没有意义的。即使不考虑无穷大，将 (7) 改写为：

$$1 = \omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right) \quad (8)$$

(8) 式不包含  $\Delta$ ，与 (4) 式也不一样。因此在 (2) 中直接令  $\Delta = 0$  是不可能得到 (4) 式的。

如果在 (2) 式中令  $0 < \Delta \ll \omega$ ，假设  $\Delta$  不依赖于  $\omega$ ，则有：

$$\begin{aligned} 1 &= N(0)V \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} = N(0)V \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega \sqrt{1 + \Delta^2/\omega^2}} \\ &\approx N(0)V \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\omega^2}\right) = N(0)V \left[ \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega} - \frac{\Delta^2}{2} \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega^3} \right] \\ &= N(0)V \left[ \ln \omega + \frac{\Delta^2}{4\omega^2} \right] \Big|_0^{\omega_D} = N(0)V \left( \ln \omega_D + \infty + \frac{\Delta^2}{4\omega_D^2} - \infty \right) \end{aligned} \quad (9)$$

假设 (9) 式中的两个无穷大可以互相抵消，得到：

$$1 = N(0)V \left( \ln \omega_D + \frac{\Delta^2}{4\omega_D^2} \right) \quad (10)$$

从 (10) 式可以解出：

$$\Delta = \omega_D \sqrt{\frac{1}{N(0)V} - \ln \omega_D} \quad (11)$$

结果与 (4) 式也不一样，因此 (4) 式不成立。

再来讨论 (3) 式的积分，令  $\omega/T_c = x$ ，有：

$$\text{th} \frac{\omega}{2T_c} = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \quad (12)$$

将 (12) 式代入 (3) 式，可知 (3) 式是不可积的，因此只能做近似计算。将 (12) 式在  $0 \leq x \leq \infty$  区间接级数展开，有：

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} &= \frac{1-(1-x+x^2/2!-x^3/3!+x^4/4!-\dots)}{1+1+x+x^2/2!+x^3/3!+x^4/4!+\dots} \\ &= \frac{x-x^2/2!+x^3/3!-x^4/4!+\dots}{2+x+x^2/2!+x^3/3!+x^4/4!+\dots} \quad 0 \leq x \leq \infty\end{aligned}\quad (13)$$

如果  $x > 1$ ，(13) 式是发散的，(3) 式的积分没有意义。如果  $x \ll 1$ ，(13) 式可以简化为：

$$\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \approx \frac{x}{2+x} \approx \frac{x}{2} \quad (14)$$

考虑到德拜频率  $\hbar\omega_D \gg \kappa T_c$ ，(3) 式积分上限只能是  $\omega' \ll \omega_D$ ，将 (14) 式代入 (3) 式，得到：

$$1 = N(0)V \int_0^{\omega'} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\omega}{2T_c} = \frac{N(0)V\omega'}{2T_c} \quad (15)$$

我们不可能得到 (5) 式。在一般的情况下  $0 < x < 1$ ，保留到  $x^3$  项，可以令：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x+x^2/2!+x^3/3!+x^4/4!+\dots} \\ = \frac{1}{2} (1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) \quad 0 < x < 1\end{aligned}\quad (16)$$

式中  $a_i$  是常数，将 (13) 式改写成：

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} &\approx \frac{x}{2} (1-x/2!+x^2/3!-x^3/4!) \times (1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) \\ &\approx \frac{x}{2} (b_1x^1+b_2x^2+b_3x^3) \quad 0 < x < 1\end{aligned}\quad (17)$$

式中  $b_i$  是常数，代入 (3) 式，得：

$$\begin{aligned}1 &= \frac{N(0)V}{2} \int_0^{\omega'/T_c} dx (1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3) \\ &\approx \frac{N(0)V}{2} (x+c_1x^2+c_2x^3+c_3x^4) \\ &\approx \frac{N(0)V}{2} \frac{\omega'}{T_c} \left[ 1+c_1\left(\frac{\omega'}{T_c}\right)+c_2\left(\frac{\omega'}{T_c}\right)^2+c_3\left(\frac{\omega'}{T_c}\right)^3 \right]\end{aligned}\quad (18)$$

结果也与 (5) 式不一样，且不含德拜频率  $\omega_D$ 。事实上，用 (3) 式代替 (2) 等于假设：

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}} = \frac{1}{\omega} \operatorname{tgh} \frac{\omega}{2T_c} \quad (19)$$

$\omega$  的积分区间是  $0 \sim \omega_D$ ，采用正常的单位，对某个  $\omega' < \omega_D$ ，可有  $\hbar\omega' = \kappa T_c$  ( $\Delta$  与  $\omega$  有关)，(19) 式就变成：

$$\frac{1}{\sqrt{(\kappa T_c)^2 + \Delta^2}} = \frac{1}{\kappa T_c} \operatorname{tgh} \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$\operatorname{tgh} \frac{1}{2} = \frac{1 - e^{-1/2}}{1 + e^{-1/2}} = 0.463 \quad (21)$$

则可以将 (20) 式写成:

$$\frac{(\kappa T_c)^2 + \Delta^2}{(\kappa T_c)^2} = \frac{1}{0.463^2} \quad (22)$$

从 (22) 式解得:

$$\frac{2\Delta}{\kappa T_c} = 3.83 \quad (23)$$

也就是说, 如果 (19) 式成立, 我们根本无需计算积分, 就可以得到能隙与临界温度的关系, 但结果与 (6) 式不一样。综上所述, BCS 理论推导的临界温度公式不成立。

## 参考文献

1. Mei Xiaochun, Yu Ping, The Stability Analysis of the Relativity Motion of Charged Particles in Electromagnetic Fields and the Possibility to Establish Synchrocyclotron without Radiation Losses, Applied Physics Research, Vol. 4, No. 2; 2012.
2. Mei Xiaochun, The Definition of Universal Momentum Operator of Quantum Mechanics and the Essence of Micro-Particle's Spin, Journal of Modern Physics, 2012, 3, 451-470.  
<http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2012.36062>
3. 周衍柏, 理论力学, 复旦大学出版社, 1962.
4. B. B.巴蒂金 И. H.托普蒂金, 电动力学习题集, 人民教育出版社, 1965, p. 423.
5. 周世勋, 量子力学, 上海科学技术出版社, 1962.
6. 黄昆, 固体物理学, 北京大学出版社, 2014. p. 173, 178.
7. 向涛, 薛健, 高温超导研究面临挑战, 物理, 2017年, 40卷, 8期。
8. 郑勇, 苏刚, 高温铜氧化物超导体能隙问题研究最新进展, 中国科学 G 辑: 物理学力学天文学, 2009年第39卷第11期: 1553—1570。
9. 张祖绅, 超导性理论, 物理译丛, 科学出版社, 1961, p.92.
10. 龚昌德, 强耦合超导理论的物理基础, 物理, 1982年, 11卷第7期。
11. 陈伟, 马如璋, 高温超导氧化物中铜的有效电荷的计算及讨论, 无机材料学报, 1994, Vol. 3, No.3.
12. 蔡建华, 超导临界理论综述, 中国电子出版社学术杂志, 第7卷, 第2期。
13. McMillan W L and Rowell J M. Phys. Rev. Lett., 1965, 14: 108.
14. Zongyi, Du, Xiong Yang, Srutinizing the double surperconducting gaps and strong coupling paring , ( $Li_{1-x}Fe_x$ ) OHFeSe, Nature Communications 7, 10565, 2016.
15. C. 基泰尔, 固体物理导论, 第八版, 化学工业出版社, 2020年。
16. 陈伟, 马如璋, 高温超导氧化物中铜的有效电荷的计算及讨论,
17. 张永德, 量子力学, 科学出版社, 2008, 183页。

18. 戴闻, 介观超导的顺磁性迈斯纳效应, 物理, 1999 年 28 卷, 10 期。
19. Kirtley J R *et al.* Europhys. Lett. , 1996 , 36 : 707。
20. 罗会仟, 超导小时代十四, 物理, 2016 年, 6 期, 410, DOI: 10.7693/wl20160610.
21. 高世昌, 抗磁质的磁化机理, 曲靖师专学报, 1988 年, 7 卷 3 期。
22. Sigrst M. , Nature, 1998, 396: 110~111.
23. Geim A. K. et al. Nature, 1998, 396: 144 ~ 146.
24. Meissner, Hans, Paramagnetic Effect in Superconductors. III. Measurements on Hollow Cylinders of Mercury and Tin, Phys. Rev. 1955, 97, 1627, 10.1103/PhysRev.101.1660.
25. 罗会仟, 超导小时代三十三, 物理, 2018 年, 7 期, 474, DOI: 10.7693/wl20180708.
26. Nagamatsu J *et al.* Nature, 2001, 410 : 63.
27. Chen G F *et al.* Phys. Rev. Lett., 2008, 101 : 057007
28. Zhu X Y *et al.* Supercond. Sci. Tech., 2008, 21(10) : 105001
29. Ge J F et al. Nat. Mater., 2015, 14: 285.
30. Shi M Z *et al.* Phys. Rev. Materials, 2018, 2 : 074801.
31. Mott N, Peierls R. Proc. Phys. Soc., 1937, 49 : 72.